

ФГБУ «ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
ИМ. Б.П. КОНСТАНТИНОВА
НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

На правах рукописи

Вандеев Вячеслав Павлович

Пертурбативный анализ телепараллельной теории
относительности Хаяши – Ширафуджи

1.3.3. — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
Семенова А. Н.

Гатчина — 2025

Оглавление

Введение		5
1	Математическое введение	17
1.1	Общие геометрические соображения и обозначения	17
1.2	Тетрадный формализм	21
1.3	Телепараллелизм и уравнения движения	23
1.4	Уравнения движения	27
2	Сферически симметричные решения	
	и ньютонов предел слабого поля	29
2.1	Сферически симметричное пространство-время	29
2.1.1	Конформно-евклидовы изотропные координаты	33
2.2	Явные решения уравнений	35
2.2.1	Частные случаи	37
3	Гравитационные волны	40
3.1	Возмущения основных объектов	40
3.2	Скалярные и псевдоскалярные возмущения	44
3.3	Векторные и псевдовекторные возмущения	48
3.4	Тензорные возмущения	53
3.5	Подсчет степеней свободы	54
3.5.1	$ a \neq b $, $2c \neq a + b$, $6c \neq a + b$	56

3.5.2	$ a \neq b , 2c = a + b$	57
3.5.3	$a = b \neq 0, a \neq c, a \neq 3c$	58
3.5.4	$a = -b \neq 0, c \neq 0$	58
3.5.5	$6c = a + b, a \neq b $	59
3.5.6	$a = b = c \neq 0$	59
3.5.7	$a = b = 3c \neq 0$	60
3.5.8	$a = b = 0, c \neq 0$	60
3.5.9	$a + b = c = 0$	60

4 Космологические возмущения пространственно плоской метрики FLRW 62

4.1	Возмущения	62
4.2	Возмущения тензора энергии-импульса идеальной жидкости	65
4.3	Скалярные и псевдоскалярные возмущения	66
4.4	Векторные и псевдовекторные возмущения	75
4.5	Тензорные возмущения	85
4.6	Подсчет степеней свободы	87
4.6.1	$ a \neq b , 2c \neq a + b, 6c \neq a + b$	88
4.6.2	$ a \neq b , 2c = a + b$	89
4.6.3	$a = b \neq 0, a \neq c, a \neq 3c$	90
4.6.4	$a = -b \neq 0, c \neq 0$	91
4.6.5	$6c = a + b, a \neq b $	91
4.6.6	$a = b = c \neq 0$	92
4.6.7	$a = b = 3c \neq 0$	92
4.6.8	$a = b = 0, c \neq 0$	93

4.6.9	$a + b = c = 0$	94
Заключение		95
Приложение		98
Список сокращений и условных обозначений		101
Литература		102

Введение

Общая теория относительности, представленная [1] в 1915 году, стала революцией в теоретической физике благодаря красоте своей формулировки и универсальности применимости к физике гравитационных и космологических явлений. Она, вместе с квантовой теорией, стала краеугольным камнем современного понимания природы, несмотря на то, что с момента появления квантовой механики в начале двадцатых годов прошлого века, их совместимость подвергается серьезным сомнениям.

Более чем за сто лет эйнштейновская теория относительности, как релятивистская теория тяготения, нашла своё подтверждение в огромном количестве экспериментов: опыт Хафеле – Китинга, подтверждающий гравитационное замедление времени, эксперимент Паунда и Ребки, где было подтверждено гравитационное красное смещение и многие другие опыты, подтверждающие предсказания теории. Но исторически первым подтверждением адекватности ОТО было успешное описание аномального смещения перигелия Меркурия. Однако, наряду с огромными успехами общая теория относительности имеет и ряд проблем космологического характера, прежде всего связанных с необходимостью введения в теорию темной энергии и темной материи, наличие которой, как некоторой скрытой массы [2], необходимо при описании эволюции Вселенной и поведения ее крупномасштабных структур.

Темная энергия может интерпретироваться как космологическая по-

стоянная, то есть энергия вакуума, но ее малая величина крайне неестественна с точки зрения квантовой теории поля. Сложности работы с темной материей вызваны тем, что к настоящему моменту не обнаружено соответствующих частиц, что означает либо недостаточное понимание физики элементарных частиц, раз не получается обнаружить тяжелые частицы, взаимодействующие лишь с гравитацией, либо то, что теория тяготения должна быть скорректирована на масштабах, где “темная материя” играет существенную роль в поведении наблюдаемых объектов.

Поэтому вполне естественно поставить вопрос о возможности построения теории, отличной от эйнштейновской теории относительности, которая бы согласовывалась с ней в надежно проверенных аспектах, но одновременно с этим адекватнее описывала бы те явления, которые в рамках ОТО требуют введения дополнительных “костылей” в виде темных секторов, или же требуют точной настройки начальных данных. А также хотелось бы надеяться, что подобная теория будет гораздо более благосклонна к квантованию.

В данной диссертации рассматриваются некоторые динамические аспекты теории, предложенной в работе [3], и немного дополненной в [4], японскими исследователями К. Хаяши и Т. Ширафуджи. Эту теорию они назвали *New general relativity* (ниже будет использоваться аббревиатура NGR), она является простейшим обобщением TEGR — телепараллельного эквивалента теории относительности, то есть теории динамически полностью тождественной ОТО, но использующей в качестве основной геометрической характеристикой пространственно-временного многообразия кручение вместо кривизны, а в качестве динамической переменной поле

тетрад вместо метрики. Тетрадный формализм в ОТО использовал и Эйнштейн, когда пытался построить единую теорию электромагнитных и гравитационных взаимодействий, интерпретируя шесть дополнительных степеней свободы как компоненты электрического и магнитного полей. Что однако не привело к существенным успехам.

В тексте диссертации сначала определяются основные геометрические объекты, которые будут использоваться в данном исследовании, иллюстрируются общие свойства телепараллельных теорий, строятся лагранжева плотность действия и выводятся уравнения движения.

Затем демонстрируется, что вакуумные статические сферически симметричные решения могут быть найдены при произвольных параметрах теории, а также показывается наличие в теории Хаяши – Ширафуджи моделей отличных от TEGR, в которых воспроизводится ньютоновский закон всемирного тяготения.

В следующей главе исследуются возмущения вакуумных уравнений движения над тривиальным решением — пространством Минковского. Это позволяет определить количество и характер всех степеней свободы каждой из теорий, задаваемых уравнениями движения NGR, без полного построения канонического гамильтонова формализма теории.

В заключительной части исследования обобщаются вычисления предыдущей главы на случай пространственно плоской Вселенной Фридмана – Робертсона – Уокера в присутствии тензора энергии-импульса идеальной жидкости. Выводятся уравнения для возмущений тетрады, задающей космологической метрики Фридмана с конформным временем, а также определяется, какая именно реализация теории Хаяши – Ширафуджи задает

наиболее адекватную, с физической точки зрения, модель.

Актуальность исследования

Выше упоминалось, что космология, основанная на общей теории относительности с одной стороны прекрасно согласуется с наблюдениями, а с другой содержит в себе проблемы, связанные, например, с наличием темных секторов. Поэтому вопрос о поиске модифицированных теорий гравитации и их космологических приложений является насущным, что подтверждается большой публикательной активностью в этой сфере.

Статьи, на которых основывается данная диссертация сосредоточены на исследовании общих свойств телепараллельной теории Хаяши – Ширафуджи, как модификации ОТО, в рамках которой возникают дополнительные динамические степени свободы, которые в некоторых моделях, обладающих абсолютным параллелизмом, позволяют описать эффекты темной материи, как чисто гравитационные [5]. А тот факт, что не так давно были детектированы гравитационные волны, оставляет надежды на скорое появление большого количества новых экспериментальных данных, которые позволят проверять адекватность ОТО и ее модификаций на все большем массиве современных наблюдений.

Разработанность темы

Как было замечено выше, первые телепараллельные идеи, основанные на тетрадном формализме, разрабатывал еще Эйнштейн [6], но уже в начале шестидесятых годов эти начинания были подхвачены Мёллером [7], Пеллегрини и Плебански [8]. Ими был построен лагранжиан, согласую-

щийся с принципами абсолютного параллелизма. Несколько позже Хаяши и Накано [9] переформулировали абсолютный телепараллелизм с помощью подгруппы трансляций на калибровочной группе Лоренца. Новый формализм, обобщающий ОТО и развивающий эти идеи, был представлен в [3].

Наконец в современном виде концепции абсолютного телепараллелизма применительно к гравитации вместе со всей терминологией были сформулированы в начале десятых годов двадцать первого века в работах [10] и [11]. С тех пор в журнальной литературе стали появляться многочисленные статьи, которые развивали и обобщали идеи телепараллелизма. Среди них нужно отметить и нелинейные по скаляру кручения, в отличие от NGR [3], обобщения теории относительности типа $f(T)$, впервые рассмотренные в [12] и [13].

Что касается модели New general relativity, то и она активно исследуется в данный момент. Прежде всего она изучается, как динамическая модель со связями. Этому посвящены работы [14], [15]. В них развивается канонический формализм, обсуждаются свойства гамильтониана и первичных связей, а также выделяются девять частных теорий, которые могут реализовываться в NGR. Статья [16] исследует непротиворечивость всех моделей теории, учитывая не только квадратичные, но и кубические члены взаимодействия. Принцип эквивалентности, как одна из фундаментальных основ эйнштейновской теории относительности, исследовался в теории Хаяши – Ширафуджи в работе [17] и обобщался применительно к ней в [18], где были приведены соотношения на параметры теории, при которых выполняется равенство гравитационной и инертной масс.

Цель работы

Целью данной работы является анализ динамических свойств телепараллельного обобщения Хаяши – Ширафуджи общей теории относительности Эйнштейна. Прежде всего интересна адекватность этой теории в качестве альтернативы классического описания гравитации. Поэтому задача исследования состоит в определении области параметров, которые бы задавали модель, хорошо согласующуюся с ОТО, но не тождественную ей, для того чтобы в перспективе описать поведение темных секторов энергии-импульса материи или, к примеру, инфлатона. Для этого в рамках данной диссертации решаются следующие задачи.

- Показать, что при поиске вакуумных статических сферически симметричных решений в теории Хаяши – Ширафуджи, тетрада может быть выбрана в виде, не порождающем антисимметричной части полевых уравнений, и продемонстрировать, что они допускают интегрирование в элементарных функциях при произвольных значениях параметров теории.
- Получить уравнения линеаризованных возмущений теории NGR над плоским пространством Минковского и классифицировать все переменные в тензорном, векторном и скалярном секторах возмущений тетрады.
- Описать поведение космологических возмущений уравнений движения над конформно плоской тетрадой, задающей метрику Фридмана – Робертсона – Уокера, в случае, когда материя в уравнениях движения представлена тензором энергии-импульса идеальной жидкостью.

- С помощью конформных преобразований динамической переменной теории, тетрады, построить конформные преобразования полевых уравнений движения.
- Определить наличие или отсутствие «сильной связи» (нестабильного количества калибровочных степеней свободы) в различных моделях, реализуемых исследуемой теорией Хаяши – Ширафуджи.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Показано, что вакуумные статические сферически симметричные решения могут быть найдены явно в терминах элементарных функций без ограничения общности параметров теории Хаяши – Ширафуджи, а использованная тетрада не порождает антисимметричной части полевых уравнений.
2. Получены возмущения вакуумных уравнений движения над тривиальным решением — пространством Минковского во всех девяти моделях, реализуемых различными комбинациями параметров теории Хаяши – Ширафуджи. В линейном порядке теории возмущений проведена классификация степеней свободы на динамические, калибровочные и ограниченные связями.
3. Получены уравнения линеаризованной теории Хаяши – Ширафуджи над фоновым пространством Фридмана – Робертсона – Уокера, как прямым вычислением, так и с помощью конформных преобразований тетрады. Определены модели, в которых космологические решения могут вести себя подобно ОТО.

4. Выявлен класс моделей, реализующихся в теории Хаяши – Ширафуджи, не обладающих проблемой «сильной связи» (то есть обладающих устойчивым количеством калибровочных мод в рамках линеаризованной теории) при переходе от фоновое пространство Минковского к космологическому фону Фридмана, поэтому допускающих корректную постановку задачи Коши.

Научная новизна и значимость работы

Все вышеперечисленные положения, выносимые на защиту, основаны на новых результатах. Подробнее положения будут сформулированы вместе со всеми соответствующими ссылками в тексте диссертации. Кратко новизна и значимость всех наших результатов могут быть описаны следующим образом.

Исследуется одна из телепараллельных модификаций ОТО — линейная по трем четным скалярам кручения теория Хаяши – Ширафуджи, которая за более чем сорок лет своего существования, в отличие от нелинейных обобщений, достаточно бедно описана в научной литературе. Анализируются динамические свойства различных реализаций теории с помощью вакуумных возмущений полевых уравнений над плоским пространством Минковского и космологических возмущений (попутно построив конформные преобразования уравнений движения) с целью определения моделей, которые могли бы претендовать на адекватное обобщение ОТО, а также переменные в линеаризованной теории классифицируются на динамические, калибровочные и те, что ограничены связями. Выявлен класс моделей NGR, которые лишены проблемы «сильной связи» при переходе от

фона Минковского к Фридмановскому, то есть обладают устойчивым количеством калибровочных степеней свободы, а значит допускают корректную постановку задачи Коши.

Методология и методы исследования

В рамках исследования использовались методы геометрии гладких многообразий, элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а также методы теории калибровочных полей.

Достоверность результатов

Полученные результаты согласуются с известными ранее фактами, справедливыми для эйнштейновской теории относительности, а также не противоречат теоретическим выводам, полученным в рамках модифицированных телепараллельных гравитационных теорий. Достоверность выводов обеспечивается применением корректных математических методов. Результаты докладывались на семинарах и конференциях, они опубликованы в ведущих международных журналах, цитируются в работах других авторов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: LVI Зимняя Школа НИЦ КИ - ПИЯФ (Луга, 2024); 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 2024); XI Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные про-

блемы физики-2024» (Минск, 2024); Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024» (Москва, 2024);

на научных семинарах Отделения теоретической физики НИЦ КИ ПИЯФ им. Б.П. Константинова, Кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ, лаборатории физики высоких энергий МФТИ, Лаборатории теоретической физики имени А. А. Фридмана РГПУ имени А. И. Герцена, Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, Отдела теоретической физики ИЯИ РАН.

Публикации и вклад автора

Основные результаты диссертации опубликованы в трех печатных работах в изданиях, индексируемых базами данных “SCOPUS” и “Web of Science” [19] – [21]. Все основные результаты, изложенные в диссертационной работе, получены соискателем либо при его прямом неотделимом участии в соавторстве, либо лично.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, одного приложения и списка литературы из 61 наименования. Работа изложена на 110 страницах.

Во введении приводится краткая историческая справка идей абсолютного параллелизма, формулируется актуальность исследования, обозначаются цели и задачи диссертации. Перечисляются положения, выносимые на защиту, отмечается научная новизна и значимость работы. При-

водится список публикаций и апробаций работ, лежащих в основе диссертации.

В первой главе, не содержащей новых результатов, формулируются основные принципы построения лагранжианов телепараллельных моделей. Определяются геометрически объекты и их свойства, используемые в исследовании, выводятся уравнения движения теории Хаяши – Ширафуджи.

В второй главе демонстрируется, что вакуумные статические полевые уравнения, обладающие сферической симметрией, не имеют антисимметричной части, при подходящем выборе анзаца тетрады, и могут быть проинтегрированы явно при произвольных параметрах теории в элементарных функциях.

Во третьей главе приведены возмущения уравнений движения над плоским фоном — пространством Минковского. Это позволяет посчитать степени свободы линеаризованной теории в каждой из девяти моделей, реализуемых в рамках NGR.

В четвертой главе рассмотрены возмущения уравнений движения уже над пространством Фридмана – Робертсона – Уокера в изотропном времени, что позволяет также подсчитать степени свободы во всех моделях и путем сравнения с результатами второй главы сделать вывод о неустойчивом количестве калибровочных мод в некоторых из них.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы исследования.

Необходимо сделать важное замечание, что при классификации переменных во второй и третьей главах используемые нами термины: динамическая мода, связь, ограничивающая поведение переменной и калиб-

ровочная степень свободы, применяются только к исследуемым линейным приближениям исходной теории.

В приложении приведен альтернативный способ получения возмущений уравнений движения над пространством Фридмана – Робертсона – Уокера с помощью конформных преобразований тетрады.

1. Математическое введение

1.1. Общие геометрические соображения и обозначения

На гладких многообразиях могут быть независимым образом введены две геометрические структуры: метрический тензор $g_{\mu\nu}$ и аффинная связность $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Первая определяет длины кривых на многообразии и естественную инвариантную меру интегрирования $\sqrt{-g} dx$, вторая же определяет правило параллельного переноса тензорных полей на многообразии. Обобщение эйнштейновской теории гравитации, основанной на римановой геометрии, на метрико-аффинную геометрию было предложено в [23], а ее телепараллельная реализация в [24]. Не вдаваясь во все дифференциально-геометрические тонкости, перейдем к построению основных объектов, которые будут использованы в диссертационном исследовании.

Рассмотрим векторное поле A_{μ} на пространственно-временном многообразии. При параллельном переносе одного на бесконечно малый вектор δx^{μ} , контравариантное поле A^{μ} с помощью связности $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ получает малое приращение $\delta A^{\nu} = -\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} A^{\alpha} \delta x^{\mu}$, а для ковариантных компонент векторного поля A_{μ} такое приращение имеет вид $\delta A_{\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A_{\alpha} \delta x^{\mu}$, где коэффициенты отличаются лишь знаком, потому что скаляры вида $A_{\mu} B^{\mu}$ инвариантны при параллельном переносе вдоль δx^{μ} на многообразии.

Учитывая, что параллельно перенесенный вектор может быть интерпретирован как этот же вектор в близкой точке, то полное его приращение

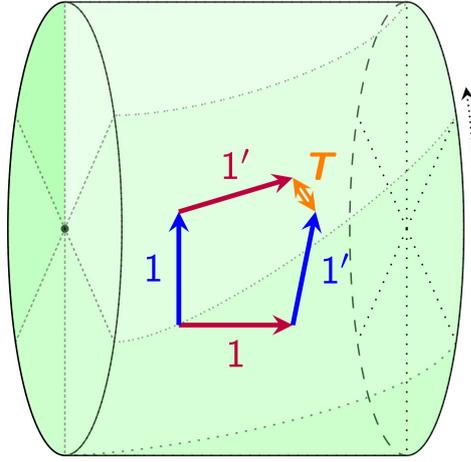


Рис. 1.1: $T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$ определяет некоммутативность параллельных переносов вдоль суммы двух векторов $\vec{1} + \vec{1}' \neq \vec{1}' + \vec{1}$.

будет состоять из разности величины первого порядка малости по δx^{μ} , пропорциональной частной производной от поля, и указанного выше прираще- ния, пропорционального связности Γ . Поэтому ковариантная производная контравариантных и ковариантных векторных полей будет иметь вид

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} \equiv \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} A^{\alpha}, \quad \nabla_{\mu} A_{\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_{\alpha}. \quad (1.1)$$

Закон преобразования коэффициентов связности при изменениях коорди- нат $x^{\mu} = x^{\mu}(\hat{x})$ имеет стандартный нетензорный вид с неоднородным сла- гаемым

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \hat{x}^{\rho}} \frac{\partial \hat{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \hat{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \hat{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \hat{x}^{\rho}} \frac{\partial^2 \hat{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (1.2)$$

Поскольку неоднородное слагаемое симметрично по индексам μ и ν , то антисимметричная часть связности является тензором

$$T^{\sigma}_{\cdot\mu\nu} \equiv \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}, \quad (1.3)$$

называемым кручением. Иллюстрация (из обзора [25]) геометрического смысла кручения приведена на Рис. 1.1.

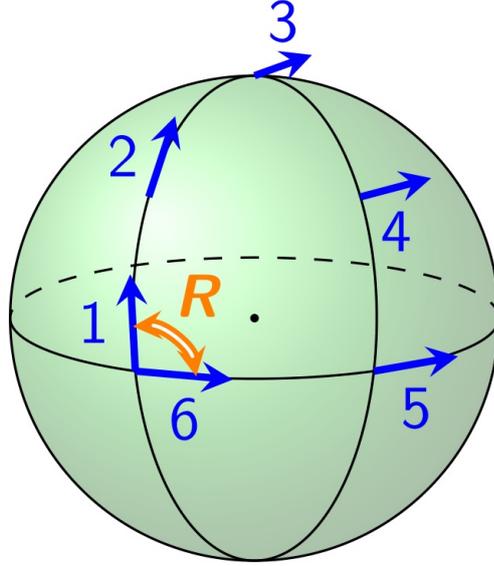


Рис. 1.2: Поворот вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура 1 – 6.

Еще одной фундаментальной характеристикой гладкого многообразия является кривизна, явное выражение для которой можно получить с помощью коммутатора ковариантных производных, примененного к произвольному векторному полю

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\alpha = R^\alpha_{\cdot\beta\mu\nu} A^\beta - T^\sigma_{\cdot\mu\nu} \nabla_\sigma A^\alpha, \quad (1.4)$$

где $R^\alpha_{\cdot\beta\mu\nu}$ — тензор кривизны

$$R^\alpha_{\cdot\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}. \quad (1.5)$$

Он обладает единственным свойством симметрии $R^\alpha_{\cdot\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\cdot\beta\nu\mu}$. Его геометрический смысл состоит в нетривиальности параллельного переноса векторного поля вдоль замкнутого контура, иллюстрация кривизны из [25] приведена на Рис. 1.2.

Нужно заметить, что в общих метрико-аффинных пространствах еще одной характеристикой, кроме кривизны и кручения, является неметрич-

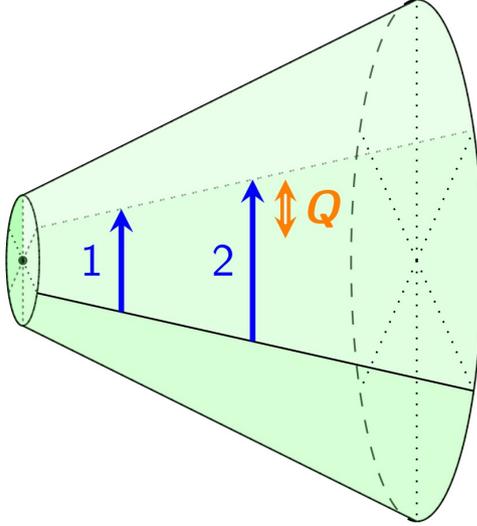


Рис. 1.3: Изменение длины вектора при параллельном переносе.

ность

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

которая в классической римановой геометрии [26] полагается равной нулю.

Иллюстрация неметричности (из обзора [25]) приведена на Рис. 1.3.

Поэтому выражая из нее частную производную от метрики

$$\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho}g_{\rho\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}g_{\mu\rho} + Q_{\alpha\mu\nu}, \quad (1.7)$$

и используя стандартный метод вывода симметричной связности Леви-

Чевиты с помощью комбинации производных $\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}$, получим

выражение для общей аффинной связности

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\nu} = & \frac{1}{2} (\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) + \\ & + \frac{1}{2} (T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu}) + \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\mu\alpha} - Q_{\alpha\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ниже для связности мы будем использовать обозначения $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$,

где тильдой будет обозначаться симметричная связность Леви-Чивиты

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\tilde{\Gamma}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}), \quad (1.9)$$

а $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ — поправка к связности

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu}) + \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\mu\alpha} - Q_{\alpha\mu\nu}). \quad (1.10)$$

В этих терминах тензор кривизны (1.5) может быть представлен в виде

$$R_{\cdot\beta\mu\nu}^\alpha(\Gamma) = R_{\cdot\beta\mu\nu}^\alpha(\tilde{\Gamma}) + \tilde{\nabla}_\mu\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \tilde{\nabla}_\nu\delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha\delta\Gamma_{\nu\beta}^\rho - \delta\Gamma_{\nu\rho}^\alpha\delta\Gamma_{\mu\beta}^\rho, \quad (1.11)$$

где $\tilde{\nabla}$ — ковариантная относительно связности Леви-Чивиты производная.

1.2. Тетрадный формализм

Эйнштейновская общая теория относительности — это теория, где динамической переменной является ковариантный тензор второго ранга $g_{\mu\nu}$, метрика. Альтернативным к метрическому является тетрадный подход, в рамках которого динамической переменной является набор четырех векторных полей e_a (где индекс a принимает значения 0, 1, 2, 3), образующих ортонормированный базис $g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}$ в касательных, в каждой точке к многообразию, плоских пространствах. Набор векторов e_a^μ образует невырожденную матрицу, которая вместе с обратной e_μ^a может определять ко- и контравариантные компоненты метрики

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}. \quad (1.12)$$

Важно отметить, что заданная метрика определяет поле тетрад e_μ^a с точностью до локального преобразования Лоренца в касательном пространстве $e_\mu^a \rightarrow \Lambda^a_c e_\mu^c$, что соответствует переходу между ортонормированными базисами в плоском касательном пространстве.

Тот факт, что невырожденная матрица e_μ^a обладает индексами двух

различных типов, позволяет определить тензоры с латинскими индексами

$$B_a^{\cdot b} \equiv e_{\cdot a}^{\mu} B_{\mu}^{\cdot \nu} e_{\nu}^{\cdot b}, \quad (1.13)$$

что можно интерпретировать как координаты тензора, отнесенные к определенному базису. Наличие индекса новой природы делает необходимым введение связности нового типа ω , которая будет отвечать за преобразование объекта с латинскими индексами при параллельном переносе и задавать его ковариантную производную

$$\nabla_{\mu} W^{a\nu} = \partial_{\mu} W^{a\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} W^{a\rho} + \omega_{\cdot\mu c}^a W^{c\nu}. \quad (1.14)$$

Новая связность $\omega_{\cdot\mu c}^a$ называется спин-связностью. Она преобразуется как связность по латинским индексам при преобразованиях Лоренца

$$\omega_{\cdot\mu b}^a \rightarrow \Lambda_c^a \omega_{\cdot\mu d}^c (\Lambda^{-1})_b^d - (\Lambda^{-1})_c^a \partial_{\mu} \Lambda_b^c.$$

Поскольку естественно требовать согласованности аффинной связности Γ и спин-связности ω , так как понятие параллельного переноса должно быть универсальным для объектов с греческими и латинским индексами (ведь связаны они именно тетрадами), то $e_{\cdot a}^{\mu}$ полагается ковариантно постоянным

$$\nabla_{\mu} e_{\cdot a}^{\nu} = \partial_{\mu} e_{\cdot a}^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} e_{\cdot a}^{\alpha} - \omega_{\cdot\mu a}^b e_{\cdot b}^{\nu} = 0, \quad \nabla_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} = \partial_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^{\cdot a} + \omega_{\cdot\mu b}^a e_{\nu}^{\cdot b} = 0. \quad (1.15)$$

Эти выражения позволяют выразить аффинную связность через спин-связность и наоборот

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = e_{\cdot a}^{\alpha} (\partial_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} + \omega_{\cdot\mu b}^a e_{\nu}^{\cdot b}), \quad \omega_{\cdot\mu b}^a = -e_{\cdot b}^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} + e_{\alpha}^{\cdot a} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\nu}^{\cdot b}, \quad (1.16)$$

где выражение в первых скобках иногда обозначают $\mathfrak{D}_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} = \partial_{\mu} e_{\nu}^{\cdot a} + \omega_{\cdot\mu b}^a e_{\nu}^{\cdot b}$, что называется лоренц-ковариантной (по латинским индексам) производной. Соотношения (1.16) в дальнейшем помогут получить спин-связность

$\tilde{\omega}$, соответствующую связности Леви-Чивиты $\tilde{\Gamma}$, компоненты которой на-
ходятся по компонентам метрическим.

1.3. Телепараллелизм и уравнения движения

Теперь рассмотрим, как ковариантное постоянство тетрады (1.15) по-
влияет на метрику

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \eta_{ab} (\partial_{\alpha} (e_{\mu}^{\cdot a} e_{\nu}^{\cdot b}) - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} e_{\beta}^{\cdot a} e_{\nu}^{\cdot b} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} e_{\mu}^{\cdot a} e_{\beta}^{\cdot b}) = -e_{\mu}^{\cdot b} e_{\nu}^{\cdot c} (\eta_{ab} \omega_{\cdot ac}^a + \eta_{ac} \omega_{\cdot ab}^a) = 0, \quad (1.17)$$

где последнее равенство выполнено из-за антисимметрии ω по латинским
индексам в силу принадлежности матрицы $\omega_{\cdot\alpha}^{\cdot}$ к алгебре Ли группы Ло-
ренца. Таким образом, ковариантное постоянство тетрады ведет к триви-
альности тензора неметричности, что приводит к еще одному свойству сим-
метрии кривизны $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$. Поэтому выражение (1.8) упрощается
до

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} + K_{\alpha\mu\nu}, \quad (1.18)$$

где $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}$ — связность Леви-Чивиты, а

$$K_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu}) \quad (1.19)$$

называется тензором конторсии, который наследует за кручением свойство
антисимметрии по двум индексам $K_{\alpha\mu\nu} = -K_{\nu\mu\alpha}$.

Поэтому, используя в качестве $\delta\Gamma$ конторсию K без неметричности,
получаем кривизну (1.11) в форме

$$R_{\cdot\beta\mu\nu}^{\alpha}(\Gamma) = R_{\cdot\beta\mu\nu}^{\alpha}(\tilde{\Gamma}) + \tilde{\nabla}_{\mu} K_{\cdot\nu\beta}^{\alpha} - \tilde{\nabla}_{\nu} K_{\cdot\mu\beta}^{\alpha} + K_{\cdot\mu\rho}^{\alpha} K_{\cdot\nu\beta}^{\rho} - K_{\cdot\nu\rho}^{\alpha} K_{\cdot\mu\beta}^{\rho}. \quad (1.20)$$

Вычисляя скалярную кривизну

$$R(\Gamma) = R(\tilde{\Gamma}) + 2\tilde{\nabla}_\mu T^\mu + \mathbb{T}, \quad (1.21)$$

где

$$T_\mu = T_{\cdot\mu\alpha}^\alpha = -T_{\cdot\alpha\mu}^\alpha \quad (1.22)$$

является вектором кручения, а

$$\mathbb{T} = \frac{1}{4}T_{\alpha\beta\mu}T^{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2}T_{\alpha\beta\mu}T^{\beta\alpha\mu} - T_\mu T^\mu \quad (1.23)$$

скаляром кручения, который иным образом можно определить как свертку

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta\mu}S^{\alpha\beta\mu}, \quad (1.24)$$

где $S^{\alpha\beta\mu}$ — так называемый суперпотенциал

$$S^{\alpha\beta\mu} = K^{\beta\alpha\mu} + g^{\alpha\beta}T^\mu - g^{\alpha\mu}T^\beta, \quad (1.25)$$

который естественным образом возникнет ниже при выводе уравнений движения. И аналогично конторсии, вслед за кручением обладает свойством антисимметрии $S^{\alpha\beta\mu} = -S^{\alpha\mu\beta}$.

Нужно отметить, что все вышеизложенные рассуждения подразумевали, что тетрада $e_{\cdot a}^\mu$ и спин-связность $\omega_{\cdot ab}^a$ являются независимыми. И поэтому в классической формулировке телепараллельной гравитации используется связность Вайценбёка

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_{\cdot a}^\alpha \partial_\mu e_\nu^{\cdot a}, \quad (1.26)$$

что эквивалентно тривиальности спин-связности $\omega_{\cdot ab}^a = 0$. Геометрический смысл связности Вайценбёка обсуждался в работе [27]. Так тензор кручения однозначно определяется производными тетрады

$$T_{\cdot\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = e_{\cdot a}^\alpha (\partial_\mu e_\nu^{\cdot a} - \partial_\nu e_\mu^{\cdot a}). \quad (1.27)$$

Но для формулировки действия теории телепараллельной гравитации фиксируется общая кривизна $R_{\beta\mu\nu}^\alpha(\Gamma) = 0$ и в частности скаляр $R(\Gamma) = 0$. Это позволяет выразить скаляр кривизны $R(\tilde{\Gamma})$ из (1.21) через скаляр кручения и дивергенцию вектора T^μ , а значит вакуумное действие Эйнштейна—Гильберта может быть переформулировано

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int R(\tilde{\Gamma}) \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int \mathbb{T}|e| d^4x + \frac{1}{\kappa} \int |e| \tilde{\nabla}_\mu T^\mu d^4x, \quad (1.28)$$

где мера $|e|$ — определитель матрицы e_μ^a , а $\kappa = 8\pi G$ — гравитационная постоянная, которая пропорциональна ньютоновской константе тяготения G . Дивергенция $\tilde{\nabla}_\mu T^\mu$ дает нулевой вклад в уравнения движения, поскольку в произведении с мерой сводится к частной дивергенции $\partial_\mu T^\mu$, которая, в свою очередь, по формуле Гаусса — Остроградского переходит в интеграл по трехмерной гиперповерхности $\int T^\mu d\sigma_\mu$, где $d\sigma_\mu$ — вектор нормали к гиперповерхности. Однако это поверхностное слагаемое, в соответствии с классическими вариационными принципами, равно нулю, поскольку на пространственной бесконечности все физические поля считаются исчезающе малыми.

Действие в правой части (1.28) задает теорию динамически полностью тождественную ОТО, поэтому она называется телепараллельным эквивалентом теории относительностиTEGR. Подробное изложение многих уже известных фактов телепараллельных теорий приводится в большом обзоре [25]. Однако интерес представляет действие с обобщенным скаляром кручения

$$\mathfrak{T} = \frac{a}{4} T^{\alpha\mu\nu} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{b}{2} T^{\alpha\mu\nu} T_{\mu\alpha\nu} - c T^\mu T_\mu, \quad (1.29)$$

вместо (1.23). Этот скаляр отличается от того, что был использован в [3],

лишь переобозначением параметров a, b, c

$$\mathfrak{T} = c_1 t_{\alpha\mu\nu} t^{\alpha\mu\nu} + c_2 v_\mu v^\mu + c_3 a_\mu a^\mu = c_1 T_{\text{ten}} + c_2 T_{\text{vec}} + c_3 T_{\text{ax}}, \quad (1.30)$$

где

$$t_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu}) + \frac{1}{6} (g_{\nu\alpha} v_\mu + g_{\nu\mu} v_\alpha) - \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} v_\nu, \quad (1.31a)$$

$$v_\mu = -T_\mu = T_{\cdot\lambda\mu}^\lambda, \quad (1.31b)$$

$$a_\mu = \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T^{\nu\alpha\beta}, \quad (1.31c)$$

являются соответственно тензорной, векторной и аксиальной частями кручения. Выражение (1.30) можно легко переписать в виде

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{a+b}{3} \right) T_{\text{ten}} + \left(\frac{a+b-6c}{6} \right) T_{\text{vec}} + \left(\frac{6b-3a}{2} \right) T_{\text{ax}}, \quad (1.32)$$

откуда связь между наборами коэффициентов c_1, c_2, c_3 и a, b, c очевидна. В этих терминах скалярTEGR (1.23) при $a = b = c = 1$ имеет вид

$$\mathbb{T} = \frac{2}{3} T_{\text{ten}} - \frac{2}{3} T_{\text{vec}} + \frac{3}{2} T_{\text{ax}}. \quad (1.33)$$

Нужно заметить, что динамическая теория, реализуемая плотностью лагранжиана (1.29), уже не будет локально лоренц-инвариантной в силу тривиальности спин-связности [28]. Потеря лоренц-инвариантности, в частности, означает, что найденное решение полевых уравнений движения, после применения к нему произвольного $SO(1,3)$ -преобразования [29], перестанет быть решением. Однако факт утраты локальной лоренц-инвариантности не означает, что уже на этом этапе теория Хаяши – Ширафуджи противоречит ОТО, поскольку это нарушение калибровочной $SO(1,3)$ симметрии, а не группы диффеоморфизмов, по отношению к которой NGR остается ковариантной, так же как и ОТО. Нужно также заметить, что $f(T)$ -модели

допускают ковариантизацию, которая подробнее обсуждалась в [30]– [33]. Это является как проблемой исследуемой нами теории, так как TEGR обладает лоренц-инвариантностью, и отказ от данного свойства — удар по эстетичности описания гравитации, так и ее достоинством, поскольку в ней могут появиться дополнительные динамические степени свободы, которые могут интерпретироваться как, например, темная материя.

1.4. Уравнения движения

Варьируя обобщенное вакуумное действие NGR

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 |e| \left(\frac{a}{4} T^{\alpha\mu\nu} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{b}{2} T^{\alpha\mu\nu} T_{\mu\alpha\nu} - c T^\mu T_\mu \right), \quad (1.34)$$

относительно e_α^a , учитывая вид вариации обратной тетрады $\delta e_\alpha^\mu = -e_b^\mu e_\alpha^a \delta e_\nu^b$ и определителя $\delta |e| = |e| e_\alpha^a \delta e_\alpha^a$, а также вариаций всех трех скаляров

$$\delta (T^{\alpha\mu\nu} T_{\alpha\mu\nu}) = 4 \left(T^{[\mu} e_a^{\alpha]} \partial_\mu \delta e_\alpha^a + T^{[\alpha} T^{\mu]} \delta e_\alpha^a \right), \quad (1.35a)$$

$$\delta (T^{\alpha\mu\nu} T_{\mu\alpha\nu}) = 4 \left(T_{\beta\mu\alpha} T^{[\alpha|\beta|\mu]} \delta e_\alpha^a - T^{[\beta\alpha]} \partial_\beta \delta e_\alpha^a \right), \quad (1.35b)$$

$$\delta (T^\mu T_\mu) = 4 (T_a^{\cdot\mu\alpha} \partial_\mu \delta e_\alpha^a - T_{\mu\nu a} T^{\mu\nu\alpha} \delta e_\alpha^a), \quad (1.35c)$$

получаем

$$\delta S = \frac{1}{\kappa} \int dx^4 |e| \left(\mathfrak{S}_a^{\cdot\mu\alpha} \partial_\mu \delta e_\alpha^a + \frac{1}{2} \mathfrak{T} e_\alpha^a \delta e_\alpha^a - T_{\mu\nu a} \mathfrak{S}^{\mu\nu\alpha} \delta e_\alpha^a \right), \quad (1.36)$$

где \mathfrak{S} — обобщенный суперпотенциал

$$\mathfrak{S}_{\alpha\mu\nu} = \frac{a}{2} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{b}{2} (T_{\mu\alpha\nu} - T_{\nu\alpha\mu}) + c (g_{\alpha\mu} T_\nu - g_{\alpha\nu} T_\mu), \quad (1.37)$$

который по-прежнему антисимметричен по второму и третьему индексам.

После интегрирования по частям первое слагаемое вариации превращается

в $\partial_\mu (|e| \mathfrak{G}_a^{\cdot\alpha\mu}) \delta e_\alpha^{\cdot a} = |e| \left(\partial_\mu \mathfrak{G}_a^{\cdot\alpha\mu} + \tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^\beta \mathfrak{G}_a^{\cdot\alpha\mu} \right) \delta e_\alpha^{\cdot a}$. Вычитая из получившейся конструкции $|e| \tilde{\omega}_{\cdot\mu a}^b \mathfrak{G}_b^{\cdot\alpha\mu}$ и прибавляя его же, мы сведем вариацию (1.36) к

$$\delta S = \frac{1}{\varkappa} \int dx^4 |e| \left(\tilde{\nabla}_\mu \mathfrak{G}_a^{\cdot\alpha\mu} + \tilde{\omega}_{\cdot\mu a}^b \mathfrak{G}_b^{\cdot\alpha\mu} + \frac{1}{2} \mathfrak{T} e_\alpha^{\cdot a} - T_{\mu\nu a} \mathfrak{G}^{\mu\nu\alpha} \right) \delta e_\alpha^{\cdot a}. \quad (1.38)$$

Из (1.16) и (1.18) несложно получить

$$\omega_{\cdot\mu b}^a = \tilde{\omega}_{\cdot\mu b}^a + K_{\cdot\mu b}^a, \quad (1.39)$$

откуда, учитывая (1.26), имеем $\tilde{\omega}_{\cdot\mu b}^a = -K_{\cdot\mu b}^a$, поэтому вариация (1.38) задает полевое уравнение

$$\tilde{\nabla}_\mu \mathfrak{G}_a^{\cdot\alpha\mu} - K_{b\mu a} \mathfrak{G}^{b\alpha\mu} - T_{\mu\nu a} \mathfrak{G}^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} \mathfrak{T} e_\alpha^{\cdot a} = 0.$$

Которое с помощью определения тензора конторсии (1.19) и невырожденности тетрады можно привести к окончательному виду

$$\mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu} \equiv \tilde{\nabla}_\alpha \mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu\alpha} - K_{\alpha\mu\beta} \mathfrak{G}^{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2} \mathfrak{T} \delta_\mu^\nu = 0, \quad (1.40)$$

где $\mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu}$ обозначает трехпараметрическое обобщение тензора Эйнштейна, который задает уравнения гравитационного поля $\mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu} = \varkappa \mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}$, где $\mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}$ — тензор энергии импульса.

2. Сферически симметричные решения и ньютонов предел слабого поля

В рамках этой главы с помощью «удобной» тетрады, которая не порождает антисимметричной части полевых уравнений (1.40), что будет проверено ниже прямым вычислением, находятся вакуумные статические сферически симметричные решения [19] полевых уравнений теории NGR, а также обсуждаем некоторые их свойства. Демонстрируется, что уравнения движения могут быть проинтегрированы явно в элементарных функциях, в отличие от нелинейных обобщенийTEGR типа $f(T)$, где найти таковые пока не удалось [34], а также указываем, какие из решений удовлетворяют классическому ньютоновскому пределу.

2.1. Сферически симметричное пространство-время

Ниже будут решены уравнения движения, в которых тензор энергии-импульса равен нулю

$$\tilde{\nabla}_\alpha \mathfrak{S}_\mu^{\nu\alpha} - K_{\alpha\mu\beta} \mathfrak{S}^{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \mathfrak{T} = 0. \quad (2.1)$$

Метрика статического сферически симметричного пространства-времени, без фиксации явного вида радиальной переменной, задает инвариантный квадрат интервала в виде

$$ds^2 = f^2(r) dt^2 - g^2(r) dr^2 - h^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

По этой метрике находятся символы Кристоффеля второго рода, определяющие связность Леви-Чивиты (1.9)

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^1 &= \frac{ff'}{g^2}, & \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{g'}{g}, & \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{hh'}{g^2}, & \tilde{\Gamma}_{33}^1 &= -\frac{hh' \sin^2 \theta}{g^2}, \\ \tilde{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \tilde{\Gamma}_{01}^0 &= \frac{f'}{f}, & \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{13}^3 = \frac{h'}{h}, & \tilde{\Gamma}_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где координаты t, r, θ, ϕ на многообразии были пронумерованы $0, 1, 2, 3$, а штрихом обозначена производная по r . Поскольку в телепараллельных теориях динамической переменной является тетрада e_{μ}^a , а не метрический тензор, то важным является вопрос о выборе «удобной» тетрады, которая не даст антисимметричной части уравнений движения, поэтому e_{μ}^a будет не диагональной (которая удовлетворительна лишь в ТЕGR), а достаточно громоздкой

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g \sin \theta \cos \phi & h \cos \theta \cos \phi & -h \sin \theta \sin \phi \\ 0 & g \sin \theta \sin \phi & h \cos \theta \sin \phi & h \sin \theta \cos \phi \\ 0 & g \cos \theta & -h \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

которая, как показано в [35], позволяет найти ненулевые компоненты тензора кручения (1.27)

$$T_{\cdot 10}^0 = -T_{\cdot 01}^0 = \frac{f'}{f}, \quad T_{\cdot 12}^2 = T_{\cdot 13}^3 = -T_{\cdot 21}^2 = -T_{\cdot 31}^3 = -\frac{g - h'}{h}. \quad (2.5)$$

Шестипараметрическая свобода выбора явного вида тетрады в телепараллельных теориях подробно обсуждается в [36]. Полностью ковариантные компоненты тензора кручения в виде

$$\begin{aligned} T_{010} &= -T_{001} = ff', & T_{212} &= -T_{221} = h(g - h'), \\ T_{313} &= -T_{331} = h(g - h') \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Единственная ненулевая компонента вектора кручения

$$T_1 = \frac{f'}{f} - 2 \left(\frac{g - h'}{h} \right). \quad (2.7)$$

Можно обратить внимание, что ненулевые компоненты кручения содержат один индекс, относящийся к радиальной переменной, а два других совпадают между собой. Это же справедливо и для компонент тензора конторсии (1.19)

$$\begin{aligned} K_{100} = -K_{001} &= ff', & K_{122} = -K_{221} &= h(g - h'), \\ K_{133} = K_{331} &= h(g - h') \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Компоненты суперпотенциала (1.37) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{010} = -\mathfrak{G}_{001} &= \left(\frac{a + b - 2c}{2} \right) ff' + 2c \left(\frac{g - h'}{h} \right) f^2, \\ \mathfrak{G}_{212} = -\mathfrak{G}_{221} &= \left(\frac{a + b - 2c}{2} \right) h(g - h') + c \left(\frac{f'}{f} \right) h^2, \\ \mathfrak{G}_{313} = -\mathfrak{G}_{331} &= \left[\left(\frac{a + b - 2c}{2} \right) h(g - h') + c \left(\frac{f'}{f} \right) h^2 \right] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При $a = b = c = 1$ эти выражения дают стандартное выражение суперпотенциала в TEGR. Также нужно заметить, что все выражения содержат лишь c и $a + b$, это является следствием того, что аксиальная часть кручения равна нулю в случае выбранной тетрады (2.4), поскольку ненулевые компоненты $T_{\alpha\beta\mu}$ содержат два одинаковых индекса.

Последний объект, необходимый для составления уравнений — это скаляр кручения (1.29)

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \left(\frac{f'}{fg} \right)^2 + (4c - a - b) \left(\frac{g - h'}{hg} \right)^2 - 4c \left(\frac{f'(g - h')}{fg^2h} \right). \quad (2.10)$$

Этот скаляр в случае TEGR при $h(r) = r$ совпадает с результатами, представленными в [35], [37]. Первое слагаемое уравнений движения теории

(2.1) является ковариантной дивергенцией суперпотенциала $\tilde{\nabla}_\alpha \mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu\alpha}$, которая может быть вычислена непосредственно

$$\tilde{\nabla}_\alpha \mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} \mathfrak{G}_\mu^{\cdot\nu\alpha}) - \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\beta \mathfrak{G}_\beta^{\cdot\nu\alpha}. \quad (2.11)$$

Объекты (2.8)–(2.11) позволяют выписать явные выражения для всех компонент уравнений движения:

- Временная компонента

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0^{\cdot 0} &= \left[\left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \frac{f'}{fg^2} + 2c \left(\frac{g-h'}{hg^2} \right) \right]' + \\ &+ \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{2h'}{h} \right) \left[\left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \frac{f'}{fg^2} + 2c \left(\frac{g-h'}{hg^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \mathfrak{T} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

- Радиальная компонента

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1^{\cdot 1} &= \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \frac{f'^2}{f^2g^2} + 2c \left(\frac{f'(g-h')}{hfg^2} \right) - \\ &- (4c-a-b) \left(\frac{h'(h'-g)}{h^2g^2} \right) - 2c \left(\frac{h'f'}{hfg^2} \right) + \frac{1}{2} \mathfrak{T} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

- Угловые компоненты $\mathfrak{G}_2^{\cdot 2}$ и $\mathfrak{G}_3^{\cdot 3}$ тождественны в силу сферической симметрии решаемой задачи, поэтому имеет смысл привести лишь одну из них

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_2^{\cdot 2} &= \left[\left(\frac{a+b-4c}{2} \right) \frac{g-h'}{hg^2} + c \left(\frac{f'}{fg^2} \right) \right]' + \\ &+ \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{2h'-g}{h} \right) \left[\left(\frac{a+b-4c}{2} \right) \frac{(g-h')}{hg^2} + c \left(\frac{f'}{fg^2} \right) \right] - \frac{1}{2} \mathfrak{T} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Важно заметить, что удачный выбор тетрады (2.4) ведет к отсутствию антисимметричной и даже внедиагональной частей уравнений движения.

Поэтому приведенные выше компоненты обобщенного тензора Эйнштейна на \mathfrak{G}_μ^ν являются единственными ненулевыми. Уравнения (2.12)–(2.14) при $h(r) = r$ совпадают с выражениями, полученными в работах [37], [38], посвященных $f(T)$ -теориям при $f(T) = T$, то есть в случаеTEGR. Нужно также отметить тот факт, что среди уравнений движения (2.12)–(2.14) лишь два являются независимыми с силу выполнения тождества Бианки.

2.1.1. Конформно-евклидовы изотропные координаты

Статические сферически симметричные решения можно искать, используя различные способы фиксации радиальной переменной, поэтому ниже радиальная переменная будет выбрана в виде

$$h(r) = g(r)r. \quad (2.15)$$

При таком выборе радиальной переменной метрика принимает форму

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f^2(r)dt^2 - g^2(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.16)$$

Такие координаты часто называют изотропными. В них выражение (2.10) можно переписать в виде

$$g^2 \mathfrak{T} = \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \frac{f'^2}{f^2} + (4c - a - b) \frac{g'^2}{g^2} + 4c \cdot \frac{f'g'}{fg}, \quad (2.17)$$

что позволяет переписать радиальное уравнение (2.13) в гораздо более компактной форме

$$-\frac{2}{r} \left(c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c - a - b}{2} \right) \frac{g'}{g} \right) = \frac{1}{2} \mathfrak{T} g^2. \quad (2.18)$$

Уравнения (2.12) и (2.14) могут быть выписаны соответственно

$$\left[\left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \frac{f'}{f} - 2c \cdot \frac{g'}{g} \right]' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{2}{r} \right) \left[\left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \frac{f'}{f} - 2c \cdot \frac{g'}{g} \right] = -\frac{1}{2} \mathfrak{Z} g^2, \quad (2.19)$$

$$\left[c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c-a-b}{2} \right) \frac{g'}{g} \right]' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{1}{r} \right) \left[c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c-a-b}{2} \right) \frac{g'}{g} \right] = \frac{1}{2} \mathfrak{Z} g^2. \quad (2.20)$$

Приравняв левую часть (2.18) с правой частью (2.20) получим дифференциальное уравнение

$$\left[c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c-a-b}{2} \right) \frac{g'}{g} \right]' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{3}{r} \right) \left[c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c-a-b}{2} \right) \frac{g'}{g} \right] = 0, \quad (2.21)$$

которое допускает интегрирование, которое приводит его к виду

$$c \cdot \frac{f'}{f} + \left(\frac{4c-a-b}{2} \right) \frac{g'}{g} = \frac{q_1}{fgr^3}, \quad (2.22)$$

где q_1 — константа интегрирования. Второе независимое уравнение на функции f и g можно получить, сложив временное уравнение (2.19) с удвоенным угловым (2.20)

$$\left[\left(\frac{a+b+2c}{2} \right) \frac{f'}{f} + (2c-a-b) \frac{g'}{g} \right]' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{2}{r} \right) \left[\left(\frac{a+b+2c}{2} \right) \frac{f'}{f} + (2c-a-b) \frac{g'}{g} \right] = 0. \quad (2.23)$$

После интегрирования данное уравнение может быть переписано в виде

$$\left(\frac{a+b+2c}{2} \right) \frac{f'}{f} + (2c-a-b) \frac{g'}{g} = \frac{q_2}{fgr^2}, \quad (2.24)$$

где q_2 — константа интегрирования.

Таким образом, полученные уравнения (2.22) и (2.24) образовали достаточно простую систему дифференциальных уравнений на функции f и g , которые определяют тетраду (2.4).

2.2. Явные решения уравнений

Для упрощения всех следующих выражений положим $d = \frac{a+b}{2}$. В этом параграфе будут описаны условия разрешимости системы

$$\begin{cases} c \cdot \frac{f'}{f} + (2c - d) \frac{g'}{g} = \frac{q_1}{fgr^3} \\ (c + d) \frac{f'}{f} + (2c - 2d) \frac{g'}{g} = \frac{q_2}{fgr^2} \end{cases} \quad (2.25)$$

при различных значениях параметров a , b , c . Прежде всего заметим, что левые части уравнений отличаются коэффициентами, а правые части степенями r , поэтому нужно выделить случай, когда матрица коэффициентов вырождена, то есть

$$\begin{vmatrix} c & 2c - d \\ c + d & 2c - 2d \end{vmatrix} = d(d - 3c) = 0. \quad (2.26)$$

Поэтому вырожденными являются случаи $d = 0$, $d = 3c$.

- При $d = 0$, уравнения (2.25) неразрешимы, если хотя бы одна из констант q_1 , q_2 отлична от нуля. Если же $q_1 = q_2 = 0$, то два уравнения исследуемой системы совпадают, поэтому вся динамика описывается одним уравнением

$$c \left(\frac{f'}{f} + 2 \cdot \frac{g'}{g} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Откуда либо $c = 0$, что означает произвольность функций f и g , либо $c \neq 0$, и тогда $fg^2 = q_3$.

- При $d = 3c$, уравнения (2.25) неразрешимы, если хотя бы одна из констант q_1, q_2 отлична от нуля. Если же $q_1 = q_2 = 0$, то два уравнения исследуемой системы совпадают, поэтому динамика описывается одним уравнением

$$c \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Откуда либо $c = 0$, что означает, что функции f и g произвольны, что с физической точки зрения малоинтересно, либо $c \neq 0$, и тогда оказывается, что функции пропорциональны $f = q_3 f$.

Если же матрица коэффициентов в уравнении (2.25) невырождена, то можно получить явные выражения для логарифмических производных

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{1}{d(d-3c) \cdot fg} \left[(2c-2d) \cdot \frac{q_1}{r^3} - (2c-d) \cdot \frac{q_2}{r^2} \right], \\ \frac{g'}{g} &= \frac{1}{d(d-3c) \cdot fg} \left[-(c+d) \cdot \frac{q_1}{r^3} + c \cdot \frac{q_2}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Проинтегрировав сумму этих уравнений, получается явное выражение для произведения неизвестных функций

$$fg = q_3 + (c-d) \cdot \frac{q_2}{r} - (c-3d) \cdot \frac{q_1}{r^2}, \quad (2.30)$$

где были переопределены константы $q_2 \rightarrow d(d-3c)q_2$, $q_1 \rightarrow 2d(d-3c)q_1$.

Требование асимптотической плоскостности искомым решений фиксирует $q_3 = 1$. Поэтому выражения (2.29) обращаются в

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{-q_2(2c-d)r + 4(c-d)q_1}{r^3 + q_2(c-d)r^2 - q_1(c-3d)r}, \\ \frac{g'}{g} &= \frac{q_2cr - 2(c+d)q_1}{r^3 + q_2(c-d)r^2 - q_1(c-3d)r}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Эти уравнения, очевидно, интегрируются в элементарных функциях, но при произвольных c, d, q_1, q_2 , выражения очень громоздкие, и от того

мало иллюстративны. Также нужно отметить, что константы интегрирования q_1 , q_2 и q_4 (которая появится после интегрирования любого из уравнений (2.31)), должны быть согласованы, чтобы удовлетворить радиальному уравнению (2.18). Чтобы получить ограничения на параметры d , c , которые позволяют теории иметь ньютоновский потенциал, можно интегрировать (2.31) в пределе $r \rightarrow \infty$ и получить асимптотики метрических функций в виде

$$\begin{aligned} f^2 &= 1 - \frac{2q_2(d-2c)}{r} + O(r^{-2}), \\ g^2 &= 1 - \frac{2q_2c}{r} + O(r^{-2}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Откуда видно, что потенциал $\frac{1}{r}$ воспроизводится при $d \neq 2c$ (а также при ненулевом c), то есть при $a + b \neq 4c$.

2.2.1. Частные случаи

Явный вид решений уравнений (2.31) и их геометрические свойства определяются характером корней многочлена $r^3 + q_2(c-d)r^2 - q_1(c-3d)r$. Свойства некоторых из них исследовались в [39]. Поэтому ниже будут перечислены частные случаи, за исключением патологических $d = 0$ и $d = 3c$, которые упоминали ранее.

- При $c = d$ реализуется случай однопараметрической NGR, частным случаем которой является TEGR, где уравнение (2.30) превращается

в

$$fg = 1 - \frac{M^2}{r^2} \quad \text{при } q_1 = -\frac{M^2}{2d}, \quad (2.33)$$

а второе уравнение системы (2.25) при $q_2 = 2\nu$ в

$$d \frac{f'}{f} = \frac{\nu}{r^2 - M^2}, \quad (2.34)$$

что позволяет найти обе метрические функции

$$f = q_4 \left(\frac{1 - \frac{M}{r}}{1 + \frac{M}{r}} \right)^{\frac{\nu}{2dM}}, \quad g = \frac{1}{q_4} \left(1 - \frac{M}{r} \right)^{1 - \frac{\nu}{2dM}} \left(1 + \frac{M}{r} \right)^{1 + \frac{\nu}{2dM}}. \quad (2.35)$$

Асимптотическая плоскостность накладывает естественные ограничения на константу $q_4 = 1$. При этом оказывается, что полученные решения удовлетворяют радиальному уравнению (2.18) лишь при выполнении условия $\nu^2 - 4M^2d^2 = 0$, что означает, что единственное нетривиальное решение полевых уравнений (2.12)–(2.14) реализуется при $\nu = 2Md$ и задает метрику

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(\frac{1 - \frac{M}{r}}{1 + \frac{M}{r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.36)$$

которая является решением Шварцшильда [40] в изотропных координатах. Подробнее физические свойства сферически симметричных решений в рамках однопараметрической NGR исследовались в работе [41]. В ней авторы также проверяли согласованность этих решений с классическими для ОТО тестами, в частности, такими, как аномальное смещение перигелия, эффект гравитационного замедления времени [42].

- При $d = 2c$ может быть реализовано экзотическое решение, у которого отсутствует ньютоновский потенциал $\frac{1}{r}$. Так система (2.25) может быть удовлетворена функциями $f = 1$ и $g = 1 + \frac{\alpha}{r}$ при $q_1 = 0$ и вспомогательном переобозначении $q_2 = 2c\alpha$. Получившееся решение

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.37)$$

может быть переписано в сферических координатах с радиальной переменной $\rho = r + \alpha$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right)^2} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.38)$$

С точки зрения стороннего наблюдателя в этом пространстве гравитации нет вообще, однако оно отличается необычной геометрией. На пространственной бесконечности $\rho \rightarrow \infty$ метрика стремится к плоской метрике Минковского, а при $\rho \rightarrow \alpha + 0$ компонента метрики $g_{11} \rightarrow -\infty$, то есть пространство обладает цилиндрической топологией $\mathbb{R} \times S^2$.

Исследованию точных решений аксиальной симметрии посвящены работы [43], [44], где были найдены решения аналогичные по своим свойствам метрике вращающейся черной дыры Керра [45].

3. Гравитационные волны

В этой главе исследуются свойства вакуумных уравнений движения в линейном приближении теории возмущений над плоским пространством Минковского. Этот вопрос в рамках NGR впервые рассматривался в [46], где авторы выделили симметричную и антисимметричную части возмущений. С помощью методов теории возмущений из [20], получается система линейных дифференциальных уравнений, из которых устанавливаем, какие степени свободы являются динамическими, какие калибровочными, а какие ограничены связями. Необходимо сделать важное терминологическое уточнение, что динамическими модами будут называться переменные, чье поведение однозначно задается начальными данными задачи Коши, связанными (ограниченными) — те, описание которых не требует начальных данных вообще, а калибровочными — «лишние» переменные, свобода выбора которых не влияет на эволюцию динамической системы, как правило, такими переменными будут те, которые выпали из линейных уравнений движения.

3.1. Возмущения основных объектов

Тетрады пространства-времени $e^a_{\cdot\mu} = \dot{e}^a_{\cdot\mu} + \delta e^a_{\cdot\mu}$, где фон

$$\dot{e}^a_{\cdot\mu} = \delta^a_{\cdot\mu}, \quad (3.1)$$

а возмущения представимы в виде:

$$\begin{aligned}\delta e_{\cdot 0}^{\emptyset} &= \phi, & \delta e_{\cdot i}^{\emptyset} &= \partial_i \beta + u_i, & \delta e_{\cdot 0}^a &= \partial_a \zeta + v_a, \\ \delta e_{\cdot i}^a &= -\psi \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \sigma + \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2} h_{ai},\end{aligned}\tag{3.2}$$

где u_i, v_i, w_i — бездивергентные ($\partial_i u_i = \partial_i v_i = \partial_i w_i = 0$) вектор, а h_{ij} — симметричная ($h_{ij} = h_{ji}$), бесследовая ($h_{ii} = 0$) и бездивергентная ($\partial_i h_{ij} = 0$) матрица. Несложно заметить, что всего имеется шестнадцать независимых переменных. Обратная тетрада пространства-времени $e_a^\mu = \dot{e}_a^\mu + \delta e_a^\mu$, где $\dot{e}_a^\mu = \delta_a^\mu$, а возмущения имеют вид $\delta e_a^\mu = -\dot{e}_b^\mu \delta e_{\cdot \nu}^b \dot{e}_a^\nu$, что в компонентах имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta e_{\cdot 0}^{\emptyset} &= -\phi, & \delta e_{\cdot i}^{\emptyset} &= -\partial_i \zeta + v_i, & \delta e_{\cdot 0}^a &= -\partial_a \beta + u_a, \\ \delta e_{\cdot a}^i &= \psi \delta_{ai} - \partial_{ai}^2 \sigma - \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) - \partial_i c_a - \frac{1}{2} h_{ai}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Метрические возмущения $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ в компонентах имеют вид

$$\begin{aligned}\delta g_{00} &= 2\phi, & \delta g_{0i} &= \partial_i (\beta - \zeta) + u_i - v_i, \\ \delta g_{ij} &= 2\psi \delta_{ij} - 2\partial_{ij}^2 \sigma - \partial_i c_j - \partial_j c_i - h_{ij}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

При этом обратная метрика $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ обладает возмущениями первого порядка

$$\begin{aligned}\delta g^{00} &= -2\phi, & \delta g^{0i} &= \partial_i (\beta - \zeta) + u_i - v_i, \\ \delta g^{ij} &= -2\psi \delta_{ij} + 2\partial_{ij}^2 \sigma + \partial_i c_j + \partial_j c_i + h_{ij}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Полностью ковариантный тензор кручения

$$\begin{aligned}T_{\alpha\mu\nu} &= (\dot{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) (\dot{e}_a^\beta + \delta e_a^\beta) [\partial_\mu (\dot{e}_{\cdot \nu}^a + \delta e_{\cdot \nu}^a) - \partial_\nu (\dot{e}_{\cdot \mu}^a + \delta e_{\cdot \mu}^a)] = \\ &= \dot{T}_{\alpha\mu\nu} + \dot{g}_{\alpha\beta} \dot{e}_a^\beta (\partial_\mu \delta e_{\cdot \nu}^a - \partial_\nu \delta e_{\cdot \mu}^a) + (\delta g_{\alpha\beta} \dot{e}_a^\beta + \dot{g}_{\alpha\beta} \delta e_a^\beta) (\partial_\mu \dot{e}_{\cdot \nu}^a - \partial_\nu \dot{e}_{\cdot \mu}^a).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Нужно также отметить, что во избежание громоздких вычислений было бы полезно зафиксировать калибровку, поэтому прежде всего покажем, как ведут себя все переменные при калибровочных преобразованиях тетрады

$$\hat{e}^a_{\cdot\mu}(\hat{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} e^a_{\cdot\nu}(x) \quad (3.7)$$

как ковариантного вектора при инфинитезимальных диффеоморфизмах

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (3.8)$$

Калибровочное преобразование (3.7) для возмущения возмущений тетрады в случае плоского фона (3.1) приобретает вид

$$\delta \hat{e}^a_{\cdot\mu}(\hat{x}) = \delta e^a_{\cdot\mu}(x) - \partial_\mu \xi^a, \quad (3.9)$$

а в покомпонентном виде

$$\hat{\phi} = \phi - \xi^{0'}, \quad (3.10a)$$

$$\partial_i \hat{\beta} + \hat{u}_i = \partial_i \beta + u_i - \partial_i \xi^0, \quad (3.10b)$$

$$\partial_i \hat{\zeta} + \hat{v}_i = \partial_i \zeta + v_i - \xi^{i'}, \quad (3.10c)$$

$$\begin{aligned} & -\hat{\psi} \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \hat{\sigma} + \epsilon_{aik} (\partial_k \hat{s} + \hat{w}_k) + \partial_i \hat{c}_a + \frac{1}{2} \hat{h}_{ai} = \\ & = -\psi \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \sigma + \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2} h_{ai} - \partial_i \xi^a. \end{aligned} \quad (3.10d)$$

По отношению к пространственным вращениям ξ^0 — скаляр, тогда как пространственная часть калибровочной функции ξ^μ может быть разложена на градиент скаляра и бездивергентный вектор $\xi^i = \partial_i \xi + \tilde{\xi}_i$, что позволяет нам выписать явно форму калибровочных преобразований

$$\hat{\phi} = \phi - \xi^{0'}, \quad \hat{\beta} = \beta - \xi^0, \quad \hat{\zeta} = \zeta - \xi', \quad \hat{v}_i = v_i - \tilde{\xi}'_i, \quad \hat{\sigma} = \sigma - \xi, \quad \hat{c}_i = c_i - \tilde{\xi}_i. \quad (3.11)$$

Это значит, что инвариантными относительно преобразований (3.8) остаются следующие величины

$$\psi, \quad s, \quad u_i, \quad w_i, \quad h_{ij}, \quad \phi - \beta', \quad \zeta - \sigma', \quad v_i - c'_i. \quad (3.12)$$

Таким образом, несложно увидеть, что инвариантными являются четыре скалярных моды, три бездивергентных вектора, и две тензорных степени свободы, а значит среди шестнадцати тетрадных переменных четыре могут быть зафиксированны.

Классическим в телепараллельных теориях выбором калибровки является

$$\sigma = 0, \quad c_i = 0, \quad \beta = \zeta, \quad (3.13)$$

что позволяет выписать компоненты тензора кручения

$$\begin{aligned} T_{00j} &= \partial_j (\zeta' - \phi) + u'_j, & T_{0ij} &= \partial_i u_j - \partial_j u_i, \\ T_{i0j} &= \partial_{ij}^2 \zeta + \delta_{ij} \psi' - \epsilon_{ijk} \partial_k s' - (\epsilon_{ijk} w'_k - \partial_j v_i) - \frac{1}{2} h'_{ij}, \\ T_{ijk} &= -(\delta_{ij} \partial_k \psi - \delta_{ik} \partial_j \psi) + (\epsilon_{ijl} \partial_{lk}^2 s - \epsilon_{ikl} \partial_{lj}^2 s) - \\ &\quad - (\epsilon_{ikl} \partial_j w_l - \epsilon_{ijl} \partial_k w_l) - \frac{1}{2} (\partial_j h_{ik} - \partial_k h_{ij}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вектор кручения

$$\begin{aligned} T_\mu &= T_{\cdot\mu\nu} = (\dot{g}^{\nu\alpha} + \delta g^{\nu\alpha}) \left(\overset{\circ}{T}_{\alpha\mu\nu} + \delta T_{\alpha\mu\nu} \right) = \\ &= \overset{\circ}{T}_\mu + \dot{g}^{\nu\alpha} \delta T_{\alpha\mu\nu} + \delta g^{\nu\alpha} \overset{\circ}{T}_{\alpha\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha} \delta T_{\alpha\mu\nu} + \delta g^{\nu\alpha} \overset{\circ}{T}_{\alpha\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

который в компонентах имеет вид:

$$T_0 = -\Delta \zeta - 3\psi', \quad T_i = \partial_i (\phi - \zeta' - 2\psi) - u'_i + \epsilon_{ijk} \partial_j w_k. \quad (3.16)$$

Скаляр кручения (1.29) с точностью до возмущений первого порядка равен нулю.

Для вычисления ковариантной производной $\tilde{\nabla}_\alpha$, необходимой для дальнейших вычислений, приведем компоненты символов Кристоффеля второго рода

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{00}^0 &= \phi', & \tilde{\Gamma}_{0i}^0 &= \tilde{\Gamma}_{i0}^0 = \partial_i \phi, & \tilde{\Gamma}_{00}^i &= \partial_i \phi - (u'_i - v'_i), \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = -\delta_{ij} \psi' + [\partial_{(i} u_{j)} - \partial_{(i} v_{j)}] + \frac{1}{2} h'_{ij}, \\ \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = -\delta_{ij} \psi' + (\partial_{[i} u_{j]} - \partial_{[i} v_{j]}) + \frac{1}{2} h'_{ij}, \\ \tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{kj}^i = (\delta_{jk} \partial_i \psi - \delta_{ik} \partial_j \psi - \delta_{ij} \partial_k \psi) + \frac{1}{2} (\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Для вычисления ковариантных производных также понадобятся следовые компоненты связности

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\alpha = \phi' - 3\psi', \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^\alpha = \partial_j (\phi - 3\psi).\tag{3.18}$$

3.2. Скалярные и псевдоскалярные возмущения

Суперпотенциал (1.37), компоненты которого вычисляются по тензору кручения (3.14) и метрике (3.4), в скалярном секторе имеет ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{00j} &= \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \partial_j (\zeta' - \phi) - 2c \partial_j \psi, & \mathfrak{S}_{0ij} &= -b \epsilon_{ijk} \partial_k s', \\ \mathfrak{S}_{i0j} &= \left(\frac{a+b}{2} \right) \partial_{ij}^2 \zeta - c \delta_{ij} \Delta \zeta + \delta_{ij} \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) \psi' + \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ijk} \partial_k s', \\ \mathfrak{S}_{ijk} &= -\delta_{i[j} \partial_{k]} [(a+b-4c)\psi + 2c(\phi - \zeta')] + (b-a) \epsilon_{il[j} \partial_{k]}^2 l s - b \epsilon_{jkl} \partial_{i]}^2 s.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Тензор кривизны (1.19), вычисляемый по компонентам тензора кручения (3.14), в скалярном секторе содержит ненулевые компоненты

$$\begin{aligned}K_{00j} &= -K_{j00} = \partial_j (\zeta' - \phi), & K_{i0j} &= -K_{j0i} = -\epsilon_{ijk} \partial_k s', \\ K_{0ij} &= -K_{ji0} = \partial_{ij}^2 \zeta + \delta_{ij} \psi', & K_{ijk} &= (\delta_{jk} \partial_i \psi - \delta_{ji} \partial_k \psi) + \epsilon_{kil} \partial_{lj}^2 s.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Поэтому по (1.40) могут быть найдены ковариантные компоненты обобщенного тензора Эйнштейна

$$\mathfrak{G}_{00} = 2c\Delta\psi + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \Delta(\zeta' - \phi), \quad (3.21a)$$

$$\mathfrak{G}_{i0} = \partial_i \left[\left(\frac{6c-a-b}{2}\right) \psi' + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \Delta\zeta \right], \quad (3.21b)$$

$$\mathfrak{G}_{0i} = 2c\partial_i\psi' + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \partial_i(\zeta'' - \phi'), \quad (3.21c)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{ij} = & \left(\frac{6c-a-b}{2}\right) \psi''\delta_{ij} - [\partial_{ij}^2 - \delta_{ij}\Delta] \left[c\phi + \left(\frac{a+b-4c}{2}\right) \psi \right] + \\ & + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \partial_{ij}^2\zeta' + \left(\frac{a-b}{2}\right) \epsilon_{ijk}\partial_k(s'' - \Delta s). \end{aligned} \quad (3.21d)$$

Симметричные и антисимметричные части обобщенного тензора Эйнштейна $\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \mathfrak{G}_{(\mu\nu)} + \mathfrak{G}_{[\mu\nu]}$ выражаются следующим образом:

$$\mathfrak{G}_{(00)} = \mathfrak{G}_{00} = 2c\Delta\psi + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \Delta(\zeta' - \phi), \quad \mathfrak{G}_{[00]} = 0, \quad (3.22a)$$

$$\mathfrak{G}_{(i0)} = \left(\frac{10c-a-b}{4}\right) \partial_i\psi' + \left(\frac{2c-a-b}{4}\right) \partial_i[\Delta\zeta + \zeta'' - \phi'], \quad (3.22b)$$

$$\mathfrak{G}_{[i0]} = \left(\frac{2c-a-b}{4}\right) \partial_i(-\zeta'' + \Delta\zeta + \phi' + \psi'), \quad (3.22c)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{(ij)} = & \left(\frac{6c-a-b}{2}\right) \psi''\delta_{ij} - [\partial_{ij}^2 - \delta_{ij}\Delta] \left[c\phi + \left(\frac{a+b-4c}{2}\right) \psi \right] + \\ & + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \partial_{ij}^2\zeta', \end{aligned} \quad (3.22d)$$

$$\mathfrak{G}_{[ij]} = \left(\frac{a-b}{2}\right) \epsilon_{ijk}\partial_k(s'' - \Delta s), \quad (3.22e)$$

где $\mathfrak{G}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{\mu\nu} + \mathfrak{G}_{\nu\mu})$ — симметризация, $\mathfrak{G}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\mathfrak{G}_{\mu\nu} - \mathfrak{G}_{\nu\mu})$ — антисимметризация компонент тензора $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$. Уравнения (3.22) являются уравнениями движения, которые в вакуумном случае допускают тривиальное интегрирование, что приводит к системе

$$4c\psi + (2c-a-b)(\zeta' - \phi) = 0, \quad (3.23a)$$

$$(10c - a - b)\psi' + (2c - a - b)(\zeta'' + \Delta\zeta - \phi') = 0, \quad (3.23b)$$

$$(2c - a - b)(\zeta'' - \Delta\zeta - \phi' - \psi') = 0, \quad (3.23c)$$

$$(6c - a - b)\psi'' - (4c - a - b)\Delta\psi + 2c\Delta\phi = 0, \quad (3.23d)$$

$$2c\phi - (4c - a - b)\psi - (2c - a - b)\zeta' = 0, \quad (3.23e)$$

$$(a - b)(s'' - \Delta s) = 0, \quad (3.23f)$$

где уравнения (3.23d) и (3.23e) получены из (3.22d) как множители при δ_{ij} и ∂_{ij}^2 соответственно, а оператор Лапласа в (3.22a) и градиент в (3.22b), (3.22c) и (3.22e) снимались тривиальным образом, так как основной интерес представляет эволюция возмущений лишь во времени, а нетривиальное интегрирование этих уравнений привело бы к возникновению неограниченных в пространстве функций.

Независимое от всех остальных уравнение (3.23f) описывает эволюцию псевдоскаляра s , который задает вращение тетрады, является обычным волновым уравнением за исключением случая $a = b$, когда s становится калибровочной степенью свободы линеаризованной теории.

Оставшиеся пять уравнений (3.23a)–(3.23e) на три переменных ϕ, ψ, ζ могут иметь нетривиальные решения, потому что система этих уравнений не является переопределенной в силу выполнения тождества Бианки $\tilde{\nabla}_\nu \mathfrak{G}_\mu^\nu = 0$. В частности, $\tilde{\nabla}_\nu \mathfrak{G}_0^\nu = 0$ совпадает с (3.23a), которое в свою очередь является полусуммой (3.23b) и (3.23c), тогда как градиент ∂_j от разности (3.23d) и лапласиана (3.23e) воспроизводит пространственные компоненты тождества Бианки $\tilde{\nabla}_\nu \mathfrak{G}_j^\nu = 0$. Из всего этого следует, что из пяти уравнений (3.23a)–(3.23e) независимыми являются лишь три

$$4c\psi + (2c - a - b)(\zeta' - \phi) = 0, \quad (3.24a)$$

$$(2c - a - b)\Delta\zeta + (6c - a - b)\psi' = 0, \quad (3.24b)$$

$$2c\phi - (4c - a - b)\psi - (2c - a - b)\zeta' = 0, \quad (3.24c)$$

где (3.24b) является следствием равенства нулю (3.21b), или, как сказано выше, равенства нулю разности (3.23d) и лапласиана (3.23e).

В общем случае мы предполагаем, что параметры теории удовлетворяют системе неравенств

$$a + b \neq 0, \quad 2c - a - b \neq 0, \quad 6c - a - b \neq 0. \quad (3.25)$$

Сумма (3.24a) и (3.24c) дает

$$(a + b)(\phi + \psi) = 0. \quad (3.26)$$

Это уравнение задает простую связь $\phi = -\psi$, которая сведет два остальных уравнения (3.24b) и (3.24c) к

$$\begin{aligned} (2c - a - b)\zeta' &= (6c - a - b)\phi, \\ (2c - a - b)\Delta\zeta &= (6c - a - b)\phi'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Эти уравнения легко сводятся к виду

$$\zeta'' - \Delta\zeta = 0, \quad \phi = -\psi = \frac{2c - a - b}{6c - a - b}\zeta'. \quad (3.28)$$

Таким образом ζ — динамическая степень свободы, задающая преобразование Лоренца, поведение которой наблюдается через конформные множители в метрике $\phi = -\psi$.

Рассмотрим частные случаи, когда одно из неравенств (3.25) переходит в равенство

- При $a + b = 0$ и $c \neq 0$ система уравнений (3.24) превращается в

$$2\psi + \zeta' - \phi = 0, \quad (3.29a)$$

$$\Delta\zeta + 3\psi' = 0, \quad (3.29b)$$

$$\phi - 2\psi - \zeta' = 0, \quad (3.29c)$$

среди которых лишь два независимы, поэтому ψ можно считать калибровочной модой, а ϕ и ζ — переменными, связанными с ψ уравнениями

$$\Delta\phi = 2\Delta\psi - 3\psi'', \quad \Delta\zeta = -3\psi'. \quad (3.30)$$

В этом случае метрика калибровочно свободна в силу отсутствия динамических переменных.

- При $2c = a + b \neq 0$ система (3.24) приобретает простой вид

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad \phi - \psi = 0. \quad (3.31)$$

То есть $\psi = \phi = 0$, а ζ произвольна, то есть является калибровочной степенью свободы.

- При $6c = a + b \neq 0$ система (3.24)

$$\psi - \zeta' + \phi = 0, \quad \Delta\zeta = 0, \quad \phi + \psi + 2\zeta' = 0, \quad (3.32)$$

что с помощью элементарных преобразований можно свести к уравнениям $\psi + \phi = 0$, $\zeta' = 0$, $\Delta\zeta = 0$. Это значит, что $\zeta = 0$, а $\phi = -\psi$, то есть ϕ и ψ пропорциональны, но при этом никак динамически не ограничены, что означает калибровочную свободу конформного сектора метрики.

3.3. Векторные и псевдовекторные возмущения

Суперпотенциал (1.37), компоненты которого вычисляются по тензору кручения (3.14) и метрике (3.4), в векторном секторе имеет ненулевые

КОМПОНЕНТЫ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{00j} &= \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) u'_j + c\epsilon_{jlm}\partial_l w_m, \\
\mathfrak{S}_{0ij} &= a\partial_{[i}u_{j]} - b\partial_{[i}v_{j]} - b\epsilon_{ijk}w'_k, \\
\mathfrak{S}_{i0j} &= b\partial_{[i}u_{j]} + \left(\frac{b\partial_i v_j + a\partial_j v_i}{2} \right) + \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ijk}w'_k, \\
\mathfrak{S}_{ijk} &= 2c\delta_{i[j}u'_{k]} + [(b-a)\epsilon_{il[j}\partial_{k]} - b\epsilon_{jkl}\partial_i - 2c\delta_{i[j}\epsilon_{k]nl}\partial_n] w_l.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Тензор конторсии (1.19), вычисляемый по компонентам тензора кручения (3.14), содержит в векторном секторе следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned}
K_{00j} &= -K_{j00} = u'_j, \quad K_{i0j} = -K_{j0i} = \partial_{[i}u_{j]} - \partial_{[i}v_{j]} - \epsilon_{ijk}w'_k, \\
K_{0ij} &= -K_{j0i} = \partial_{[i}u_{j]} + \partial_{(i}v_{j)}, \quad K_{ijk} = \epsilon_{kil}\partial_j w_l.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Поэтому по (1.40) ковариантные компоненты обобщенного тензора Эйнштейна принимают вид:

$$\mathfrak{G}_{00} = 0, \tag{3.35a}$$

$$\mathfrak{G}_{i0} = \Delta \left(\frac{bu_i - av_i}{2} \right) - \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ilm}\partial_l w'_m, \tag{3.35b}$$

$$\mathfrak{G}_{0i} = \Delta \left(\frac{au_i - bv_i}{2} \right) - (c-b)\epsilon_{ilm}\partial_l w'_m - \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) u''_i \tag{3.35c}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\partial_i [(2c-b)u'_j - bv'_j] + \partial_j [bu'_i - av'_i] \right) + \\
&+ \left(\frac{a-b}{2} \right) \epsilon_{ijk} (w''_k - \Delta w_k) - \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ikl}\partial_{jk}^2 w_l - (c-b)\epsilon_{jkl}\partial_{ik}^2 w_l.
\end{aligned} \tag{3.35d}$$

Симметричная и антисимметричная части обобщенного тензора Эйнштейна $\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \mathfrak{G}_{(\mu\nu)} + \mathfrak{G}_{[\mu\nu]}$

$$\mathfrak{G}_{(00)} = 0, \quad \mathfrak{G}_{[00]} = 0, \tag{3.36a}$$

$$\mathfrak{G}_{(i0)} = \left(\frac{a+b}{4} \right) \Delta (u_i - v_i) + \left(\frac{2c-a-b}{4} \right) (u''_i - \epsilon_{ilm}\partial_l w'_m), \tag{3.36b}$$

$$\mathfrak{G}_{[i0]} = \left(\frac{b-a}{4}\right) \Delta(u_i + v_i) + \left(\frac{2c+a-3b}{4}\right) \epsilon_{ilm} \partial_l w'_m + \left(\frac{a+b-2c}{4}\right) u''_i, \quad (3.36c)$$

$$\mathfrak{G}_{(ij)} = c \partial_{(i} u'_{j)} - \left(\frac{a+b}{2}\right) \partial_{(i} v'_{j)} + \left(\frac{a+b-2c}{2}\right) \epsilon_{kl(i} \partial_{j)k}^2 w_l, \quad (3.36d)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{[ij]} = & (c-b) \partial_{[i} u'_{j]} - \left(\frac{b-a}{2}\right) \partial_{[i} v'_{j]} + \\ & + \left(\frac{a-b}{2}\right) \epsilon_{ijk} (w''_k - \Delta w_k) + \left(\frac{2c+a-3b}{2}\right) \epsilon_{kl[i} \partial_{j]k}^2 w_l. \end{aligned} \quad (3.36e)$$

Уравнения (3.36d) и (3.36e) имеют достаточно простую структуру $\partial_{(i} \mathbb{S}_i) = 0$ и $\partial_{[i} \mathbb{S}_i] = 0$, и далее приводятся их тривиальные решения $\mathbb{S}_i = 0$, где будут использованы замены $w_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \chi_k$, где $\partial_i \chi_i = 0$, и поэтому вакуумные уравнения имеют вид

$$(2c - a - b)u''_i + (a + b)\Delta(u_i - v_i) + (2c - a - b)\Delta\chi'_i = 0, \quad (3.37a)$$

$$(2c - a - b)u''_i + (a - b)\Delta(u_i + v_i) + (2c + a - 3b)\Delta\chi'_i = 0, \quad (3.37b)$$

$$2cu'_i - (a + b)v'_i + (2c - a - b)\Delta\chi_i = 0, \quad (3.37c)$$

$$2(c - b)u'_i + (a - b)v'_i + 2(a - b)\chi''_i + (2c - a - b)\Delta\chi_i = 0. \quad (3.37d)$$

Получилось четыре векторных уравнения на три векторных переменных u_i , v_i , χ_i . Но система (3.37) не является переопределенной в силу выполнения тождества Бианки, независимыми из них являются лишь три. Так, производная по времени от разности (3.37a) и (3.37b) равна лапласиану разности (3.37c) и (3.37d).

Поэтому (3.37d) отбрасывается, а вместо (3.37a) и (3.37b) рассматриваем их полусумму и полуразность. Поэтому три независимых уравнения векторного сектора имеют вид

$$(2c - a - b)u''_i + \Delta\left(au_i - bv_i + 2(c - b)\chi'_i\right) = 0, \quad (3.38a)$$

$$bu_i - av_i + (b - a)\chi'_i = 0, \quad (3.38b)$$

$$2cu'_i - (a + b)v'_i + (2c - a - b)\Delta\chi_i = 0. \quad (3.38c)$$

Разность производной по времени от (3.38c) и лапласиана (3.38b) задает соотношение вида

$$2(c - b)\Delta\chi'_i = -2cu''_i + (a + b)v''_i + \Delta(bu_i - av_i), \quad (3.39)$$

что, будучи подставленным в (3.38a), даст волновое уравнение на метрические возмущения

$$(a + b)\square(u_i - v_i) = 0. \quad (3.40)$$

Поэтому естественно возникает замена переменных

$$\mathcal{M}_i = \frac{u_i - v_i}{2}, \quad \mathcal{L}_i = \frac{u_i + v_i}{2}, \quad (3.41)$$

которая превращает систему (3.38) в

$$(a + b)\square\mathcal{M}_i = 0, \quad (3.42a)$$

$$(a + b)\mathcal{M}_i - (a - b)(\mathcal{L}_i + \chi'_i) = 0, \quad (3.42b)$$

$$(a + b + 2c)\mathcal{M}'_i - (a + b - 2c)(\mathcal{L}'_i + \Delta\chi_i) = 0. \quad (3.42c)$$

В общем случае считается, что параметры теории удовлетворяют системе неравенств

$$a + b \neq 0, \quad a - b \neq 0, \quad 2c - a - b \neq 0. \quad (3.43)$$

Первое из уравнений (3.42) описывает поведение динамического вектора \mathcal{M}_i . Исключая из оставшихся двух уравнений \mathcal{L}' , получим динамическое уравнение

$$\square\chi_i = \frac{2b(a + b) - 4ac}{(a - b)(a + b - 2c)}\mathcal{M}'_i, \quad (3.44)$$

которое является неоднородным волновым уравнением на χ_i . Таким образом, имеется два динамических бездивергентных вектора \mathcal{M} и χ_i , то есть четыре степени свободы и связь

$$\mathcal{L}_i = \frac{a+b}{a-b} \mathcal{M}_i - \chi'_i. \quad (3.45)$$

Частные случаи, когда некоторые неравенства (3.43) обращаются в равенства:

- при $a = b = c \neq 0$ получается случай эйнштейновской теории относительности, когда переменные \mathcal{L}_i и χ_i являются калибровочными, а $\mathcal{M}_i = 0$;
- случай $a = b \neq 0$ и $2c \neq a + b$ также фиксирует $\mathcal{M}_i = 0$, но на Лоренцев сектор наложена связь $\mathcal{L}'_i = -\Delta\chi_i$;
- в ситуации при $2c = a + b$ и $a \neq \pm b$ результаты схожи: $\mathcal{M}_i = 0$ (как тривиальное решение уравнения Пуассона), а оставшиеся два вектора связаны $\mathcal{L}_i = -\chi'_i$;
- в экзотическом сценарии $a + b = 0$ первое из уравнений (3.42) вырождается в тождество, а второе и третье уравнения дают $\mathcal{M}'_i = \square\chi_i$ со связью $\mathcal{L}_i = -\chi'_i$. Что значит, что вектор χ_i — калибровочный, а \mathcal{M}_i и \mathcal{L}_i задаются вышеуказанными связями;
- при $a = b = 0$, и $c \neq 0$ имеется два калибровочно свободных вектора \mathcal{M}_i и \mathcal{L}_i и связь $\Delta\chi_i = -\mathcal{M}'_i - \mathcal{L}'_i$;
- наконец при ненулевых a и b , и $a + b = c = 0$ вектор \mathcal{M}_i обладает калибровочной свободой, а на оставшуюся пару наложена единственная связь $\mathcal{L}_i = -\chi'_i$.

3.4. Тензорные возмущения

Суперпотенциал (1.37), компоненты которого вычисляются по тензору кручения (3.14) и метрике (3.4), в тензорном секторе имеет следующие ненулевые компоненты

$$\mathfrak{S}_{i0j} = -\left(\frac{a+b}{4}\right) h'_{ij}, \quad \mathfrak{S}_{ijk} = \left(\frac{a+b}{4}\right) (\partial_k h_{ji} - \partial_j h_{ki}). \quad (3.46)$$

Тензор конторсии (1.19) вычисляемый по компонентам тензора кручения (3.14) содержит следующие ненулевые компоненты в тензорном секторе

$$K_{0ij} = -K_{ji0} = -\frac{1}{2} h'_{ij}, \quad K_{ijk} = -\frac{1}{2} (\partial_i h_{jk} - \partial_k h_{ji}). \quad (3.47)$$

Поэтому по (1.40) компоненты обобщенного тензора Эйнштейна имеют вид

$$\mathfrak{E}_0^{\cdot 0} = 0, \quad \mathfrak{E}_i^{\cdot 0} = 0, \quad \mathfrak{E}_0^{\cdot j} = 0, \quad \mathfrak{E}_i^{\cdot j} = -\left(\frac{a+b}{4}\right) (h''_{ij} - \Delta h_{ij}). \quad (3.48)$$

При этом видно, что антисимметричная часть тензора Эйнштейна отсутствует.

Таким образом, две спиновые тензорные моды — это естественные моды, удовлетворяющие волновым уравнениям при $a + b \neq 0$. В пространственно однородной и изотропной космологии гравитационные волны не имеют источника. Они отличаются от случая волн в ОТО лишь масштабным множителем $a + b$, а в случае, когда он обращается в нуль, вообще не существуют, а h_{ij} являются калибровочными степенями свободы. Причина этого в том, что при $a + b = 0$ теория (1.32) зависит только от векторной и аксиальной частей кручения. Нужно также отметить, что гравитационные волны в NGR и их энергетические и поляризационные свойства исследовались в [47], [48].

3.5. Подсчет степеней свободы

В этом разделе подсчитывается количество степеней свободы в каждой из моделей, в которую может превращаться исходная линеаризованная теория. Квадратичная по скоростям переменных форма в скаляре кручения (1.29) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = & \left(\frac{a+b}{8} \right) h'_{ij}{}^2 - \frac{3}{2} (6c - a - b) \psi'^2 + \\ & + \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \left(u_i'^2 + \partial_i \zeta'^2 \right) + (a - b) \left(w_i'^2 + \partial_i s'^2 \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Из двенадцати переменных в используемой калибровке девять появились выше: две спиновые поляризации с множителем $(a + b)$, три вращательные моды с множителем $(a - b)$, три степени свободы, отвечающие за лоренцевы преобразования с множителем $(2c - a - b)$ и одна конформная степень свободы с множителем $(6c - a - b)$. Нули этих множителей задают различные частные случаи исследуемой теории. Выражение (3.49) позволяет наложить дополнительные ограничения на параметры a, b, c , которые исключают переменные с отрицательными кинетическими энергиями — духовые моды: $a \geq \max\{b, -b\}$, $2c \geq a + b$.

В случае теории относительности Эйнштейна квадратичная форма (3.49) принимает вид

$$\mathfrak{K}_{GR} = \frac{1}{4} h'_{ij}{}^2 - 6\psi'^2, \quad (3.50)$$

который состоит из разности кинетической энергии гравитационных волн и кинетической энергии конформной моды ψ . Однако в ОТО это не является проблемой, поскольку конформный множитель не является динамическим до тех пор пока, масса гравитона равна нулю. Однако в массивных

обобщениях гравитационных теорий [49] она становится динамической и появляется в виде «духов» Боульвара – Дезера.

Ниже будут рассмотрены результаты подсчета и классификации степеней свободы для всевозможных моделей теории. Самый простой случай, не требующий описания, определяется равенством $a = b = c = 0$. Девять же нетривиальных моделей являются линейным порядком теории возмущений уравнений (2.1) вблизи тривиального решения — пространства Минковского.

Отметим, что было использовано стандартное космологическое разложение тетрады (3.2), где векторная часть пространственных вращений выражена $w_i = \epsilon_{ijk} \partial_j w_k$, а пространственно-временные вектора u_i и v_i были заменены на их полуразность $\mathcal{M}_i = \frac{u_i - v_i}{2}$ и полусумму $\mathcal{L}_i = \frac{u_i + v_i}{2}$. Отметим, что после фиксации калибровки (3.13) имеется шесть метрических

$$\phi, \psi, \mathcal{M}_i, h_{ij}, \quad (3.51)$$

и шесть лоренцевых переменных

$$\zeta, s, \mathcal{L}_i, \chi_i. \quad (3.52)$$

Общие свойства моделей зависят от ограничений, накладываемых на параметры a, b, c теории. Ниже будут рассмотрены четыре линейных ограничения на параметры:

$$\text{I) } 2c - a - b = 0, \quad \text{II) } a - b = 0, \quad \text{III) } a + b = 0, \quad \text{IV) } 6c - a - b = 0. \quad (3.53)$$

На тензорные возмущения (3.48) непосредственно оказывает влияние ограничение III, на псевдоскаляр (3.23f) — II, поведение остальных скаляров (3.23a)–(3.23e) определяется всеми ограничениями кроме II, а поведение

всех векторов — ограничениями I, II, III. Возможные нетривиальные варианты сводятся к одному из случаев, приведенных в таблице 3.1.

Тип	Модель	Динамические моды	Связи	Калибровки
1	Общая	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \chi_i, \zeta, s$	$\mathcal{L}_i, \phi, \psi$	—
2	I	h_{ij}, s	$\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \phi, \psi$	χ_i, ζ
3	II	h_{ij}, ζ	$\mathcal{M}_i, \chi_i, \phi, \psi$	\mathcal{L}_i, s
4	III	половина \mathcal{M}_i, s	половина $\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \phi, \zeta$	h_{ij}, χ_i, ψ
5	IV	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \chi_i, s$	$\mathcal{L}_i, \phi + \psi, \zeta$	$\phi - \psi$
6	I и II	h_{ij}	$\mathcal{M}_i, \phi, \psi$	$\mathcal{L}_i, \chi_i, \zeta, s$
7	II и IV	h_{ij}	$\mathcal{M}_i, \chi_i, \phi + \psi, \zeta$	$\mathcal{L}_i, \phi - \psi, s$
8	II и III	—	χ_i, ϕ, ζ	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \psi, s$
9	I и III и IV	s	\mathcal{L}_i	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i, \phi, \psi, s$

Таблица 3.1: Классификация степеней свободы теории.

3.5.1. $|a| \neq |b|, 2c \neq a + b, 6c \neq a + b$

Наиболее общая модель, для которой не выполняется ни одно из равенств (3.53), описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \square \zeta = 0, & \phi = -\psi = \frac{2c-a-b}{6c-a-b} \cdot \zeta', & \square s = 0, & \square \mathcal{M}_i = 0, \\ \square \chi_i = \frac{2b(a+b)-4ac}{(a-b)(a+b-2c)} \cdot \mathcal{M}'_i, & \mathcal{L}_i = \left(\frac{a+b}{a-b}\right) \mathcal{M}_i - \chi'_i, & \square h_{ij} = 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

где $\square = \partial_t^2 - \Delta$ — волновой оператор Даламбера. Видно, что в данной модели отсутствует дополнительная калибровочная свобода, поэтому переменные $\zeta, s, \mathcal{M}_i, \chi_i, h_{ij}$ можно считать динамическими, в то время как $\phi, \psi, \mathcal{L}_i$ ограничены связями. Их можно считать вторичными, появляю-

щимися из четырех калибровочных диффеоморфизмов [50].

Эта модель может оказаться достаточно перспективной, потому что в ней, как и в ОТО, помимо четырех метрических степеней свободы, зафиксированных калибровкой, возникают связи еще на четырех переменных. Если наложить дополнительные ограничения на параметры теории $a \geq \max\{b, -b\}$ и $c \geq \frac{a+b}{2}$, то все кинетические слагаемые в (3.49), кроме конформной моды ψ , будут давать положительный вклад, что может избавить теорию от духов. При этом, если параметры не слишком далеки от TEGR, то $2c - a - b < 6c - a - b$, а значит, учитывая пропорциональность $\zeta' \propto \partial\zeta$, в силу выполнения первого уравнения системы (3.54), и учитывая вторую связь, получаем $\psi' \propto (2c - a - b)\partial\zeta'$. А это значит, что кинетическая энергия конформного множителя ψ на много меньше кинетической энергии слагаемого $\partial_j\zeta$, что означает положительность квадратичной формы скоростей (3.54) при усреднении по времени.

Это значит, что жизнеспособной можно считать не только модель $2c = a + b$, как было показано в оригинальной работе [3].

3.5.2. $|a| \neq |b|$, $2c = a + b$

Плоскость $2c = a + b$ в пространстве параметров, содержащая в себе случай ОТО, задает модель, описываемую системой уравнений

$$\phi = \psi = 0, \quad \square s = 0, \quad \mathcal{M}_i = 0, \quad \mathcal{L}_i = -\chi'_i, \quad \square h_{ij} = 0. \quad (3.55)$$

Метрические переменные ведут себя аналогично TEGR: две динамические степени свободы h_{ij} и четыре связи $\phi = \psi = 0$ и $\mathcal{M}_i = 0$. Лоренцевы переменные имеют один динамический скаляр s , один калибровочный ζ , а из

двух оставшихся векторов \mathcal{L}_i и χ_i один может считаться калибровочным, а поведение второго ограничено связью с первым. Таким образом, в данной модели имеется три динамических моды, три калибровочные и шесть переменных, ограниченных связями. Нужно отметить, что, поскольку лоренцевы моды не влияют на метрику, их поведение ненаблюдаемо. Этот факт привлекает многих исследователей в данной модели, однако есть аргументы [51] и против нее, утверждающие, что дополнительная калибровочная свобода может не сохраниться в нелинейных порядках.

3.5.3. $a = b \neq 0, a \neq c, a \neq 3c$

В рамках этой модели $a = b$ подобно случаю ОТО, но статические сферически симметричные решения отличаются. Возмущения удовлетворяют уравнениям

$$\square\zeta = 0, \quad \phi = -\psi = \frac{c-a}{3c-a} \cdot \zeta', \quad \mathcal{M}_i = 0, \quad \Delta\chi_i = -\mathcal{L}'_i, \quad \square h_{ij} = 0. \quad (3.56)$$

Видно, что из двенадцати переменных теории три динамические h_{ij}, ζ , на шесть $\phi, \psi, \mathcal{M}_i, \chi_i$ наложены связи, и три s, \mathcal{L}_i — калибровочные. Нужно отметить, что из-за пропорциональности ψ и ζ' лоренцева переменная ζ теперь наблюдаема в метрике.

3.5.4. $a = -b \neq 0, c \neq 0$

При выполнении равенства III системы (3.53) уравнения движения

$$\Delta\phi = -3\psi'' + 2\Delta\psi, \quad \Delta\zeta = -3\psi', \quad \square s = 0, \quad \mathcal{M}'_i = \square\chi_i, \quad \mathcal{L}_i = -\chi'_i, \quad (3.57)$$

задают теорию, сильно отличающуюся от ТЕGR. В этой модели калибровочными являются переменные h_{ij}, χ_i, ψ . Они фиксируют эволюцию скаляров ϕ и ζ и вектора \mathcal{L}_i . Тот факт, что уравнение на \mathcal{M}_i — ОДУ первого порядка, значит, что для определения его поведения нужно одно данное Коши, поэтому половину вектора можно считать динамической, а значит начальная скорость уже не является произвольной и задается уравнением.

3.5.5. $6c = a + b, |a| \neq |b|$

Еще один вариант реализуется при выполнении равенства IV системы (3.53). Данная модель по своим свойствам далека от ОТО, потому что при $6c = a + b$ скорость конформной моды пропадает из квадратичной формы (3.49). Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \zeta = 0, & \phi + \psi = 0, & \square s = 0, & \square \mathcal{M}_i = 0, \\ \square \chi_i = \left(\frac{a-3b}{b-a}\right) \mathcal{M}'_i, & \mathcal{L}_i = \left(\frac{a+b}{a-b}\right) \mathcal{M}_i - \chi'_i, & \square h_{ij} = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Среди метрических переменных лишь \mathcal{M}_i, h_{ij} — динамические. Так же динамическими являются и три лоренцевы переменные s, χ_i . Единственной калибровочной степенью свободы можно назвать $\phi - \psi$, тогда как переменные ζ, \mathcal{L}_i и комбинация $\phi + \psi$ ограничены связями.

3.5.6. $a = b = c \neq 0$

Данная однопараметрическая модель — это ТЕGR, она может отличаться от ОТО лишь перерастяжением ньютоновской гравитационной постоянной, и описывается системой

$$\phi = \psi = 0, \quad \mathcal{M}_i = 0, \quad \square h_{ij} = 0. \quad (3.59)$$

Эта модель динамически тождественна ОТО, поэтому имеется две динамические степени свободы h_{ij} и четыре связи $\mathcal{M}_i, \phi, \psi$, тогда как весь лоренцев сектор является калибровочным.

3.5.7. $a = b = 3c \neq 0$

Данная модель отлична от ОТО, но из уравнений

$$\zeta = 0, \quad \phi = -\psi, \quad \mathcal{M}_i = 0, \quad \Delta\chi_i = -\mathcal{L}'_i, \quad \square h_{ij} = 0, \quad (3.60)$$

видно, что динамика тензорного сектора аналогична теории относительности, но шесть связей $\psi + \phi, \mathcal{M}_i, \zeta, \chi_i$ и четыре калибровочных степени свободы $\phi - \psi, s, \mathcal{L}_i$ устроены отличным от модели (3.5.6) образом.

3.5.8. $a = b = 0, c \neq 0$

В этой экзотической модели, согласно уравнениям движения

$$\Delta\phi = -3\psi'' + 2\Delta\psi, \quad \Delta\zeta = -3\psi', \quad \Delta\chi_i = -\mathcal{M}'_i - \mathcal{L}'_i, \quad (3.61)$$

динамические моды отсутствуют вообще, а значит все двенадцать степеней свободы делятся на четыре моды ϕ, ζ, χ_i , ограниченные связями, и восемь калибровочных переменных.

3.5.9. $a + b = c = 0$

Наконец, последний вариант сводит уравнения движения к простой системе

$$\square s = 0, \quad \mathcal{L}_i = -\chi'_i, \quad (3.62)$$

где динамической является лишь лоренцев псевдоскаляр s . Поведение вектора \mathcal{L}_i ограничено единственной связью, тогда как все остальные девять

степеней свободы, в том числе все метрические, остаются чисто калибровочными.

4. Космологические возмущения пространственно плоской метрики FLRW

В данной главе, в соответствии со статьей [21], будут описаны возмущения космологических уравнений гравитационного поля (1.40) в случае, когда материя представлена идеальной жидкостью в предположении, что фоновое пространство-время задается пространственно плоской метрикой Фридмана с конформным временем [52], [53]. Однородные и изотропные модели вселенной в рамках различных реализаций NGR и их всевозможные космологические приложения ранее исследовались в [54]– [56]. Космологические возмущения в нелинейных $f(T)$ -обобщениях телепараллельного эквивалента ОТО изучались как в пространственно плоских пространствах [57], так и в пространствах постоянной кривизны [58].

4.1. Возмущения

Тетрада, как динамическая переменная, есть $e^a_{\cdot\mu} = \dot{e}^a_{\cdot\mu} + \delta e^a_{\cdot\mu}$, где фон теперь динамичен и имеет вид

$$\dot{e}^a_{\cdot\mu} = \alpha(t)\delta^a_{\cdot\mu}, \quad (4.1)$$

а возмущения представлены формулами

$$\begin{aligned} \delta e^0_{\cdot 0} &= \alpha(t)\phi, & \delta e^0_{\cdot i} &= \alpha(t)(\partial_i\beta + u_i), & \delta e^a_{\cdot 0} &= \alpha(t)(\partial_a\zeta + v_a), \\ \delta e^a_{\cdot i} &= \alpha(t) \left[-\psi\delta_{ai} + \partial_{ai}^2\sigma + \epsilon_{aik}(\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2}h_{ai} \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где u_i, v_i, w_i — бездивергентные ($\partial_i u_i = \partial_i v_i = \partial_i w_i = 0$) вектор, а h_{ij} — симметричная ($h_{ij} = h_{ji}$), бесследовая ($h_{ii} = 0$) и бездивергентная ($\partial_i h_{ij} = 0$) матрица. Обратная же тетрада представляется равенством $e_a^\mu = \dot{e}_a^\mu + \delta e_a^\mu$, где фон

$$\dot{e}_a^\mu = \frac{\delta_a^\mu}{\alpha(t)}, \quad (4.3)$$

а возмущения могут быть вычислены по формуле $\delta e_a^\mu = -\dot{e}_b^\mu \dot{e}_a^\nu \delta e_{\nu}^b$, что в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} \delta e_{\dot{\phi}}^0 &= -\frac{\phi}{\alpha(t)}, & \delta e_{\dot{\phi}}^i &= -\frac{\partial_i \zeta + v_i}{\alpha(t)}, & \delta e_a^0 &= -\frac{\partial_a \beta + u_a}{\alpha}, \\ \delta e_a^i &= \frac{\psi \delta_{ai} - \partial_{ai}^2 \sigma - \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) - \partial_i c_a - \frac{1}{2} h_{ai}}{\alpha(t)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Метрика $g_{\mu\nu} = \alpha(t)^2 \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, а компоненты возмущений

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= 2\alpha(t)^2 \phi, & \delta g_{0i} &= \alpha(t)^2 (\partial_i (\beta - \zeta) + u_i - v_i), \\ \delta g_{ij} &= \alpha(t)^2 (2\psi \delta_{ij} - 2\partial_{ij}^2 \sigma - \partial_i c_j - \partial_j c_i - h_{ij}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

И при этом обратная метрика $g^{\mu\nu} = \alpha^{-2}(t) \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, где ее возмущения

$$\begin{aligned} \delta g^{00} &= -\frac{2\phi}{\alpha(t)^2}, & \delta g^{0i} &= \frac{\partial_i (\beta - \zeta) + u_i - v_i}{\alpha(t)^2}, \\ \delta g^{ij} &= \frac{-2\psi \delta_{ij} + 2\partial_{ij}^2 \sigma + \partial_i c_j + \partial_j c_i + h_{ij}}{\alpha(t)^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Полностью ковариантный тензор кручения с точностью до первого порядка малости по возмущениям имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu} &= (\dot{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) (\dot{e}_a^\beta + \delta e_a^\beta) [\partial_\mu (\dot{e}_{\nu}^a + \delta e_{\nu}^a) - \partial_\nu (\dot{e}_{\mu}^a + \delta e_{\mu}^a)] = \\ &= \dot{T}_{\alpha\mu\nu} + \dot{g}_{\alpha\beta} \dot{e}_a^\beta (\partial_\mu \delta e_{\nu}^a - \partial_\nu \delta e_{\mu}^a) + (\delta g_{\alpha\beta} \dot{e}_a^\beta + \dot{g}_{\alpha\beta} \delta e_a^\beta) (\partial_\mu \dot{e}_{\nu}^a - \partial_\nu \dot{e}_{\mu}^a). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Вектор кручения представим следующим образом

$$\begin{aligned} T_\mu &= T_{\cdot\mu\nu}^\nu = (\dot{g}^{\nu\alpha} + \delta g^{\nu\alpha}) (\dot{T}_{\alpha\mu\nu} + \delta T_{\alpha\mu\nu}) = \\ &= \dot{T}_\mu + \dot{g}^{\nu\alpha} \delta T_{\alpha\mu\nu} + \delta g^{\nu\alpha} \dot{T}_{\alpha\mu\nu} = 3H \delta_{\mu 0} + \frac{1}{\alpha^2} \eta^{\nu\alpha} \delta T_{\alpha\mu\nu} + \delta g^{\nu\alpha} \dot{T}_{\alpha\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Прежде чем приступить к вычислениям компонент всех тензорных объектов, приведем вид преобразований тетрады (3.7) при диффеоморфизмах (3.8) над фоном (4.1)

$$\delta \hat{e}^a{}_{\mu}(\hat{x}) = \delta e^a{}_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \xi^{\nu} \hat{e}^a{}_{\nu}(x), \quad (4.9)$$

или в покомпонентном виде

$$\hat{\phi} = \phi - \xi^{0'} - H\xi^0, \quad (4.10a)$$

$$\partial_i \hat{\beta} + \hat{u}_i = \partial_i \beta + u_i - \partial_i \xi^0, \quad (4.10b)$$

$$\partial_i \hat{\zeta} + \hat{v}_i = \partial_i \zeta + v_i - \xi^{i'}, \quad (4.10c)$$

$$\begin{aligned} & - \hat{\psi} \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \hat{\sigma} + \epsilon_{aik} (\partial_k \hat{s} + \hat{w}_k) + \partial_i \hat{c}_a + \frac{1}{2} \hat{h}_{ai} = \\ & = -H\xi^0 \delta_{ai} - \psi \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \sigma + \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2} h_{ai} - \partial_i \xi^a. \end{aligned} \quad (4.10d)$$

По отношению к пространственным вращениям ξ^0 — скаляр, тогда как пространственная часть калибровочной функции ξ^{μ} может быть разложена на градиент скаляра и бездивергентный вектор $\xi^i = \partial_i \xi + \tilde{\xi}_i$, что позволяет выписать явно форму калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \phi - \xi^{0'} - H\xi^0, & \hat{\beta} &= \beta - \xi^0, & \hat{\zeta} &= \zeta - \xi', \\ \hat{\psi} &= \psi + H\xi^0, & \hat{v}_i &= v_i - \tilde{\xi}'_i, & \hat{\sigma} &= \sigma - \xi, & \hat{c}_i &= c_i - \tilde{\xi}_i. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Это значит, что инвариантными относительно преобразований (3.8) остаются следующие величины

$$s, \quad u_i, \quad w_i, \quad h_{ij}, \quad \phi - \beta' - H\beta, \quad \psi + H\beta, \quad \zeta - \sigma', \quad v_i - c'_i. \quad (4.12)$$

Таким образом, легко увидеть, что инвариантными являются четыре скалярных моды, три бездивергентных вектора и две тензорных степени свободы, а значит среди шестнадцати тетрадных переменных четыре могут быть зафиксированны.

Все нижеследующие вычисления будут выполнены при фиксированной калибровке, аналогичной той, что была использована в прошлой главе, то есть при $\sigma = 0, c_i = 0, \beta = \zeta$.

4.2. Возмущения тензора энергии-импульса идеальной жидкости

Явные вычисления удобно начать с возмущений тензора энергии-импульса в силу их компактности. Фон материи представляется в виде

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}_{\alpha}^{\beta} = (\varepsilon + p)U_{\alpha}U^{\beta} - p\delta_{\alpha}^{\beta}, \quad (4.13)$$

где U^{α} — вектор 4-скорости, ε — плотность энергии, p — давление. Эти величины в возмущенном виде

$$U_0 = \alpha(1+\phi), \quad U^0 = \frac{(1-\phi)}{\alpha}, \quad U_i = \alpha(\partial_i V + V_i), \quad U^i = \frac{u_i - v_i - \partial_i V - V_i}{\alpha}. \quad (4.14)$$

Заметим, что ε и p получают приращения первого порядка малости $\delta\varepsilon$ и δp . Поэтому компоненты тензора энергии-импульса с точностью до первого порядка малости имеют вид

$$\mathcal{T}_0^0 = \varepsilon + \delta\varepsilon, \quad (4.15a)$$

$$\mathcal{T}_i^0 = (\varepsilon + p)(\partial_i V + V_i), \quad (4.15b)$$

$$\mathcal{T}_0^j = (\varepsilon + p)(u_j - v_j - \partial_j V - V_j), \quad (4.15c)$$

$$\mathcal{T}_i^j = -(p + \delta p)\delta_{ij}. \quad (4.15d)$$

Уравнения движения материи или, другими словами, условие ковариантного сохранения материи $\tilde{\nabla}_{\beta}\mathcal{T}_{\alpha}^{\beta} = 0$ может быть выписан в виде двух ра-

ВЕНСТВ:

$$\tilde{\nabla}_\beta \mathcal{T}_0^\beta = \varepsilon' + 3H(\varepsilon + p) + \delta\varepsilon' + 3H(\delta\varepsilon + \delta p) - (\varepsilon + p)(\Delta V + 3\psi') = 0, \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\beta \mathcal{T}_i^\beta = & -\partial_i p - \partial_i \delta p + (\varepsilon' + p')(\partial_i V + V_i) + \\ & + (\varepsilon + p) \left(\partial_i V' + V_i' + 4H(\partial_i V + V_i) - \partial_i \phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.16b)$$

4.3. Скалярные и псевдоскалярные возмущения

Для построения суперпотенциала приведем скалярные возмущения ковариантных компонент тензора кручения:

$$\begin{aligned} T_{00j} &= \alpha^2 \partial_j (\zeta' - \phi), \quad T_{0ij} = 0, \\ T_{ijk} &= -\alpha^2 (\delta_{ij} \partial_k \psi - \delta_{ik} \partial_j \psi) + \alpha^2 (\epsilon_{ijl} \partial_{lk}^2 s - \epsilon_{ikl} \partial_{lj}^2 s), \\ T_{i0j} &= -\alpha^2 H \delta_{ij} + \alpha^2 [\partial_{ij}^2 \zeta + \delta_{ij} (\psi' + 2H\psi)] - \alpha^2 \epsilon_{ijk} \partial_k s'. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Компоненты вектора кручения:

$$T_0 = 3H - \Delta\zeta - 3\psi', \quad T_i = \partial_i (\phi - \zeta' - 2\psi). \quad (4.18)$$

Скаляр (1.29) с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\mathfrak{T} = (a + b - 6c) \left(\frac{3H^2}{2\alpha^2} - \frac{H}{\alpha^2} [\Delta\zeta + 3\psi' + 3H\phi] \right). \quad (4.19)$$

Тензор кривизны (1.19), компоненты которого вычислены по (4.17):

$$\begin{aligned} K_{00j} &= -K_{j00} = \alpha^2 \partial_j (\zeta' - \phi), \quad K_{i0j} = -K_{j0i} = -\alpha^2 \epsilon_{ijk} \partial_k s', \\ K_{0ij} &= -K_{ji0} = -\alpha^2 H \delta_{ij} + \alpha^2 [\partial_{ij}^2 \zeta + \delta_{ij} (\psi' + 2H\psi)], \\ K_{ijk} &= \alpha^2 (\delta_{jk} \partial_i \psi - \delta_{ji} \partial_k \psi) + \alpha^2 \epsilon_{kil} \partial_{lj}^2 s. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Суперпотенциал (1.37) в скалярном секторе в компонентах имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{00j} &= \alpha^2 \partial_j \left[\left(\frac{a+b-2c}{2} \right) (\zeta' - \phi) - 2c\psi \right], & \mathfrak{S}_{0ij} &= -b\alpha^2 \epsilon_{ijk} \partial_k s', \\
\mathfrak{S}_{i0j} &= -\alpha^2 H \delta_{ij} \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) + \alpha^2 \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ijk} \partial_k s' + \\
&\quad + \alpha^2 \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) \partial_{ij}^2 \zeta - c \delta_{ij} \Delta \zeta \right] + \alpha^2 \delta_{ij} \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) (\psi' + 2H\psi), \\
\mathfrak{S}_{ijk} &= -\alpha^2 \delta_{i[j} \partial_{k]} [(a+b-4c)\psi + 2c(\phi - \zeta')] + (b-a)\alpha^2 \epsilon_{il[j} \partial_{k]l}^2 s - b\alpha^2 \epsilon_{jkl} \partial_{li}^2 s.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Для нахождения обобщенного тензора Эйнштейна понадобятся скалярные возмущения символов Кристоффеля второго рода

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{00}^0 &= H + \phi', & \tilde{\Gamma}_{0i}^0 &= \tilde{\Gamma}_{i0}^0 = \partial_i \phi, \\
\tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = H \delta_{ij} - \delta_{ij} (\psi' + 2H\psi + 2H\phi), \\
\tilde{\Gamma}_{00}^i &= \partial_i \phi, & \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = H \delta_{ij} - \delta_{ij} \psi', \\
\tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{kj}^i = (\delta_{jk} \partial_i \psi - \delta_{ik} \partial_j \psi - \delta_{ij} \partial_k \psi).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

След связности:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\alpha = 4H + \phi' - 3\psi', \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^\alpha = \partial_j (\phi - 3\psi). \tag{4.23}$$

Компоненты обобщенного тензора Эйнштейна со скалярными возмущениями с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_0^0 &= \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \frac{3H^2}{\alpha^2} + \\
&+ \frac{2}{\alpha^2} \left(c\Delta\psi - \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) 3H(\psi' + H\phi) \right) - \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \Delta(\zeta' - \phi),
\end{aligned} \tag{4.24a}$$

$$\mathfrak{S}_i^0 = \frac{1}{\alpha^2} \partial_i \left[\left(\frac{6c-a-b}{2} \right) (\psi' + H\phi) - \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) \Delta \zeta \right], \tag{4.24b}$$

$$\mathfrak{G}_0^j = -\frac{2}{\alpha^2} \partial_j \left[c\psi' + \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) H\phi \right] + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a + b - 2c}{2} \right) \partial_j \left[\zeta'' - \phi' + 2H(\zeta' - \phi - \psi) \right], \quad (4.24c)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_i^j &= \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{b - a}{2} \right) \epsilon_{ijk} \partial_k (2Hs' + \square s) + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a + b - 6c}{2} \right) \left[\psi'' + \phi(2H' + H^2) + H(\phi' + 2\psi') \right] \delta_{ij} + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} [\partial_{ij}^2 - \delta_{ij} \Delta] \left[c\phi + \left(\frac{a + b - 4c}{2} \right) \psi \right] + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a + b - 2c}{2} \right) \left[\partial_{ij}^2 (\zeta' + 3H\zeta) - \delta_{ij} H \Delta \zeta \right]. \end{aligned} \quad (4.24d)$$

Далее тензор Эйнштейна делится на симметричную и антисимметричную части $\mathfrak{G}_\mu^\nu = \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu + \mathfrak{G}_\nu^\mu) + \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu - \mathfrak{G}_\nu^\mu)$.

Так, антисимметричная часть полностью ковариантных компонент тензора Эйнштейна $\mathfrak{G}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_{\mu\nu} - \mathfrak{G}_{\nu\mu})$ имеет вид

$$\mathfrak{G}_{[i0]} = \left(\frac{2c - a - b}{4} \right) \partial_i [\psi' + \phi' + 2H(\phi + \psi) - \square \zeta - 2H\zeta'], \quad (4.25a)$$

$$\mathfrak{G}_{[ij]} = \left(\frac{a - b}{2} \right) \epsilon_{ijk} \partial_k (2Hs' + \square s), \quad (4.25b)$$

тогда как симметричная часть смешанных компонент $\frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu + \mathfrak{G}_\nu^\mu)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{G}_0^0 + \mathfrak{G}_0^0}{2} &= \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) \frac{3H^2}{\alpha^2} - \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) \frac{6H}{\alpha^2} (\psi' + H\phi) + \\ &+ \frac{\Delta}{\alpha^2} \left(2c\psi + \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) (\zeta' - \phi) \right), \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{G}_i^0 + \mathfrak{G}_0^i}{2} &= \frac{1}{\alpha^2} \partial_i \left[c\psi' + \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) (\psi' + 2H\phi) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2c - a - b}{4} \right) (\Delta\zeta + \zeta'' - \phi' + 2H(\zeta' - \phi - \psi)) \right], \end{aligned} \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{G}_i^j + \mathfrak{G}_i^j}{2} &= \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} - \\
&- \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{6c - a - b}{2} \right) \left[\psi'' + (2H' + H^2)\phi + H(\phi' + 2\psi') \right] \delta_{ij} + \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} [\partial_{ij}^2 - \delta_{ij}\Delta] \left[c\phi + \left(\frac{a + b - 4c}{2} \right) \psi \right] - \\
&- \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \left[\partial_{ij}^2(\zeta' + 3H\zeta) - \delta_{ij}H\Delta\zeta \right]. \quad (4.26c)
\end{aligned}$$

Поэтому уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6c - a - b}{4} \right) 3H^2 - \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) 6H(\psi' + H\phi) + \\
+ \Delta \left(2c\psi + \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) (\zeta' - \phi) \right) = \kappa\alpha^2\varepsilon + \kappa\alpha^2\delta\varepsilon, \quad (4.27a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i \left[c\psi' + \left(\frac{6c - a - b}{4} \right) (\psi' + 2H\phi) + \right. \\
\left. + \left(\frac{2c - a - b}{4} \right) (\Delta\zeta + \zeta'' - \phi' + 2H(\zeta' - \phi - \psi)) \right] = \alpha^2\kappa(\varepsilon + p)\partial_i V, \quad (4.27b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6c - a - b}{4} \right) (2H' + H^2) \delta_{ij} + [\partial_{ij}^2 - \delta_{ij}\Delta] \left[c\phi + \left(\frac{a + b - 4c}{2} \right) \psi \right] - \\
- \left(\frac{6c - a - b}{2} \right) \left[\psi'' + (2H' + H^2)\phi + H(\phi' + 2\psi') \right] \delta_{ij} - \\
- \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \left[\partial_{ij}^2(\zeta' + 3H\zeta) - \delta_{ij}H\Delta\zeta \right] = -\alpha^2\kappa p\delta_{ij} - \alpha^2\kappa\delta p\delta_{ij}. \quad (4.27c)
\end{aligned}$$

Антисимметричная часть тензора Эйнштейна дает уравнения с нулевой правой частью

$$\left(\frac{2c - a - b}{4} \right) \partial_i [\psi' + \phi' + 2H(\phi + \psi) - \square\zeta - 2H\zeta'] = 0, \quad (4.28a)$$

$$\left(\frac{a - b}{2} \right) \epsilon_{ijk} \partial_k (2Hs' + \square s) = 0, \quad (4.28b)$$

а значит, учитывая выполнение фоновой части уравнений, возмущения удовлетворяют системе

$$\Delta \left(4c\psi + (2c - a - b) (\zeta' - \phi) \right) - (6c - a - b) \left(3H\psi' + 3H^2\phi \right) = 2\kappa\alpha^2\delta\varepsilon, \quad (4.29a)$$

$$4c\psi' + (6c - a - b) (\psi' + 2H\phi) + (2c - a - b) \left(\zeta'' + \Delta\zeta - \phi' + 2H(\zeta' - \phi - \psi) \right) = 4\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V, \quad (4.29b)$$

$$(6c - a - b) \left[\psi'' + (2H' + H^2)\phi + H(\phi' + 2\psi') \right] + \Delta \left[2c\phi - (4c - a - b)\psi - (2c - a - b)H\zeta \right] = 2\kappa\alpha^2\delta p, \quad (4.29c)$$

$$2c\phi - (4c - a - b)\psi - (2c - a - b)(\zeta' + 3H\zeta) = 0, \quad (4.29d)$$

$$(2c - a - b) \left(\psi' + \phi' - \square\zeta + 2H(\phi + \psi - \zeta') \right) = 0, \quad (4.29e)$$

$$(a - b) \left(\square s + 2Hs' \right) = 0. \quad (4.29f)$$

Где уравнения (4.29c) и (4.29d) возникли соответственно, как частные решения $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_3$ и $\mathbb{S}_1 = 0$ уравнения (4.27c) вида $\partial_{ij}^2\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2\delta_{ij} = \mathbb{S}_3\delta_{ij}$. Скалярный сектор ковариантного сохранения материи представим набором соотношений

$$\varepsilon' + 3H(\varepsilon + p) = 0, \quad \partial_i p = 0, \quad (4.30a)$$

$$\delta\varepsilon' - (\varepsilon + p)(\Delta V + 3\psi') + 3H(\delta\varepsilon + \delta p) = 0, \quad (4.30b)$$

$$\delta p - (\varepsilon' + p')V - (\varepsilon + p)(V' - \phi) - 4H(\varepsilon + p)V = 0. \quad (4.30c)$$

Система (4.29) состоит из шести уравнений на четыре переменные ϕ, ψ, ζ, s , однако она не является переопределенной, что можно доказать, вычислив

ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна (4.24)

$$\tilde{\nabla}_\mu \mathfrak{G}_0^\mu \equiv 0, \quad (4.31a)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \mathfrak{G}_j^\mu = \frac{H}{\alpha^2} \left(\frac{2c - a - b}{2} \right) \partial_j \left(\square \zeta - \psi' - \phi' + 2H(\zeta' - \phi - \psi) \right). \quad (4.31b)$$

Это значит, что среди уравнений (4.29) независимыми являются лишь четыре. При этом (4.29f) «работает» особняком от всех остальных, потому что только оно содержит псевдоскаляр s , который является динамическим при $a \neq b$, и калибровочной степенью свободы в противном случае.

Для выделения трех независимых уравнений на переменные ϕ , ψ , ζ рассмотрим комбинацию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_0 + 2H) \left((4.29b) + (4.29e) \right) - \left((4.29c) - \Delta(4.29d) \right) &\equiv \\ &\equiv (6c - a - b) (H^2 - H') \phi, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где правая часть может быть выражена с помощью разности фоновых частей уравнений (4.27a) и (4.27c)

$$(6c - a - b) (H^2 - H') = 2\kappa\alpha^2 (\varepsilon + p), \quad (4.33)$$

поэтому до тех пор, пока сохраняется тензор энергии-импульса (4.30c), можно пренебречь уравнением (4.29b).

В то же время, еще одно тождество может быть получено с помощью комбинации

$$\begin{aligned} \partial_0 \left((4.29a) \right) + H \left((4.29a) + 3 \cdot (4.29c) - \Delta(4.29d) \right) - \\ - \frac{1}{2} \Delta \left((4.29b) - (4.29e) \right) &\equiv 3(6c - a - b) (H^2 - H') \psi', \end{aligned} \quad (4.34)$$

которую, в свою очередь, нужно сравнить с (4.30b). В соответствии с традиционными космологическими методами, учитывая, что скорость звука

в идеальной жидкости имеет вид $\mathbf{c}_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$, еще одно уравнение можно получить с помощью отношения (4.29с) к (4.29а). Поэтому, пока сохраняется тензор энергии-импульса, данное отношение будет описывать акустическую волну. Таким образом система из трех независимых уравнений движения имеет вид

$$2c\phi - (4c - a - b)\psi - (2c - a - b)(\zeta' + 3H\zeta) = 0, \quad (4.35a)$$

$$(2c - a - b)\left(\psi' + \phi' - \zeta'' + \Delta\zeta + 2H(\phi + \psi - \zeta')\right) = 0, \quad (4.35b)$$

$$(6c - a - b)\left(\psi'' - \mathbf{c}_s^2\Delta\psi + H(\phi' + 2\psi' + 3\mathbf{c}_s^2\psi') + (2H' + H^2 + 3\mathbf{c}_s^2H^2)\phi\right) + (2c - a - b)\Delta\left(\zeta' + 2H\zeta - \mathbf{c}_s^2(\zeta' - \phi - \psi)\right) = 0, \quad (4.35c)$$

где первые два уравнения совпадают с (4.29d) и (4.29e) соответственно, а третье получено из отношения (4.29с) и (4.29а). Уравнение на Лоренцев псевдоскаляр

$$(a - b)(s'' + 2Hs' - \Delta s) = 0. \quad (4.36)$$

Ниже будут рассмотрены частные случаи реализации различных моделей NGR (их нумерация аналогична предыдущей главе) при выполнении равенств из (3.53).

- В моделях первого и третьего (при $a = b$) типа метрические переменные ведут себя в соответствии с уравнениями общего положения (4.35), поэтому ϕ, ψ, ζ являются физическими. ζ — динамический скаляр, а отличаются эти теории лишь характером псевдоскаляра s : в первой он динамический, в третьей — калибровочный.

- При $2c = a + b$, в рамках **модели второго типа**, уравнения (4.35) превращаются в систему

$$\psi = \phi, \quad \psi'' - \mathbf{c}_s^2 \Delta \psi + 3H(1 + \mathbf{c}_s^2)\psi' + (2H' + H^2 + 3\mathbf{c}_s^2 H^2)\psi = 0, \quad (4.37)$$

где ζ полностью отсутствует, а значит становится калибровочной модой, ψ является акустической волной, а ϕ равна ψ . То есть метрические переменные скалярного сектора ведут себя аналогично ОТО, а отличие содержится лишь в том, что псевдоскаляр s — динамичен. **Модель шестого типа**, при $a = b = c$, тождественная ОТО, также удовлетворяет (4.37) и отличается от предыдущей лишь калибровочно свободной переменной s .

- Уравнения на метрические переменные в **моделях четвертого** (при $a = -b$) и **восьмого типа** (при $a = b = 0$) имеют вид

$$\phi = \zeta' + 3H\zeta + 2\psi, \quad (4.38a)$$

$$\psi' + \phi' - \zeta'' + \Delta\zeta + 2H(\phi + \psi - \zeta') = 0, \quad (4.38b)$$

$$3\left(\psi'' - \mathbf{c}_s^2 \Delta \psi + H(\phi' + 2\psi' + 3\mathbf{c}_s^2 \psi') + (2H' + H^2 + 3\mathbf{c}_s^2 H^2)\phi\right) + \Delta\left(\zeta' + 2H\zeta - \mathbf{c}_s^2(\zeta' - \phi - \psi)\right) = 0. \quad (4.38c)$$

Второе и третье уравнения могут быть с помощью первого сведены к

$$3\left[\alpha^2(\psi + H\zeta)\right]' + \alpha^2 \Delta\zeta = 0, \quad (4.39a)$$

$$2(H' - H^2)(\psi + H\zeta) = \left[H'' - (1 - 3\mathbf{c}_s^2)HH' - (1 + 3\mathbf{c}_s^2)H^3\right]\zeta. \quad (4.39b)$$

Из уравнений (4.39a) несложно заметить, что для фиксации переменной ζ требуется одно данное Коши, что ведет к определению поведения ψ посредством (4.39b), а значит и ϕ через уравнение (4.38a).

Четвертая и восьмая модели отличаются лишь тем, что псевдоскаляр s в четвертой является динамическим, а в восьмой калибровочным.

- По аналогичному признаку можно объединить **пятую** (при $a+b = 6c$) и **седьмую** (при $a = b = 3c$) **модели**. В них метрические переменные подчиняются одной системе уравнений

$$\phi + \psi = -2(\zeta' + 3H\zeta), \quad (4.40a)$$

$$\psi' + \phi' - \zeta'' + \Delta\zeta + 2H(\phi + \psi - \zeta') = 0, \quad (4.40b)$$

$$\zeta' + 2H\zeta - \mathbf{c}_s^2(\zeta' - \phi - \psi) = 0, \quad (4.40c)$$

где второе и третье уравнения могут быть преобразованы с помощью первого в систему

$$\zeta'' + 4H\zeta' - \frac{1}{3}\Delta\zeta + 2(H' + 2H^2)\zeta = 0, \quad (4.41a)$$

$$(1 - 3\mathbf{c}_s^2) \left(\zeta' + 2H\zeta \right) = 0. \quad (4.41b)$$

При $\mathbf{c}_s^2 = \frac{1}{3}$ лоренцев скаляр ζ — калибровочный, в противном же случае, подставляя (4.41b) в (4.41a), легко получить уравнение $\Delta\zeta = 0$, которое фиксирует поведение данной переменной.

Различия этих теорий, как и в предыдущем пункте, лишь в том, что псевдоскаляр в пятой является динамическим, а в седьмой калибровочным, тогда как общей их чертой является динамический характер переменной ζ , а также то, что комбинация $\phi - \psi$ — калибровочная мода, а $\phi + \psi$ зафиксирована уравнением (4.40a).

- Наконец, в рамках **девятой модели**, при $a + b = c = 0$, все уравнения системы (4.35) выражаются в тривиальные тождества, поэтому

переменные ϕ, ψ, ζ становятся калибровочными, что требует тривиальности возмущений тензора энергии-импульса, и только s — динамическая мода, подчиняющаяся волновому уравнению (4.36).

4.4. Векторные и псевдовекторные возмущения

Для построения суперпотенциала приведем векторные возмущения ковариантных компонент тензора кручения

$$\begin{aligned} T_{00j} &= \alpha^2 (u'_j + H(u_j - v_j)), & T_{0ij} &= \alpha^2 (\partial_i u_j - \partial_j u_i), \\ T_{ijk} &= -\alpha^2 (\epsilon_{ikl} \partial_j w_l - \epsilon_{ijl} \partial_k w_l), & T_{i0j} &= -\alpha^2 H \delta_{ij} - \alpha^2 (\epsilon_{ijk} w'_k - \partial_j v_i). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Компоненты вектора кручения имеют вид

$$T_0 = 3H, \quad T_i = -u'_i + \epsilon_{ijk} \partial_j w_k. \quad (4.43)$$

Скаляр (1.29) с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{a + b - 6c}{2} \right) \frac{3H^2}{\alpha^2}. \quad (4.44)$$

Компоненты тензора конторсии (1.19), вычисленные по (4.42), могут быть выписаны в форме

$$\begin{aligned} K_{00j} &= -K_{j00} = \alpha^2 (u'_j + H(u_j - v_j)), \\ K_{i0j} &= -K_{j0i} = \alpha^2 (\partial_{[i} u_{j]} - \partial_{[i} v_{j]} - \epsilon_{ijk} w'_k), \\ K_{0ij} &= -K_{ji0} = -\alpha^2 H \delta_{ij} + \alpha^2 (\partial_{[i} u_{j]} + \partial_{(i} v_{j)}), \\ K_{ijk} &= \alpha^2 \epsilon_{kil} \partial_j w_l. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Суперпотенциал (1.37) в векторном секторе имеет следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{00j} &= \alpha^2 \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) u'_j + \alpha^2 \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) H (u_j - v_j) + c\alpha^2 \epsilon_{jlm} \partial_l w_m, \\
\mathfrak{S}_{0ij} &= \alpha^2 \left(a\partial_{[i} u_{j]} - b\partial_{[i} v_{j]} - b\epsilon_{ijk} w'_k \right), \\
\mathfrak{S}_{i0j} &= - \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) \alpha^2 H \delta_{ij} + \\
&\quad + \alpha^2 \left[b\partial_{[i} u_{j]} + \left(\frac{b\partial_i v_j + a\partial_j v_i}{2} \right) + \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ijk} w'_k \right], \\
\mathfrak{S}_{ijk} &= 2c\alpha^2 \delta_{i[j} u'_{k]} + \alpha^2 \left[(b-a)\epsilon_{i[lj} \partial_{k]} - b\epsilon_{jkl} \partial_i - 2c\delta_{i[j} \epsilon_{k]nl} \partial_n \right] w_l.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Для нахождения обобщенного тензора Эйнштейна понадобятся векторные возмущения символов Кристоффеля второго рода

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{00}^0 &= H, \quad \tilde{\Gamma}_{0i}^0 = \tilde{\Gamma}_{i0}^0 = -H (u_i - v_i), \\
\tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = H\delta_{ij} + \partial_{(i} u_{j)} - \partial_{(i} v_{j)}, \quad \tilde{\Gamma}_{00}^i = - (u'_i - v'_i) - H (u_i - v_i), \\
\tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = H\delta_{ij} + \partial_{[i} u_{j]} - \partial_{[i} v_{j]}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{kj}^i = H (u_i - v_i) \delta_{jk}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Следы коэффициентов связности равны

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\alpha = 4H, \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^\alpha = 0. \tag{4.48}$$

Компоненты тензора Эйнштейна с векторными возмущениями с точностью до величин первого порядка малости имеют вид

$$\mathfrak{S}_0^{\cdot 0} = \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \frac{3H^2}{\alpha^2}, \tag{4.49a}$$

$$\mathfrak{S}_i^{\cdot 0} = \frac{1}{\alpha^2} \Delta \left(\frac{bu_i - av_i}{2} \right) - \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ilm} \partial_l w'_m, \tag{4.49b}$$

$$\mathfrak{G}_0^j = -\frac{1}{\alpha^2} \Delta \left(\frac{au_j - bv_j}{2} \right) + \left(\frac{a+b-6c}{2} \right) \left(\frac{H' - H^2}{\alpha^2} \right) (u_j - v_j) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a+b-2c}{2} \right) (u_j'' + 2Hu_j' + H\epsilon_{jlm} \partial_l w_m) + \frac{1}{\alpha^2} (c-b) \epsilon_{jlm} \partial_l w_m', \quad (4.49c)$$

$$\mathfrak{G}_i^j = \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} -$$

$$- \frac{1}{2\alpha^2} \left(\partial_i [(2c-b)u_j' - bv_j'] + 2H\partial_i \left[\left(\frac{6c-a-3b}{2} \right) u_j - bv_j \right] + \right.$$

$$\left. + \partial_j [bu_i' - av_i'] + 2H\partial_j (bu_i - av_i) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ijk} (2Hw_k' + \square w_k) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{b-a}{2} \right) \epsilon_{ikl} \partial_{jk}^2 w_l + \frac{1}{\alpha^2} (c-b) \epsilon_{jkl} \partial_{ik}^2 w_l.$$

(4.49d)

Далее нам нужно разделить тензор Эйнштейна на симметричную и антисимметричную части $\mathfrak{G}_\mu^\nu = \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu + \mathfrak{G}_\nu^\mu) + \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu - \mathfrak{G}_\nu^\mu)$.

Так антисимметричная часть полностью ковариантного тензора Эйнштейна $\mathfrak{G}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_{\mu\nu} - \mathfrak{G}_{\nu\mu})$ имеет вид

$$\mathfrak{G}_{[i0]} = \left(\frac{b-a}{4} \right) \Delta (u_i + v_i) + \left(\frac{2c+a-3b}{4} \right) \epsilon_{ilm} \partial_l w_m' -$$

$$- \left(\frac{2c-a-b}{4} \right) (u_i'' + 2Hu_i' + H\epsilon_{ilm} \partial_l w_m), \quad (4.50a)$$

$$\mathfrak{G}_{[ij]} = (c-b) \partial_{[i} u_{j]}' + \left(\frac{6c-a-5b}{2} \right) H \partial_{[i} u_{j]} + \left(\frac{a-b}{2} \right) (\partial_{[i} v_{j]}' + 2H \partial_{[i} v_{j]}) +$$

$$+ \left(\frac{a-b}{2} \right) \epsilon_{ijk} (2Hw_k' + \square w_k) + \left(\frac{2c+a-3b}{2} \right) \epsilon_{kl[i} \partial_{j]k}^2 w_l, \quad (4.50b)$$

тогда как симметричная часть смешанных компонент $\frac{1}{2} (\mathfrak{G}_\mu^\nu + \mathfrak{G}_\nu^\mu)$ имеет вид

$$\frac{\mathfrak{G}_0^0 + \mathfrak{G}_0^0}{2} = \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \frac{3H^2}{\alpha^2}, \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{G}_i^{\cdot 0} + \mathfrak{G}_{\cdot i}^0}{2} &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a+b}{4} \right) \Delta(u_i - v_i) + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{2c-a-b}{4} \right) \left[u_i'' + 2Hu_i' + \epsilon_{ilm} \partial_l (Hw_m - w_m') \right], \end{aligned} \quad (4.51b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{G}_i^{\cdot j} + \mathfrak{G}_{\cdot i}^j}{2} &= \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} - \\ &- \frac{c}{\alpha^2} \partial_{(i} u_{j)}' - \left(\frac{6c-a-b}{2} \right) \frac{H}{\alpha^2} \partial_{(i} u_{j)} + \left(\frac{a+b}{2\alpha^2} \right) \left[\partial_{(i} v_{j)}' + 2H \partial_{(i} v_{j)} \right] + \\ &+ \left(\frac{2c-a-b}{2\alpha^2} \right) \epsilon_{kl(i} \partial_{j)k}^2 w_l. \end{aligned} \quad (4.51c)$$

Поэтому уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{6c-a-b}{4} \right) 3H^2 = \varkappa \alpha^2 \varepsilon, \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{4} \right) \Delta(u_i - v_i) + \\ + \left(\frac{2c-a-b}{4} \right) \left[u_i'' + 2Hu_i' + \epsilon_{ilm} \partial_l (Hw_m - w_m') \right] = \varkappa \alpha^2 (\varepsilon + p) V_i, \end{aligned} \quad (4.52b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{6c-a-b}{4} \right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} - \frac{c}{\alpha^2} \partial_{(i} u_{j)}' - \\ - \left(\frac{6c-a-b}{2} \right) \frac{H}{\alpha^2} \partial_{(i} u_{j)} + \left(\frac{a+b}{2\alpha^2} \right) \left[\partial_{(i} v_{j)}' + 2H \partial_{(i} v_{j)} \right] + \\ + \left(\frac{2c-a-b}{2\alpha^2} \right) \epsilon_{kl(i} \partial_{j)k}^2 w_l = -\varkappa \alpha^2 p \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.52c)$$

Учитывая выполнение фоновой части уравнений, возмущения удовлетворяют набору равенств

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{4} \right) \Delta(u_i - v_i) + \\ + \left(\frac{2c-a-b}{4} \right) \left[u_i'' + 2Hu_i' + \epsilon_{ilm} \partial_l (Hw_m - w_m') \right] = \varkappa \alpha^2 (\varepsilon + p) V_i, \end{aligned} \quad (4.53a)$$

$$c\partial_{(i}u'_{j)} + \left(\frac{6c-a-b}{2}\right) H\partial_{(i}u_{j)} - \left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\partial_{(i}v'_{j)} + 2H\partial_{(i}v_{j)}\right] - \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \epsilon_{kl(i}\partial_{j)k}^2 w_l = 0. \quad (4.53b)$$

Тогда как антисимметричная часть тензора Эйнштейна воспроизводит однородные уравнения

$$\left(\frac{b-a}{4}\right) \Delta(u_i + v_i) + \left(\frac{2c+a-3b}{4}\right) \epsilon_{ilm}\partial_l w'_m - \left(\frac{2c-a-b}{4}\right) (u''_i + 2Hu'_i + H\epsilon_{ilm}\partial_l w_m) = 0, \quad (4.54a)$$

$$(c-b)\partial_{[i}u'_{j]} + \left(\frac{6c-a-5b}{2}\right) H\partial_{[i}u_{j]} + \left(\frac{a-b}{2}\right) \left(\partial_{[i}v'_{j]} + 2H\partial_{[i}v_{j]}\right) + \left(\frac{a-b}{2}\right) \epsilon_{ijk} (2Hw'_k + \square w_k) + \left(\frac{2c+a-3b}{2}\right) \epsilon_{kl[i}\partial_{j]k}^2 w_l = 0. \quad (4.54b)$$

Вводя замену $w_m = \epsilon_{mpq}\partial_p\chi_q$ на бездивергентный χ_q , получим уравнения

$$\left(\frac{a+b}{4}\right) \Delta(u_i - v_i) + \left(\frac{2c-a-b}{4}\right) \left(u''_i + 2Hu'_i + \Delta(\chi'_i - H\chi_i)\right) = \varkappa\alpha^2(\varepsilon+p)V_i \quad (4.55a)$$

$$c\partial_{(i}u'_{j)} + \left(\frac{6c-a-b}{2}\right) H\partial_{(i}u_{j)} - \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\partial_{(i}v'_{j)} + 2H\partial_{(i}v_{j)}\right) + \left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \Delta\partial_{(i}\chi_{j)} = 0, \quad (4.55b)$$

$$\left(\frac{b-a}{4}\right) \Delta(u_i + v_i) - \left(\frac{2c+a-3b}{4}\right) \Delta\chi'_i - \left(\frac{2c-a-b}{4}\right) (u''_i + 2Hu'_i - H\Delta\chi_i) = 0, \quad (4.55c)$$

$$(c-b)\partial_{[i}u'_{j]} + \left(\frac{6c-a-5b}{2}\right) H\partial_{[i}u_{j]} + \left(\frac{a-b}{2}\right) \left(\partial_{[i}v'_{j]} + 2H\partial_{[i}v_{j]}\right) + (a-b) \left(\square\partial_{[i}\chi_{j]} + 2H\partial_{[i}\chi'_{j]}\right) + \left(\frac{2c+a-3b}{2}\right) \Delta\partial_{[i}\chi_{j]} = 0. \quad (4.55d)$$

Уравнения (4.55) необходимо дополнить соотношениями, определяющими ковариантное сохранение материи

$$\varepsilon' + 3H(\varepsilon + p) = 0, \quad \partial_i p = 0, \quad (4.56a)$$

$$(\varepsilon' + p')V_i + (\varepsilon + p)V_i' + 4H(\varepsilon + p)V_i = 0. \quad (4.56b)$$

Нужно заметить, что уравнения (4.55b) и (4.55d) имеют достаточно простую структуру $\partial_{(i}\mathbb{S}_{i)} = 0$ и $\partial_{[i}\mathbb{S}_{j]} = 0$ соответственно, и в дальнейших рассуждениях будут использоваться их тривиальные решения $\mathbb{S}_i = 0$, поэтому систему (4.55) гораздо удобнее переписать в виде

$$(a + b) \Delta(u_i - v_i) + (2c - a - b) \left(u_i'' + 2Hu_i' + \Delta(\chi_i' - H\chi_i) \right) = 4\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i \quad (4.57a)$$

$$2cu_j' - (a + b)v_j' + H \left((6c - a - b)u_j - 2(a + b)v_j \right) + (2c - a - b) \Delta\chi_j = 0, \quad (4.57b)$$

$$(b - a) \Delta(u_i + v_i) - (2c + a - 3b) \Delta\chi_i' - (2c - a - b) (u_i'' + 2Hu_i' - H\Delta\chi_i) = 0, \quad (4.57c)$$

$$2(c - b)u_j' + (6c - a - 5b)Hu_j + (a - b)(v_j' + 2Hv_j) + 2(a - b)(\square\chi_j + 2H\chi_j') + (2c + a - 3b)\Delta\chi_j = 0. \quad (4.57d)$$

Прежде чем выделить из полученной четверки уравнений для векторов (u_i, v_i, χ_i) три независимых уравнения, выполним уже известную по предыдущей главе замену

$$\mathcal{M}_i = \frac{u_i - v_i}{2}, \quad \mathcal{L}_i = \frac{u_i + v_i}{2}, \quad (4.58)$$

в системе (4.57). В результате получаем

$$(2c - a - b) \left(\mathcal{M}_i'' + \mathcal{L}_i'' + 2H (\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i') - H\Delta\chi_i + \Delta\chi_i' \right) + \\ + 2(a + b) \Delta\mathcal{M}_i = 4\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i \quad (4.59a)$$

$$(2c + a + b)\mathcal{M}_i' + (6c + a + b)H\mathcal{M}_i + (2c - a - b) \left(\mathcal{L}_i' + 3H\mathcal{L}_i + \Delta\chi_j \right) = 0, \quad (4.59b)$$

$$(2c - a - b) \left(\mathcal{M}_i'' + \mathcal{L}_i'' + 2H (\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i') - H\Delta\chi_i \right) \\ + \Delta \left(2(a - b) \mathcal{L}_i + (2c + a - 3b) \chi_i' \right) = 0, \quad (4.59c)$$

$$2(a - b) (\chi_i'' + 2H\chi_i') + (2c - a - b) \left(\mathcal{M}_i' + 3H\mathcal{M}_i + \Delta\chi_i \right) + \\ + (2c + a - 3b)\mathcal{L}_i' + (6c + a - 7b)H\mathcal{L}_i = 0. \quad (4.59d)$$

Показать зависимость уравнений в системе (4.59) не сложно. Для этого можно заметить равенство

$$(4.59b) - (4.59d) = (\partial_0 + 2H) \left((4.59a) - (4.59c) \right).$$

Поэтому в качестве уравнений, описывающих поведение векторного сектора, используем разность (4.59a) и (4.59c), а также (4.59c), (4.59b):

$$\Delta \left((a + b)\mathcal{M}_i + (b - a)(\mathcal{L}_i + \chi_i') \right) = 2\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i, \quad (4.60a)$$

$$(2c - a - b) \left(\mathcal{M}_i'' + \mathcal{L}_i'' + 2H (\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i') - H\Delta\chi_i \right) + \\ + \Delta \left(2(a - b) \mathcal{L}_i + (2c + a - 3b) \chi_i' \right) = 0, \quad (4.60b)$$

$$(2c + a + b)\mathcal{M}_i' + (6c + a + b)H\mathcal{M}_i + (2c - a - b) \left(\mathcal{L}_i' + 3H\mathcal{L}_i + \Delta\chi_i \right) = 0. \quad (4.60c)$$

Из уравнений (4.60b) и производной по времени от (4.60c) можно выразить старшую производную \mathcal{M}_i в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i'' + \left(\frac{2c + 3a + 3b}{2a + 2b} \right) H \mathcal{M}_i' + \left(\frac{6c + a + b}{2a + 2b} \right) H' \mathcal{M}_i = \\ = \left(\frac{a - b}{a + b} \right) \Delta (\mathcal{L}_i + \chi_i') + \left(\frac{a + b - 2c}{2a + 2b} \right) \left[H (\mathcal{L}_i' + \Delta \chi_i) + 3H' \mathcal{L}_i \right], \end{aligned} \quad (4.61)$$

что превратится в волновое уравнение на \mathcal{M}_i в силу (4.60a). С другой стороны, продифференцировав (4.60a) по времени и воспользовавшись законом сохранения материи (4.56b), получим

$$\mathcal{L}_i' + 2H \mathcal{L}_i = \left(\frac{a + b}{a - b} \right) (\mathcal{M}_i' + H \mathcal{M}_i) - (\chi_i'' + 2H \chi_i'). \quad (4.62)$$

Это уравнение можно подставить в (4.60c), что позволит выразить старшие производные псевдовектора χ_i и получить уравнение

$$\begin{aligned} \chi_i'' + 2H \chi_i' - \Delta \chi_i = \frac{4ac - 2b(a + b)}{(a - b)(2c - a - b)} \mathcal{M}_i' + \\ + H \left(\mathcal{L}_i + \frac{2c(5a - b) - (a^2 + 4ab + 3b^2)}{(a - b)(2c - a - b)} \mathcal{M}_i \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

С помощью уравнений (4.62) и (4.60a) можно выразить \mathcal{L}_i и решить оставшуюся систему (4.61) и (4.63) относительно \mathcal{M}_i и χ_i . Таким образом в случае общего положения в наличии два динамических вектора и один, задающий связь, в то время как калибровочная свобода отсутствует.

Рассмотрим частные случаи, когда выполняются некоторые из равенств (3.43)

- Поскольку выполнение равенства $6c = a + b$ никак не меняет структуры уравнений (4.60), то **первый и пятый типы** теорий, согласно обозначениям таблицы 3.1, тождественны. Иными словами, реализуется модель общего положения.

- При $2c = a + b$, то есть в случае так называемой однопараметрической NGR, или **модели второго типа**, уравнения движения становятся

$$(a + b)\Delta\mathcal{M}_i = 2\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i, \quad (4.64a)$$

$$\mathcal{L}_i + \chi'_i = 0, \quad (4.64b)$$

$$\mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0. \quad (4.64c)$$

Из третьего уравнения следует $\mathcal{M}_i \propto \frac{1}{\alpha^2}$, что вместе с первым уравнением соответствует закону сохранения (4.56b). То есть метрическая переменная \mathcal{M}_i ведет себя как в ОТО. Поэтому в векторном секторе от ОТО отличается лишь поведение Лоренцевых переменных.

- При $a = b$, реализуются **модели третьего и седьмого типа**, уравнение (4.60a) приобретает вид

$$a\Delta\mathcal{M}_i = \kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i, \quad (4.65)$$

а значит, при выполнении условия (4.56b) принимает вид

$$\mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, \quad (4.66)$$

поэтому (4.60b) и (4.60c) примут вид

$$\mathcal{L}''_i + 2H\mathcal{L}'_i - 2H'\mathcal{M}_i + \Delta(\chi'_i - H\chi_i) = 0, \quad (4.67a)$$

$$\mathcal{L}'_i + H(3\mathcal{L}_i + \mathcal{M}_i) + \Delta\chi_i = 0. \quad (4.67b)$$

Исключая из этих уравнений $\Delta\chi_i$, получим

$$3(H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0. \quad (4.68)$$

Если фоном является пространство Минковского или Де Ситтера, то это выражение превращается в тождество, оставляя калибровочную

свободу. В противном случае на векторный сектор будет наложена связь $\mathcal{M}_i = -\mathcal{L}_i$.

- При $a = -b$, в **модели четвертого типа**, система (4.60) может быть переписана в виде

$$b\Delta(\mathcal{L}_i + \chi'_i) = \varkappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i, \quad (4.69a)$$

$$c\left(\mathcal{M}_i'' + \mathcal{L}_i'' + 2H(\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i') - H\Delta\chi_i + \Delta\chi'_i\right) = 2b\Delta(\mathcal{L}_i + \chi'_i), \quad (4.69b)$$

$$\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i' + 3H(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) + \Delta\chi_i = 0. \quad (4.69c)$$

Как и в предыдущем случае, исключая из второго и третьего уравнений $\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i'$, можно получить связь

$$3c(H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 2b\Delta(\mathcal{L}_i + \chi'_i), \quad (4.70)$$

которая уничтожает калибровочную свободу. Поле материи V_i посредством (4.69a) задает $\mathcal{L}_i + \chi'_i$, а поэтому и $\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i$. А значит метрические переменные полностью ограничены связями.

- При $a = b = c$ восстанавливается **модель шестого типа**, то есть ОТО, где все переменные векторного сектора являются калибровочными, кроме единственного динамического вектора \mathcal{M}_i , удовлетворяющего уравнениям

$$a\Delta\mathcal{M}_i = \varkappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i, \quad \mathcal{M}_i' + 2H\mathcal{M}_i = 0. \quad (4.71)$$

- При $a = b = 0$, в рамках **модели восьмого типа**, чтобы удовлетворялось уравнение (4.60a) тривиализируются векторные возмущения

$V_i = 0$, а остальные два уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i'' + \mathcal{L}_i'' + 2H(\mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i') - H\Delta\chi_i + \Delta\chi_i' &= 0, \\ \mathcal{M}_i' + \mathcal{L}_i' + 3H(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) + \Delta\chi_j &= 0, \end{aligned} \quad (4.72)$$

исключив откуда $\Delta\chi_i$, можно получить связь

$$(H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0, \quad (4.73)$$

которая, как и ранее, в пространствах отличных от Минковского и Де Ситтера, связывает вектора $\mathcal{M}_i = -\mathcal{L}_i$, уничтожая калибровочную свободу.

- Наконец в **модели девятого типа** при $a + b = c = 0$ уравнения принимают вид

$$b\Delta(\mathcal{L}_i + \chi_i') = \varkappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i = 0, \quad (4.74)$$

что запрещает векторные возмущения, и оставляет единственную связь

$$\mathcal{L}_i + \chi_i' = 0.$$

4.5. Тензорные возмущения

Для построения суперпотенциала приведем тензорные возмущения ковариантных компонент тензора кручения

$$T_{ijk} = -\frac{\alpha^2}{2}(\partial_j h_{ik} - \partial_k h_{ij}), \quad T_{i0j} = -\alpha^2 H \delta_{ij} - \frac{\alpha^2}{2}(h'_{ij} + 2H h_{ij}). \quad (4.75)$$

Компоненты вектора кручения принимают вид

$$T_0 = 3H, \quad T_i = 0. \quad (4.76)$$

Скаляр (1.29) с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{a + b - 6c}{2} \right) \left(\frac{3H^2}{\alpha^2} \right). \quad (4.77)$$

Компоненты тензора кривизны (1.19), вычисленные по (4.75) приобретают форму

$$K_{0ij} = -K_{ji0} = -\alpha^2 H \delta_{ij} - \frac{\alpha^2}{2} (h'_{ij} + 2Hh_{ij}), \quad K_{ijk} = -\frac{\alpha^2}{2} (\partial_i h_{jk} - \partial_k h_{ji}). \quad (4.78a)$$

Компоненты суперпотенциала имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{i0j} &= -\left(\frac{a+b-6c}{2}\right) \alpha^2 H \delta_{ij} - \alpha^2 \left[\left(\frac{a+b-6c}{2}\right) H h_{ij} + \left(\frac{a+b}{4}\right) h'_{ij} \right], \\ \mathfrak{S}_{ijk} &= \left(\frac{a+b}{4}\right) \alpha^2 (\partial_k h_{ji} - \partial_j h_{ki}). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Для нахождения обобщенного тензора Эйнштейна нам понадобятся тензорные возмущения символов Кристоффеля второго рода

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= H, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^0 = \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = H \delta_{ij} + \frac{1}{2} h'_{ij} + H h_{ij}, \\ \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = H \delta_{ij} + \frac{1}{2} h'_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{kj}^i = \frac{1}{2} (\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}), \end{aligned} \quad (4.80)$$

а след связности равен

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\alpha = 4H, \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^\alpha = 0. \quad (4.81)$$

Поэтому тензор Эйнштейна вместе с тензорными возмущениями имеет вид

$$\mathfrak{G}_0^{\cdot 0} = \left(\frac{6c-a-b}{4}\right) \frac{3H^2}{\alpha^2}, \quad (4.82a)$$

$$\mathfrak{G}_i^{\cdot j} = \left(\frac{6c-a-b}{4}\right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2}\right) \delta_{ij} - \left(\frac{a+b}{4}\right) \left[\frac{h''_{ij} - \Delta h_{ij} + 2Hh'_{ij}}{\alpha^2} \right]. \quad (4.82b)$$

Очевидно, антисимметричная часть уравнений движения в тензорном секторе отсутствует, поэтому тензорный сектор уравнений движения имеет вид

$$\left(\frac{6c-a-b}{4}\right) \frac{3H^2}{\alpha^2} = \varkappa \varepsilon, \quad (4.83a)$$

$$\left(\frac{6c - a - b}{4}\right) \left(\frac{2H' + H^2}{\alpha^2}\right) \delta_{ij} - \left(\frac{a + b}{4}\right) \left(\frac{\square h_{ij} + 2Hh'_{ij}}{\alpha^2}\right) = -\varkappa p \delta_{ij}. \quad (4.83b)$$

А значит, учитывая выполнение фоновой части уравнений, возмущения удовлетворяют уравнению

$$(a + b) (h''_{ij} + 2Hh'_{ij} - \Delta h_{ij}) = 0, \quad (4.84)$$

которое можно переписать, используя обозначение для ковариантного оператора Даламбера, в виде $(a + b)\tilde{\square}h_{ij} = 0$. При этом нужно заметить, что при $a + b = 6c$ фоновые слагаемые, которые задают космологические уравнения Фридмана, вырождаются, что делает данную реализацию теории Хаяши – Ширафуджи принципиально отличной от ОТО.

4.6. Подсчет степеней свободы

В этом разделе сравнивается классификация переменных, полученная в главе 3, с классификацией переменных в данной главе для всех моделей, реализуемых NGR. Это сравнение важно, потому что оно позволит сделать вывод о наличии или отсутствии «сильной связи» в каждой из моделей, если в какой-то из них изменится количество калибровочных мод. Их классификация приведена в таблице 4.1, а ниже в девяти небольших подразделах они будут подсчитаны их в каждом частном случае теории.

Тип	Модель	Динамические моды	Связи	Калибровки
1	Общая	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \chi_i, \zeta, s$	$\mathcal{L}_i, \phi, \psi$	–
2	I	h_{ij}, s	$\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \phi, \psi$	χ_i, ζ
3	II	h_{ij}, ζ	$\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i, \phi, \psi$	s
4	III	половина ζ, s	половина $\zeta, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i, \phi, \psi$	h_{ij}
5	IV	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \chi_i, s$	$\mathcal{L}_i, \phi + \psi, \zeta$	$\phi - \psi$
6	I и II	h_{ij}	$\mathcal{M}_i, \phi, \psi$	$\mathcal{L}_i, \chi_i, \zeta, s$
7	II и IV	h_{ij}	$\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i, \phi + \psi, \zeta$	$\phi - \psi, s,$
8	II и III	половина ζ	половина $\zeta, \mathcal{M}_i, \chi_i, \phi, \psi$	h_{ij}, \mathcal{L}_i, s
9	I и III и IV	s	\mathcal{L}_i	$h_{ij}, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i, \phi, \psi, s$

Таблица 4.1: Степени свободы теории в рамках теории возмущений над пространством Фридмана.

4.6.1. $|a| \neq |b|, 2c \neq a + b, 6c \neq a + b$

Первая и наиболее общая модель NGR описывается громоздкой системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\square} h_{ij} = 0, \quad \tilde{\square} s = 0, \\ \phi, \psi, \zeta \text{ удовлетворяют (4.35),} \\ \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i \text{ удовлетворяют (4.60).} \end{array} \right. \quad (4.85)$$

Несложно заметить, что в рамках этой модели отсутствуют калибровочные переменные. При этом динамическими модами являются $h_{ij}, \mathcal{M}_i, \chi_i, \zeta, s$, которые вместе полями материи $\delta\varepsilon$ и $\delta\rho$ фиксируют поведение скаляров ϕ и ψ посредством уравнений (4.29а) и (4.35а), и вектора \mathcal{L}_i посредством (4.62). Данная модель, поскольку характер ее переменных тождественен

тому, что был рассмотрен в 3.5.1, не обладает «сильной связью». Такое поведение, учитывая ее общность, выглядит достаточно многообещающе с точки зрения анализа общих свойств теорий NGR как претендента на обобщение ОТО.

4.6.2. $|a| \neq |b|$, $2c = a + b$

В случае однопараметрической NGR не сложно видеть полное сходство волнового поведения переменных h_{ij} , s с поведением, описанным разделом 3.5.2.

$$\begin{cases} \tilde{\square} h_{ij} = 0, & \tilde{\square} s = 0, & \phi = \psi, \\ \psi'' - \mathbf{c}_s^2 \Delta \psi + 3H(1 + \mathbf{c}_s^2) \psi' + (2H' + H^2 + 3\mathbf{c}_s^2 H^2) \psi = 0, & (4.86) \\ \mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, & \mathcal{L}_i = -\chi'_i. \end{cases}$$

Совпадает также и связь между лоренцевыми векторами \mathcal{L}_i и χ_i , один из которых можно считать калибровочным. Может однако показаться, что метрические скаляры ϕ , ψ и метрический вектор \mathcal{M}_i стали динамическими, но это не так. В данном случае динамическими становятся поля материи $\delta\varepsilon$ и V_i , которые посредством уравнений (4.29а) и (4.64а) определяют поведение скаляров $\phi = \psi$ и \mathcal{M}_i соответственно. А это значит, что на них наложены связи. Эта реализация NGR также не имеет проблемы «сильной связи», поскольку характер переменных в уравнении (4.86) совпадает с характером мод системы (3.55).

4.6.3. $a = b \neq 0$, $a \neq c$, $a \neq 3c$

В рамках данной модели уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{\square} h_{ij} = 0, & \mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, & (H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0, \\ \Delta\chi_i = -\mathcal{L}'_i - H(3\mathcal{L}_i + \mathcal{M}_i), & \phi, \psi, \zeta \text{ удовлетворяют (4.35)}. \end{cases} \quad (4.87)$$

Несложно заметить, что гравитационные волны, как и в ранее рассмотренных моделях, в наличии. Поведение метрического вектора \mathcal{M}_i как и прежде определяется поведением материи в соответствии с (4.64а). Псевдоскаляр s стал калибровочным, но остальные три скалярных моды ζ, ϕ, ψ ведут себя аналогично случаю общего положения, описанному в разделе 4.6.1. Переменная \mathcal{L}_i является калибровочной в случае, когда фоновое пространство представлено метрикой Минковского или де Ситтера, в случае произвольного же космологического фона, на ее поведение накладывается связь $\mathcal{L}_i = -\mathcal{M}_i$. А это, в свою очередь, ограничивает поведение вектора χ_i . Таким образом, можно видеть, что данная реализация NGR имеет сильную связь, потому что векторная мода \mathcal{L}_i перестала быть калибровочной, какой была в рамках линеаризованной теории над фоном Минковского, что было продемонстрировано в разделе 3.5.3. Наличие «сильной связи» не дает корректно поставить задачу Коши в этой модели, так как в зависимости от того в какой области фазового пространства окажутся начальные данные, поведение вектора \mathcal{L}_i может быть, как полностью непредсказуемым, когда он калибровочный, так и однозначно определено, в противном случае.

4.6.4. $a = -b \neq 0, c \neq 0$

Уравнения движения очередной модели приобретают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2b\Delta(\mathcal{L}_i + \chi'_i) = 2\kappa\alpha^2(\varepsilon + p)V_i = 3c(H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i), \\ \Delta\chi_i = -\mathcal{M}'_i - \mathcal{L}'_i - 3H(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i), \quad \tilde{\square}s = 0, \\ \phi = \zeta' + 3H\zeta + 2\psi, \quad 3\left[\alpha^2(\psi + H\zeta)\right]' + \alpha^2\Delta\zeta = 0, \\ 2(H' - H^2)(\psi + H\zeta) = \left[H'' - (1 - 3\mathbf{c}_s^2)HH' - (1 + 3\mathbf{c}_s^2)H^3\right]\zeta. \end{array} \right. \quad (4.88)$$

Где видна полная неприменимость ее к физике, так как тензорная мода h_{ij} — калибровочная, ζ — динамический скаляр, требующий фиксации лишь одного данного задачи Коши, который посредством последнего уравнения накладывает связь на ψ , а значит и на ϕ . Все векторные переменные ограничиваются поведением материи. При этом s — динамический псевдо-скаляр.

4.6.5. $6c = a + b, |a| \neq |b|$

В рамках данной реализации теории, переменные удовлетворяют

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\square}h_{ij} = 0, \quad \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \chi_i \text{ удовлетворяют (4.60),} \\ \tilde{\square}s = 0, \quad \phi + \psi = \zeta = 0. \end{array} \right. \quad (4.89)$$

Прежде всего заметим, что векторные моды ведут себя аналогично случаю, приведенному в разделе 4.6.1. Лоренцевы вектора \mathcal{M}_i и χ_i — динамические, они ограничивают эволюцию \mathcal{L}_i . Динамическими переменными являются также и h_{ij} , s . На скалярную моду ζ , вследствие выполнения уравнений (4.41) при $\mathbf{c}_s^2 \neq \frac{1}{3}$, наложена связь, которая фиксирует сумму $\phi + \psi$. Если же $\mathbf{c}_s^2 = \frac{1}{3}$, то ζ становится калибровочной. А это значит, что в рамках этой

модели сильная связь проявляется в линейном порядке теории возмущений лишь в случае, когда материя удовлетворяет условию $\mathbf{c}_s^2 = \frac{1}{3}$.

4.6.6. $a = b = c \neq 0$

Стандартный случай гравитационных возмущений в TEGR, уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{\square} h_{ij} = 0, & \mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, & \phi = \psi, \\ \psi'' - \mathbf{c}_s^2 \Delta \psi + 3H(1 + \mathbf{c}_s^2)\psi' + (2H' + H^2 + 3\mathbf{c}_s^2 H^2)\psi = 0. \end{cases} \quad (4.90)$$

Видно, что динамический характер тензорных возмущений h_{ij} в наличии. Может показаться, что изменилось поведение переменных ϕ , ψ , \mathcal{M}_i , и теперь они стали динамическими, в отличие от результатов раздела 3.5.6, однако это не так, их поведение ограничено динамикой полей материи посредством уравнений (4.29а) и (4.71). Поэтому лоренцев сектор полностью калибровочный. А значит имеет место сохранение характера всех переменных в рамках данной модели по сравнению с результатами раздела 3.5.6, что означает отсутствие «сильной связи».

4.6.7. $a = b = 3c \neq 0$

Переменные в этой реализации теории удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \tilde{\square} h_{ij} = 0, & \mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, & (H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0, \\ \Delta \chi_i = -\mathcal{L}'_i - H(3\mathcal{L}_i + \mathcal{M}_i), & \phi + \psi = \zeta = 0. \end{cases} \quad (4.91)$$

Тензорные моды h_{ij} остаются динамическими. Эволюция метрического вектора \mathcal{M}_i определяется эволюцией полей материи посредством (4.64а), тогда как \mathcal{L}_i является калибровочной, когда фон представлен пространством

Минковского или де Ситтера, но в случае произвольного космологического фона, на ее поведение накладывается связь $\mathcal{L}_i = -\mathcal{M}_i$. А это значит, что вектор χ_i фиксируется переменными $\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i$. Лоренцев скаляр ζ , как было получено из (4.41), является тривиальным (за исключением случая $\mathbf{c}_s^2 = \frac{1}{3}$) и фиксирует сумму $\phi + \psi$. Так как вектор \mathcal{L}_i перестал быть калибровочным, как это было в разделе 3.5.7, можно заключить, что эта модель обладает проблемой «сильной связи», а значит не является однозначно предсказуемой в силу невозможности постановки задачи Коши.

4.6.8. $a = b = 0, c \neq 0$

Заведомо патологическая модель NGR, описываемая в линейном приближении системой уравнений

$$\begin{cases} \phi = \zeta' + 3H\zeta + 2\psi, & 3 \left[\alpha^2 (\psi + H\zeta) \right]' + \alpha^2 \Delta \zeta = 0, \\ 2(H' - H^2)(\psi + H\zeta) = \left[H'' - (1 - 3\mathbf{c}_s^2)HH' - (1 + 3\mathbf{c}_s^2)H^3 \right] \zeta, & (4.92) \\ \Delta \chi_j = -\mathcal{M}'_i - \mathcal{L}'_i - 3H(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i), & (H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0, \end{cases}$$

не имеет гравитационных волн и уже поэтому далека от каких-либо притязаний на описание реальности. Единственной динамической модой является лоренцев скаляр ζ , поведение которого определяется уравнением с первой производной по времени. Он фиксирует поведение метрических скаляров ψ и ϕ . В векторном секторе \mathcal{L}_i — калибровочная мода, накладывающая связь $\mathcal{M}_i = -\mathcal{L}_i$ (за исключением случая $H^2 = H'$ в пространствах Минковского или де Ситтера, где оба вектора будут калибровочными), что в свою очередь фиксирует и поведение вектора χ_i . Поэтому несложно заметить, что в рамках данной реализации NGR «сильная связь» тоже есть,

так как вектор \mathcal{M}_i перестал быть калибровочным по сравнению с разделом 3.5.8.

4.6.9. $a + b = c = 0$

Наконец уравнения движения последней из моделей имеют вид

$$\mathcal{L}_i = -\chi'_i, \quad \tilde{\square}s = 0, \quad (4.93)$$

откуда видно, что динамическим является лишь псевдоскаляр s , а переменная \mathcal{L}_i ограничена связью с калибровочным вектором χ_i . Эта модель не имеет ничего общего с ОТО, однако в отличие от многих предыдущих реализаций NGR лишена «сильной связи», так как характер ее переменных ничем не отличается от того, что был получен в разделе 3.5.9.

Заключение

В рамках данной диссертационной работы анализировалась гравитационная теория, предложенная в [3], [4], которая представляется обобщением эйнштейновской теории относительности [1]. В первой главе были определены все геометрические объекты, которые используются в исследовании, была построена плотность лагранжиана обсуждаемой теории, вслед за чем аналог тензора Эйнштейна и трехпараметрические уравнения движения (1.40).

Вторая глава посвящена поиску и элементарной классификации вакуумных статических сферически симметричных решений в рамках теории Хаяши – Ширафуджи. Было показано, что тетрада (2.4) не порождает антисимметричной части полевых уравнений движения (2.12)–(2.14). В подразделе 2.1.1 удалось продемонстрировать, что в изотропных координатах уравнения допускают интегрирование в элементарных функциях (2.31) при любых значениях параметров a, b, c , вне зависимости от наличия ньютонова предела.

В третьей главе с помощью возмущений уравнений движения (1.40) вблизи фонового решения — плоского пространства Минковского (3.1), исследовались линеаризованные полевые уравнения в скалярном, векторном и тензорном секторах переменных. Это позволило классифицировать переменные теории в каждой из реализаций NGR (классификация приведена в таблице 3.1) и выделить наиболее адекватные модели, непротиворечащие

ОТО в первом порядке малости. К ним относится как случай однопараметрической NGR при $a + b = 2c$, так и модель общего положения, уравнения которой приведены в подразделе 3.5.1 при дополнительных ограничениях на параметры $a \geq \max\{b, -b\}$, $a + b \leq 2c$, исключающих появление духовых мод. Также были указаны две модели, описанные в подразделах 3.5.3 и 3.5.7, в которых метрические переменные в линейном порядке малости ведут себя аналогично ОТО, которые однако имеют проблему «сильной связи».

В четвертой главе были обобщены вычисления третьей главы, исследованы линеаризованные уравнения движения вблизи пространства Фридмана – Робертсона – Уокера в присутствии тензора энергии-импульса идеальной жидкости. В каждой из моделей реализуемых теорией, как и в предыдущей главе, были указано, какие переменные являются динамическими, какие калибровочными, а на какие наложены связи. Классификация переменных приведена в таблице 4.1. Сравнение вышеназванных таблиц приведено ниже в таблице 4.2, откуда можно заключить, что проблема «сильной связи», которая делает невозможным постановку корректной задачи Коши в теории, отсутствует лишь в модели общего положения, однопараметрической NGR, в шестой модели — TEGR (тождественной ОТО) и девятой (заведомо патологической из-за отсутствия гравитационных волн) модели. Таким образом, лишь общая и однопараметрическая реализации теории Хаяши – Ширафуджи имеют перспективы быть разумным обобщением общей теории относительности Эйнштейна.

Модель	Изменения
Общая	Нет изменений
$a + b = 2c$	Нет изменений
$a = b$	Калибровочные вектора становятся ограниченными
$a + b = 0$	Калибровочные вектора и скаляры становятся ограниченными
$a + b = 6c$	Почти нет изменений (за исключением ζ в случае $c_s^2 = \frac{1}{3}$)
$a = b = c$	Нет изменений
$a = b = 3c$	Калибровочные вектора становятся ограниченными
$a = b = 0$	Калибровочные вектора и скаляры становятся ограниченными
$a + b = c = 0$	Нет изменений

Таблица 4.2: Отличия характера степеней свободы в возмущениях над пространством Фридмана по сравнению с возмущениями над пространством Минковского.

Приложение

В работе [21] были получены возмущения уравнений движения способом, отличным от того, что был представлен в главе 4, с помощью конформных преобразований [59] динамической переменной (4.1). Поскольку вычисления производятся с пространственно плоской тетрадой с конформным временем, важно отметить, что она отличается от символа Кронекера лишь множителем $\alpha(t)$. Исследованию конформных и дисформных преобразований в нелинейных обобщениях телепараллельных гравитационных теорий были посвящены работы [60] и [61].

Общий вид конформного преобразования тетрады

$$\hat{e}^a_{\cdot\mu} = e^{\varphi(x)} e^a_{\cdot\mu}, \quad (4.94)$$

где $\varphi(x)$ — гладкая скалярная функция, а $e^a_{\cdot\mu}$ — плоская тетрада, возмущения которой были рассмотрены в главе 3. Поэтому преобразование метрики имеет вид

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi(x)} g_{\mu\nu}, \quad (4.95)$$

тензор и вектор кручения преобразуются по закону

$$\hat{T}^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu} \partial_{\mu} \varphi - \delta^{\alpha}_{\mu} \partial_{\nu} \varphi, \quad \hat{T}_{\mu} = T_{\mu} + 3\partial_{\mu} \varphi. \quad (4.96)$$

Основные объекты (тензор кривизны, обобщенный скаляр кручения, суперпотенциал), используемые в уравнениях движения (1.40), преобразуются следующим образом

$$\hat{K}_{\alpha\mu\nu} = e^{2\varphi} (K_{\alpha\mu\nu} + g_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \varphi - g_{\mu\alpha} \partial_{\nu} \varphi), \quad (4.97a)$$

$$\hat{\mathfrak{T}} = e^{-2\varphi} \left(\mathfrak{T} - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] \left(2T^\mu \partial_\mu \varphi + 3(\partial\varphi)^2 \right) \right), \quad (4.97b)$$

$$\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha\mu\nu} = e^{2\varphi} \left(\mathfrak{S}_{\alpha\mu\nu} - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] (g_{\alpha\nu} \partial_\mu \varphi - g_{\alpha\mu} \partial_\nu \varphi) \right). \quad (4.97c)$$

Поэтому ковариантная дивергенция суперпотенциала и его свертка с тензором конторсии преобразуются в соответствии соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_\mu^{\cdot\nu\alpha} = e^{-2\varphi} & \left(\tilde{\nabla}_\alpha \mathfrak{S}_\mu^{\cdot\nu\alpha} + (\mathfrak{S}_\mu^{\cdot\nu\alpha} + \mathfrak{S}^{\alpha\nu\cdot}) \partial_\alpha \varphi - \right. \\ & \left. - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] \left[\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\nu \varphi - \delta_\mu^\nu \tilde{\square} \varphi - 2(\partial_\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \delta_\mu^\nu (\partial\varphi)^2 - (\partial_\mu \varphi) T^\nu \right] \right), \end{aligned} \quad (4.98a)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\alpha\mu\beta} \hat{\mathfrak{S}}^{\alpha\nu\beta} = e^{-2\varphi} & \left(K_{\alpha\mu\beta} \mathfrak{S}^{\alpha\nu\beta} - (\mathfrak{S}_\mu^{\cdot\nu\alpha} - \mathfrak{S}^{\alpha\nu\cdot}) \partial_\alpha \varphi - \right. \\ & \left. - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] \left[\delta_\mu^\nu (\partial\varphi)^2 - (\partial_\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) + (\partial_\alpha \varphi) K^{\alpha\cdot\nu} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.98b)$$

Это позволяет получить закон преобразования обобщенного тензора Эйнштейна относительно преобразований (4.94)

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{S}}_{\mu\nu} = \mathfrak{S}_{\mu\nu} - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] & \left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \tilde{\square} \varphi - (\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\varphi)^2 \right) + \\ & + 2\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{\cdot\alpha} \partial_\alpha \varphi - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] (K_{\nu\mu}^{\cdot\alpha} \partial_\alpha \varphi - T_\nu \partial_\mu \varphi + g_{\mu\nu} T^\alpha \partial_\alpha \varphi). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Применяя это выражение к пространственно плоской тетрады $\hat{e}_\mu^a = \alpha(t) \delta_\mu^a$, задающей метрику Фридмана, легко заметить, что

$$\partial_\mu \varphi = H \delta_\mu^0, \quad (4.100)$$

откуда непосредственно следуют выражения

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \varphi = \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 H' - H \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^0, \quad \tilde{\square} \varphi = g^{00} H' - H g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^0, \quad (\partial\varphi)^2 = H^2 g^{00}, \quad (4.101)$$

которые позволяют переписать (4.99) для космологических возмущений

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{G}}_{\mu\nu} = & \mathfrak{G}_{\mu\nu} - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] \left(H' (\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - g_{\mu\nu} g^{00}) - H^2 \left(\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{00} \right) \right) + \\ & + H \left(2\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{\dots 0} - \left[\frac{6c - a - b}{2} \right] \left[K_{\nu\mu}^{\dots 0} - T_{\nu} \delta_{\mu}^0 + g_{\mu\nu} T^0 + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^0 \right] \right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Все объекты: $g_{\mu\nu}$, $T_{\alpha\mu\nu}$, $K_{\alpha\mu\nu}$, $\mathfrak{S}_{\alpha\mu\nu}$, $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ в этом выражении были вычислены в главе 3 по возмущениям плоского фона (3.1) во всех пертурбативных секторах.

Список сокращений и условных обозначений

- ОТО - общая теория относительности.
- TEGR - Teleparallel Equivalent of General Relativity (телепараллельный эквивалент общей теории относительности).
- NGR - New General Relativity (Новая теория относительности), но в рамках данного исследования класс этих моделей называются Теорией Хаяши — Ширафуджи.
- $f(T)$ - класс телепараллельных теорий гравитации, где в качестве плотности лагранжиана используют произвольную нелинейную функцию от скаляра кручения (1.23).

Литература

1. *Einstein, A.* Die Feldgleichungen der Gravitation / A. Einstein // *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — 1915. — Pp. 844–847.
2. *Zwicky, F.* On the masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae / F. Zwicky // *The Astrophysical Journal* — 1937. — Vol. 86. — Pp. 217-246.
3. *Hayashi, K.* New general relativity / K. Hayashi and T. Shirafuji. // *Physical Review D* — 1979. — Vol. 19, Iss. 12. — P. 3524.
4. *Hayashi, K.* Addendum to “New general relativity” / K. Hayashi and T. Shirafuji. // *Physical Review D* — 1981. — Vol. 24, Iss. 12. — P. 3312.
5. *Finch, A.* Galactic rotation dynamics in $f(T)$ gravity. / Finch, A., Said, J.L. // *The European Physical Journal C* — Vol. 78, art. num. 560. (2018).
6. *Einstein, A.* Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus / A. Einstein // *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse* — 1928. — Pp. 217–221.
7. *Møller, C.* Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity / C. Møller // *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Skrifter* — 1961. — Vol. 1, no. 10. — Pp. 1–50.

8. Pellegrini, C. Tetrad fields and gravitational fields / C. Pellegrini, J. Plebanski // *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Skrifter* — 1963. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 1–39.
9. Hayashi, K. Extended translation invariance and associated gauge fields / K. Hayashi and T. Nakano // *Progress of Theoretical Physics* — 1967. — Vol. 38. — Pp. 491–507.
10. Aldrovandi, R. Teleparallel Gravity. An Introduction / R. Aldrovandi, J. G. Pereira — Springer Dordrecht, 2013.
11. Maluf, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity / J. W. Maluf // *Annalen der Physik* — 2013. — Vol. 525. — Pp. 339–357.
12. Ferraro, R. Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton / R. Ferraro and F. Fiorini // *Physical Review D* — 2007. — Vol. 75. P. 084031.
13. Linder, E. V. Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe / E. V. Linder // *Physical Review D* — 2010. — Vol. 81. — P. 127301. [Erratum: *Physical Review D* — 2010. — Vol. 82. — P. 109902].
14. Blixt, D. Hamiltonian and primary constraints of new general relativity / D. Blixt, M. Hohmann, C. Pfeifer // *Physical Review D* — 2019. — Vol. 99. — P. 084025.
15. Guzmán, M.J. Classification of primary constraints for new general relativity in the premetric approach / M.J. Guzmán, S. K. Ibraheem // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* — 2021. — Vol. 18, No. supp01. — P. 2140003.

16. *Jiménez, J. B.* Non-linear obstructions for consistent new general relativity / J. B. Jiménez and K. F. Dialektopoulos // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2020. — Vol. 01, no 018.
17. *Shirafuji, T.* Equivalence Principle in the New General Relativity. / T. Shirafuji, G.G.L. Nashed, Y. Kobayashi // *Progress of Theoretical Physics* — 1996. — Vol. 96, Issue 5. — Pp. 933–947.
18. *Kawai T.* Generalized Equivalence Principle in Extended New General Relativity / T. Kawai, K. Shibata, I. Tanaka // *Progress of Theoretical Physics* — 2000. — Vol. 104, Issue 3. — Pp. 505–530.
19. *Golovnev, A.* Static spherically symmetric solutions in new general relativity / A. Golovnev, A. N. Semenova, V. P. Vandeev // *Classical and Quantum Gravity* — 2024. — Vol. 41. — P. 055009.
20. *Golovnev, A.* Gravitational waves in New General Relativity / A. Golovnev, A. N. Semenova and V. P. Vandeev. // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2024. — Vol. 01, no 003.
21. *Golovnev, A.* Conformal Transformations and Cosmological Perturbations in New General Relativity / A. Golovnev, A. N. Semenova, V. P. Vandeev // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2024. — Vol. 04, no. 064.
22. *Golovnev, A.* On the degrees of freedom count on singular phase space submanifolds / A. Golovnev // preprint — 2023. — arXiv:2311.10690
23. *Hehl, F. W.* Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance / F. W. Hehl,

- J. D. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman. // *Physics Reports* — Vol. 258, Iss. 1–2. — Pp. 1–171.
24. *Obukhov, Yu. N.* Metric-affine approach to teleparallel gravity / Yu. N. Obukhov, J.G. Pereira // *Physical Review D* — 2003.— Vol. 67, Iss. 4. — P. 044016.
25. *Bahamonde, S.* Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology / S. Bahamonde, K.F. Dialektopoulos, C. Escamilla Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. Levi Said, J. Mifsud, E. Di Valentino // *Reports on Progress in Physics* — 2023. — Vol. 86 — P. 026901.
26. *Рашиевский, П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашиевский — М.–Л.: Гостехиздат, 1953. — 635 с.
27. *Golovnev, A.* The geometrical meaning of the Weitzenböck connection / A. Golovnev // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* — 2023. — Vol. 20, No. supp01. — P. 2350219.
28. *Golovnev, A.* Foundational issues in $f(T)$ gravity theory A. / A. Golovnev, M.J. Guzmán // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* — 2021. — Vol. 18, No. supp01. — P. 2140007.
29. *Фёдоров Ф. И.* Группа Лоренца / Ф. И. Фёдоров — М.: Наука, 1979. — 384 с.
30. *Krššák, M.* *The covariant formulation of $f(T)$ gravity* / M. Krššák, E. N. Saridakis // *Classical and Quantum Gravity* — 2016. — Vol. 33, no. 11. — P. 115009.

31. *Golovnev, A.* On the covariance of teleparallel gravity theories / A. Golovnev, T. Koivisto, M. Sandstad // *Classical and Quantum Gravity* — 2017. — Vol. 34, no. 14. — P. 145013.
32. *Hohmann, M.* Covariant formulation of scalar-torsion gravity / M. Hohmann, L. Järv, and U. Ualikhanova // *Physical Review D* — 2018. — Vol. 97, Iss. 10. — P. 104011.
33. *Krššák, M.* Teleparallel Theories of Gravity: Illuminating a Fully Invariant Approach / M. Krššák, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Boehmer, A. A. Coley // *Classical and Quantum Gravity* — 2019. — Vol. 36. — P. 183001.
34. *Golovnev, A.* Approaches to Spherically Symmetric Solutions in $f(T)$ Gravity / A. Golovnev, M.J. Guzmán // *Universe* — 2021. — Vol. 7, Issue 5. — P. 121.
35. *Golovnev, A.* Issues of Lorentz-invariance in $f(T)$ gravity and calculations for spherically symmetric solutions / A. Golovnev // *Classical and Quantum Gravity* — 2021. — Vol. 38. — P. 197001.
36. *Golovnev, A.* Non-trivial Minkowski backgrounds in $f(T)$ gravity / A. Golovnev, M.J. Guzmán // *Physical Review D* — 2021. — Vol. 103, Iss. 4. — P. 044009.
37. *Golovnev, A.* Bianchi identities in $f(T)$ gravity: paving the way to confrontation with astrophysics / A. Golovnev, M.J. Guzmán // *Physics Letters B* — 2020. — Vol. 810. — P. 135806.

38. *Bahamonde, S.* Black Holes in $f(T, B)$ Gravity: Exact and Perturbed Solutions / S. Bahamonde, A. Golovnev, M.J. Guzman, J. Levi Said, C. Pfeifer // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2022. — Vol. 01, no 037.
39. *Hayashi, K.* Static, Isotropic Spacetime in New General Relativity / K. Hayashi, T. Shirafuji // *Progress of Theoretical Physics* — 1990. — Vol. 84, Iss. 1. — Pp. 36–40.
40. *Schwarzschild, K.* Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. / K. Schwarzschild // *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* — 1916. — Vol. 3. — Pp. 189–196.
41. *Asuküla, H.* Spherically symmetric vacuum solutions in 1-Parameter New General Relativity and their phenomenology / H. Asuküla, S. Bahamonde, M. Hohmann, V. Karanasou, C. Pfeifer, Joao Luis Rosa // *Physical Review D* — 2024. — Vol. 109, Iss. 6. — P. 064027.
42. *Shapiro, I. I.* Fourth Test of General Relativity / I. I. Shapiro // *Physical Review Letters* — 1964. — Vol. 13, Iss. 26. — P. 789.
43. *Fukui, M.* Axially Symmetric and Stationary Solution of New General Relativity / M. Fukui, K. Hayashi // *Progress of Theoretical Physics* — 1981. — Vol. 66, Iss. 4. — Pp. 1500–1503.
44. *Kawai, T.* A Charged Kerr Metric Solution in New General Relativity / T. Kawai, N. Toma // *Progress of Theoretical Physics* — 1992. — Vol. 87, Iss. 3. — Pp. 583–598.

45. *Kerr, R. P.* Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics / R. P. Kerr // *Physical Review Letters* — 1963. — Vol. 11, Iss. 5. — P. 237.
46. *Fukui, M.* Weak Field Approximation of New General Relativity / M. Fukui, M. Masukawa // *Progress of Theoretical Physics* — 1985. — Vol. 73, Iss. 4. — Pp. 973–978.
47. *Sakane, E.* Energy-Momentum and Angular Momentum Carried by Gravitational Waves in Extended New General Relativity / E. Sakane, T. Kawai // *Progress of Theoretical Physics* — 2002. — Vol. 108, Iss. 4. — Pp. 615–639.
48. *Hohmann, M.* Propagation of gravitational waves in teleparallelgravity theories / M. Hohmann, M. M. Krššák, Ch. Pfeifer, U. Ualikhanova // *Physical Review D* — 2018. — Vol. 98, Iss. 12. — P. 124004.
49. *de Rham, C.* Massive Gravity / C. de Rham // *Living Reviews in Relativity* — 2014. — 17, no 7.
50. *Golovnev, A.* On the Role of Constraints and Degrees of Freedom in the Hamiltonian Formalism / A. Golovnev // *Universe* — 2023. — Vol. 9, Iss. 2. — P. 101.
51. *Jiménez, J. B.* Non-linear obstructions for consistent new general relativity / J. B. Jiménez, K. F. Dialektopoulos // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2020. — Vol. 01, no 018.
52. *Горбунов, Д. С.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горя-

- чего Большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков // Москва, “ЛЕНАНД” 2016.
53. *Горбунов, Д. С.* Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков // Москва, “КРАСАНД” 2010.
54. *Fukui M.* The Homogeneous, Isotropic Universe in New General Relativity / M. Fukui, T. Shirafuji // *Progress of Theoretical Physics* — 1984. — Vol. 71, Iss. 5. — Pp. 1063–1073.
55. *Fukui M.* Bianchi Type-I Universe in New General Relativity / M. Fukui, J. Masukawa, S. Ogino // *Progress of Theoretical Physics* — 1986. — Vol. 76, Iss. 4. — Pp. 938–944.
56. *Mikhial, F.I.* Cosmological application of the New General Relativity / F. I. Mikhial, M. I. Wanas, G. G. L. Nashed // *Astrophysics and Space Science* — 1995. — Vol. 228. — Pp. 255–271.
57. *Golovnev, A.* *Cosmological perturbations in modified teleparallel gravity models* / A. Golovnev, T. Koivisto // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* — 2018. — Vol. 11, no. 012.
58. *Bahamonde, S.* Perturbations in non-flat cosmology for $f(T)$ gravity / S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, M. Hohmann, J. L. Said, C. Pfeifer, E. N. Saridakis // *The European Physical Journal C* — 2023. — Vol. 83, no. 193.
59. *Kroon, J. A. V.* *Conformal Methods in General Relativity* / Juan A. Valiente Kroon // *Cambridge University Press* — 2016.

60. *Wright, M.* Conformal transformations in modified teleparallel theories of gravity revisited / M. Wright // *Physical Review D* — 2016 — Vol. 93, Iss. 10. — P. 103002.
61. *Golovnev, A.* Disformal transformations in modified teleparallel gravity / A. Golovnev, M. Guzmán // *Symmetry* — 2020. — Vol. 12, Iss. 1. — P. 152.