

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**Физический  
ИНСТИТУТ**



*имени  
П.Н.Лебедева*

Российской академии наук

**Ф И А Н**

119991, Москва, ГСП-1  
Ленинский проспект, 53, ФИАН  
Телефоны: +7 (499) 135 14 29  
              +7 (499) 132 65 54  
Телефакс: +7 (499) 135 78 80  
E-mail: office@sci.lebedev.ru  
www.lebedev.ru

"УТВЕРЖДАЮ"  
Заместитель директора  
по научной работе  
Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки  
Физический институт  
имени П.Н.Лебедева РАН  
доктор физ.-мат. наук профессор  
В. А. Рябов

Дата 07 июня 2022 № 11220-9311-735

На № от

### ОТЗЫВ

Ведущей организации "Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН"  
на диссертацию Слепцова Алексея Васильевича  
"Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых  $6j$ -символов",  
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук  
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Квантовые группы выражают симметрии, стоящие за интегрируемостью и рядом ключевых свойств квантовых динамических систем. Диссертация А. В. Слепцова посвящена исследованиям технически сложного, но при этом фундаментально важного элемента теории представлений квантовых групп — так называемым  $6j$ -символам (в классическом варианте известным также из теории углового момента, с применениями в физике от кварков и атомного ядра до атомов и молекул). Полученные автором результаты о  $6j$ -символах применяются также к теории узлов, которая в последние десятилетия стала разделом топологической теории поля и областью теоретической и математической физики, где происходит плодотворный обмен концепциями и результатами между задачами в более традиционной математической постановке и целым рядом физически ориентированных проблем, включающих конформную теорию поля, интегрируемые системы, теории струн и матричные модели. Этим без сомнения определяется актуальность диссертации для развития современной теоретической и математической физики.

Диссертация состоит из Введения, глав 1–5, Заключения и Приложения А.

Во Введении приведен обзор ряда проблем, мотивирующих данное исследование, сформулированы цели и задачи диссертации, заявлены выносимые на защиту резуль-

таты и обоснована их научная новизна и значимость.

В главе 1 используется  $R$ -матричный формализм Решетихина–Тураева и сформулирована гипотеза о том, что для симметрических представлений  $6j$ -символы зацеплений определяются собственными значениями  $R$ -матрицы; в предположении, что эта гипотеза верна, показано, что  $6j$ -символы для  $U_qsl(N)$  сводятся к известным  $6j$ -символам для  $U_qsl(2)$ . В качестве приложения к инвариантам узлов и зацеплений приведено вычисление квантовых инвариантов произвольных трехнитевых зацеплений, “раскрашенных” произвольными симметрическими представлениями. Здесь же представлены найденные автором новые симметрии квантовых инвариантов узлов и зацеплений, а именно, связь между инвариантами, раскрашенными различными представлениями  $sl(N)$ . Развита нетривиальная наблюдение о связи этих симметрий с пертурбативной  $SU(N)$ -теорией Черна–Саймонса и с непертурбативными супергрупповыми  $SU(N + M|M)$ -теориями Черна–Саймонса.

Предмет рассмотрения в главе 2 составляют  $g$ -параметрические крендельные узлы. Предложено построение их квантовых инвариантов из более простых объектов путем “поднятия” склейки крендельных узлов из кос специального вида на уровень корреляторов конформной теории поля. Предложена общая формула для квантовых инвариантов крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями  $sl(N)$ .

В главе 3 изучается специализация квантовых инвариантов на случай так называемых (цветных) полиномов Александера, мыслимых как квантовые средние в соответствующей теории Черна–Саймонса. Зависимость полиномов от “раскрашивающей” группы сконцентрирована в так называемых групповых факторах, для которых автор устанавливает взаимно-однозначное соответствие с подмножеством дисперсионных соотношений в интегрируемой иерархии Кадомцева–Петвиашвили; использование этого соответствия позволяет затем получить достаточно явные формулы для групповых факторов.

Глава 4 посвящена применению результатов автора о квантовых инвариантах узлов и зацеплений и о  $6j$ -символах для проверки условий целочисленности, призванных подтвердить известные нетривиальные гипотезы о топологической струнной дуальности. Эти проверки выполнены в целом ряде сложных случаев, ранее недоступных для вычислений.

Глава 5 посвящена симметриям  $6j$ -символов для различных представлений  $U_qsl(N)$ . Предложены ранее неизвестные (и, возможно, даже не ожидавшиеся) симметрии  $6j$ -символов: нетривиальные обобщения симметрий тетраэдра и Редже для  $U_qsl(2)$ , а кроме них — бесконечное семейство симметрий. (Симметрия понимается как отображение между наборами представлений, оставляющее  $6j$ -символ неизменным.) Применяя симметрии, автор получает возможность вычислять ранее неизвестные  $6j$ -символы для различных классов представлений  $U_qsl(N)$  при  $N \geq 3$ . Здесь также исследована связь  $6j$ -символов с  $q$ -гипергеометрическими функциями.

Заключение содержит выносимые на защиту результаты, дублируя (в значительной

части дословно) текст из Введения. В Приложении А, к которому автор неоднократно обращается, собраны необходимые сведения из теории узлов.

Главным и существенным недостатком диссертации является сам текст диссертации. Он изобилует несогласованиями в падеже и роде, типичны такие фразы, как “собственные значения квантового  $R$ -матрица, составленного из . . .” (с. 83). Путаются слова “отношение” и “соотношение” (с. 80), “величины” названы “количествами”, сокращения (такие как ЛМОВ) многократно употребляются без указания, как они раскрываются, ряд определений повторяется более одного раза, с легкой вариацией в обозначениях (например, определение квантового следа на с. 52 и с. 80; формулы для собственных значений  $R$ -матриц сообщаются многократно).

Имеются значительные проблемы с используемыми терминами. Например, в пределах одного абзаца из шести строк на с. 51 зацепление названо *ссылкой*, затем *звенком* и далее *связкой*, без каких-либо пояснений (но в комбинации с оборотом “пусть бета – неким коса”). “Ссылка” в значении “зацепление” используется в тексте еще несколько раз (например, на с. 57 и с. 99) и прилагательное “связный” также используется в отношении зацеплений.

Интригует фраза “для достаточно больших  $k$ , превышающих  $A$ -способности определенных  $h_Q(A, q)$ , не может быть одного звонка, . . .” (с. 185); при этом в диссертации не дается определений *A-способностей* и *звонка*. Симметрическая группа  $S_n$  часто называется симметричной (аналогичная путаница имеется с представлениями). Загадкой остается термин “отступы  $S_n$ ” (с. 177) и “преобразование пробелов в производящие функции” (с. 178).

Значительные по объему части диссертации написаны в стиле, оставляющем неясным, является ли приводимое высказывание следствием из предыдущего, констатацией известного из литературы факта, или утверждением автора, доказательство которого должно последовать или, быть может, только что было дано. Например, из фразы “Как результат, запишем следующую производящую функцию [формула (3.11)]” неясно, в каком смысле запись является результатом, и результатом чего именно. Аналогичным образом, фраза “можно записать набор ограничений на представления” (с. 59) никак не поясняет, откуда следуют приводимые (и существенные для дальнейшего) ограничения.

Формула (2.20), помещенная в рамку на с. 89, характеризуется там как “Наш основной результат”. Но на с. 100 эта же формула (2.20) названа “нашей основной гипотезой”. Подобные неоднозначности в модальности затрудняют восприятие как текста самого по себе, так и полученных автором результатов.

Глава 3 отличается характером изложения: там появляются определения, леммы, предложения и теоремы, следствия, замечания и отчетливо сформулированные гипотезы, а утверждения сопровождаются доказательствами. Не вполне ясно, чем определяется переход на страницах 116–137 от относительно неразделенного потока текста к более структурированному стилю, которого снова лишена следующая глава 4.

Разбивка текста на леммы и предложения возобновляется в главе 5, однако там это

отчасти способствует усилению хаоса: гипотеза о собственных значениях формулируется *заново* как Гипотеза 3 (с. 242), как будто она не обсуждалась в предшествовавшей части диссертации; определение матриц Рака дается так, как будто они не появлялись ранее в диссертации;  $6j$ -символы (называемые здесь  $6-j$  символами) определяются так, как будто не им уже была посвящена большая часть диссертации (кроме того, в главе 5 упоминаются полиномы Александера и их связь с КП-иерархией, а также ряд других тем, так, как будто они не фигурировали в предыдущих главах). Здесь же, в главе 5, заново определены симметрии Редже и симметрии тетраэдра, заново даны определения широко использовавшихся ранее квантовых целых, и заново определены  $R$ -матрицы, фигурировавшие уже в заглавии главы 1. Более того, в рамках одной только главы 5 гипотеза о собственных значениях обсуждается дважды без очевидной связи двух экскурсов, *и определения коэффициентов Рака и  $6j$ -символов даны дважды*: это Определения 7 и 8 (с. 207) и Определения 16 и 17 (с. 239). Связь между  $6j$ -символами для  $U_qsl(N)$  и  $U_qsl(2)$  обсуждается в главе 5 без отсылки к предыдущим главам диссертации.

В главе 5 дано *доказательство* гипотезы о собственных значениях для симметрических представлений; было бы нелишним обсудить возможные следствия отсюда для рассмотрения в главе 1, где симметрические представления явным образом присутствуют, но, например, результату в рамке в формуле (1.47) предпослано замечание “Если гипотеза о собственных значениях верна, ...”.

В главу 4 включены, как сказано на с. 174, “две части из учебников”. Неясно, каким образом обзорно-педагогический материал разделов 4.7.1 и 4.7.2 связан с результатами диссертации. Значительная часть главы 4 посвящена наблюдениям автора о гауссовском распределении вычисленных им “чисел ЛМОВ”, однако ни указанные числа, ни гипотеза о гауссовом распределении, ни гипотеза о топологической струнной дуальности, занимающая заметное место в главе 4, не упомянуты среди результатов диссертационной работы. Ни в результатах, ни во Введении в диссертацию не упомянуты тау-функция и преобразование Гурвица, которым посвящено немало места в главе 4.

В целом непростой задачей при чтении диссертации является установление корреляции между ее результатами, сформулированными на с. 39–41, и теми частями текста, из которых эти результаты происходят. Помощь в этом можно получить из “схемы” изложения, занимающей семь страниц 43–49: там собраны логические связи и содержательные пояснения, как будто бы *изъятые* из основного текста.

Небрежности обнаруживаются повсеместно и на разных уровнях: в тексте диссертации говорится об ограничении, “которое было опущено в основном тексте” (с. 95); на с. 64 предлагается “использовать результаты разделов 3 и 4”, но в диссертации есть только глава 3 и глава 4, относящиеся к другому кругу вопросов. В разделе 4.1 имеется указание “см. Раздел 3.5 ниже”. Неоднократно приводятся отсылки к материалу из введения, которого введение в диссертацию не содержит; несколько замечаний типа

“проблема будет подробно изучена в одной из следующих статей” (с. 76) оставляют неясным вопрос об отношении этих статей к диссертации.

В главе 4 сказано, что “данные о цветных полиномах узлов собраны на нашем веб-сайте [150]”; данная ссылка указывает на веб-сайт [Knotebook.org](http://Knotebook.org), а там в разделе “Current participants of the project” в настоящий момент указаны 15 участников, в связи с чем полезны были бы пояснения о “нашем” сайте. На с. 154 заявлено также, что приведенные на сайте “таблицы ЛМОВ - это в точности результаты настоящей работы”, что едва ли должно относиться ко всем результатам диссертации.

В оформлении литературы формат “Автор–Заглавие” произвольно чередуется с форматом “Заглавие/Автор”; при цитировании ряда работ ([43], [48], [50], [219]), на которые, согласно перечислению работ диссертанта на с. 42, опирается диссертация, фамилии *и самого диссертанта*, и некоторых соавторов почему-то не приведены, а заменены сокращением “et al.”

Указанные недостатки не меняют положительной оценки результатов работы, без сомнения являющихся новыми и актуальными. Все основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых международных журналах и доложены на представительных конференциях. Автореферат верно отражает содержание. Таким образом, диссертация Алексея Васильевича Слепцова “Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых  $6j$ -символов” отвечает всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а ее автор заслуживает присуждения искомой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Отзыв составил главный научный сотрудник  
лаборатории теории фундаментальных взаимодействий  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН  
доктор физ.-мат. наук  
Тел: +7(499) 132-67-20  
Email: asemikha@lpi.ru

А. М. Семихатов

Результаты диссертации были рассмотрены и одобрены на семинаре в Отделении теоретической физики имени И.Е.Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН.

Отзыв одобрен на заседании Ученого совета Отделения теоретической физики имени И.Е.Тамма.

Ученый секретарь  
Отделения теоретической физики имени И.Е.Тамма  
доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник

А. А. Полежаев

Список научных работ сотрудников Отделения теоретической физики имени И.Е.Тамма  
Физического института имени П.Н.Лебедева РАН

- 1) Bulgakova D.V., Kiselev A.M., Tipunin I.Y.  
Bimodule structure of the mixed tensor product over  $U_q\mathfrak{sl}(2|1)$  and quantum walled Brauer algebra  
(2018) Nuclear Physics B, 928, pp. 217 - 257
- 2) Didenko V.E., Gelfond O.A., Korybut A.V., Vasiliev M.A.  
Homotopy properties and lower-order vertices in higher-spin equations  
(2018) Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51 (46), art. no. 465202
- 3) Alkalaev K., Belavin V.  
Large-c superconformal torus blocks  
(2018) Journal of High Energy Physics, 2018 (8), art. no. 42
- 4) Metsaev R.R.  
Continuous-spin mixed-symmetry fields in AdS(5)  
(2018) Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51 (21), art. no. 215401
- 5) Feigin E., Makedonskyi I., Orr D.  
Generalized Weyl modules and nonsymmetric q-Whittaker functions  
(2018) Advances in Mathematics, 330, pp. 997 — 1033
- 6) Alkalaev K., Grigoriev M.  
Continuous spin fields of mixed-symmetry type  
(2018) Journal of High Energy Physics, 2018 (3), art. no. 30
- 7) Metsaev R.R.  
BRST-BV approach to continuous-spin field  
(2018) Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics, 781, pp. 568 - 573
- 8) Hoare B., Levine N., Tseytlin A.A.  
On the massless tree-level S-matrix in 2d sigma models  
(2019) Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52 (14), art. no. 144005
- 9) Bershtein M.A., Gavrylenko P.G., Marshakov A.V.  
Cluster Toda Chains and Nekrasov Functions  
(2019) Theoretical and Mathematical Physics, 198 (2), pp. 157 — 188
- 10) Goncharov Y.O., Vasiliev M.A.  
Scattering amplitudes as multi-particle higher-spin charges in the correspondence space  
(2019) Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52 (38), art. no. 384006
- 11) Batalin I.A., Bering K., Lavrov P.M., Tyutin I.V.  
Multiplicative Renormalizability of Yang-Mills Theory with the Background Field Method in the BV Formalism  
(2020) Theoretical and Mathematical Physics, 202 (1), pp. 30 — 40
- 12) Metsaev R.R.  
Cubic interactions of arbitrary spin fields in 3d flat space  
(2020) Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 53 (44), art. no. A17
- 13) Bulgakova D.V., Ogievetsky O.  
Fusion procedure for the walled Brauer algebra  
(2020) Journal of Geometry and Physics, 149, art. no. 103580
- 14) Gelfond O.A., Vasiliev M.A.  
Spin-locality of higher-spin theories and star-product functional classes  
(2020) Journal of High Energy Physics, 2020 (3), art. no. 2
- 15) Ogievetsky O., Pyatov P.  
Quantum matrix algebras of BMW type: Structure of the characteristic subalgebra  
(2021) Journal of Geometry and Physics, 162, art. no. 104086