О Т З Ы В

официального оппонента Спиридонова В.П. на диссертацию Слепцова Алексея Васильевича “Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых $6j$-символов”, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — “Теоретическая физика”.

В настоящее время теория узлов является одним из составных элементов теоретической физики. В частности, она входит в качестве важной компоненты в квантовую теорию поля в трехмерном пространстве-времени. Как показано в работе Э. Виттена 1989 г., вакуумное среднее Вильсоновской петли в трехмерной теории Черна-Саймонса для фундаментального представления калибровочной группы SU(2), вычисленной по контуру узла, совпадает с многочленом Джонса – инвариантом, различающим определенные классы узлов. Этот результат дал мощный толчок к развитию квантовополевого подхода к теории узлов. Одним из результатов в этом направлении является построение инвариантов Кашаева-Хиками с помощью модулярного дилогарифма Фаддеева, в котором с каждым узлом K ассоциируется определеная статистическая сумма, построенная в виде интеграла от специальной комбинации модулярных дилогарифмов. Оказывается, что эта статистическая сумма совпадает с суперсимметричной статистической суммой теорий поля на трехмерной сплющенной сфере (эллипсоиде) S_b^3, где b – параметр сплющивания S^3, совпадающий с модулярным параметром квантового дилогарифма.

С математической точки зрения задача построения явных полных инвариантов узлов и зацеплений является одной из центральных задач трехмерной топологии, а гипотеза Кашаева о связи асимптитоки квантовых инвариантов Кашаева-Хиками с объемом соответствующих гиперболических многообразий S^3/K считается наиболее важной в этом разделе математики. Представление узлов и зацеплений в виде различных замыканий кос устанавливает также связь с группой кос и уравнением Янга-Бакстера.

В представленной диссертации Слепцова А.В. последовательно рассматриваются определенные стороны проблемы построения полных инвариантов узлов, различающих все узлы. Эта проблема крайне сложная и до настоящего времени она еще не нашла эффективного решения, соответственно, любой прогресс в ее исследовании является важным результатом и привлекает большое внимание.

Основными объектами, использованными автором диссертации для построения квантовых инвариантов узлов, являются квантовая алгебра $U_q(sl_N)$ и ее конечномерные представления, соответствующие $6j$-символы и решения уравнения Янга-Бакстера. В свою очередь, явные конструкции, получаемые на переплетении этих понятий связаны со специальными функциями математической физики, в частности, с q-гипергеометрическими рядами и классическими ортогональными многочленами. Необходимо отметить, что наиболее популярные $6j$-символы для алгебры $su(2)$ построены Рака в теории атомных спектров, и они определяют самые общие дискретные ортогнальные многочлены, основанные на чисто гипергеометрических рядах. Этот факт иллюстрирует довольно распространенное явление, что новые математические конструкции появляются из чисто практических задач.

Диссертация Слепцова А.В. в целом написана как некая энциклопедия теории узлов и зацеплений и их взаимосвязей с теоретической и математической физикой. Помимо описания оригинальных результатов автора, в ней содержится широкий обзор литературы, состоящий из 332 источников, достаточно подробное описание методов исследования узлов, известных результатов и их применений в различных разделах естествознания, что в итоге вылилось в 311 страниц текста.

Рассмотрим основные положения диссертации Слепцова А.В. Во введении диссертации, а также в приложении, дается обзор теории узлов и зацеплений и проблемы построения инвариантов узлов, перечисляются методы построения и исследования этих инвариантов и связанные конструкции, такие как уравнение Янга-Бакстера и $6j$-символы классических и квантовых алгебр, а также дается обзор литературы.

В первой главе диссертации описывается построение многочленов ХОМФЛИ, зависящих от двух переменных q и A, с помощью формализма Решетихина-Тураева, использующего представление узлов в виде замкнутой переплетенной m-прядной косы. Этот многочлен задается квантовым следом произведения универсальных R-матриц для квантовой алгебры $U_q(sl_N)$, умножаемых по правилам переплетения косы. При этом квантовый след равен обычному следу при дополнительной вставке ключевого теоретико-группового оператора, обозначенного $K_{2\rho}$ (формула (1.8)). При вычислении следа произведения R-матриц, в раскрашенном m-кратном тензорном произведении представлений эти R-матрицы описываются единичным оператором на неприводимых представлениях и имеют нетривальный вклад в пространствах кратностей, а $K_{2\rho}$, наоборот, одинаков для всех кратных представлений и диагонален на неприводимых представлениях. Соотвественно, вычисляемые следы факторизуются на произведение следа по пространствам кратностей от произведения R-матриц на след $K_{2\rho}$ по неприводимимым представлениям, для которых имеется точная формула в терминах многочленов Шура при специальных значениях аргументов. Для вычисления следов произведений R-матриц используется диагонализация этих матриц с помощью $6j$-символов Рака-Вигнера при точно известном виде их собственных значений. При этом важную роль играет гипотеза о собственных значениях R-матриц, гласящая, что знание собственных значений трех R-матриц, вовлеченных в определение $6j$-символов, позволяет однозначно восстановить вид соответствующих $6j$-символов. Данный рецепт построения ХОМФЛИ-многочленов явно проиллюстрирован на примере трехнитевых зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями. Кроме этого, в данной главе обсуждается симметрия “тяни-крюк” многочленов ХОМФЛИ и ее связь с супергрупповыми инвариантами узлов и зацеплений.

Существует классификация примарных узлов (т.е. некомпозитных узлов, которые не разбиваются на нетривиальные независимые узлы разрезанием двух линий и склеиванием линий распавшихся частей) на различные непересекающиеся классы. Среди них выделенную роль играют торические узлы, получающиеся намотками на тор, которые полностью различаются уже многочленами Джонса (включая зеркальные отраженные узлы). Их естественными обобщениями являются крендельные узлы, использующие правила намотки на римановы поверхности произвольного рода – таким узлам посвящена вторая глава диссертации. Проблема вычисления многочленов ХОМФЛИ для них и поиск их симметрий является сложной технической задачей, требующей развития новых эффективных методов расчета. Автором дано исчерпывающее описание ХОМФЛИ многочленов для крендельных узлов в случае раскрашивания фундаментальным представлением. А основным результатом главы является получение явного комбинаторного вида этих многочленов для крендельных зацеплений, раскрашенных произвольными симметрическими представлениями (формула (2.20)). Одновременно, этот результат простым образом переносится и на многочлены ХОМФЛИ для антисимметричных представлений. Это важное достижение диссертации, приведшее к систематическому расширению расчетов таких многочленов, проведенных ранее для спорадических примеров крендельных узлов и зацеплений.

В третьей главе проводится пертурбативный анализ инвариантов и обсуждаются многочлены Александера как предельная форма ХОМФЛИ-многочленов (предел параметра $A \to 1$), проблема вычисления соответствующих групповых инвариантов, система уравнений Александера, и связь с иерархией интегрируемых уравнений Кадомцева-Петвиашвили. В частности, установлено соответствие между многочленами Александера для специальных представлений с дисперсионными соотношениями односолитонной тау-функции КП-иерархии.

Что касается четвертой главы, в ней обсуждается гипотеза дуальности теории Черна-Саймонса с топологической теорией струн. Эта связь позволяет с помощью инвариантов узлов проверять целочисленность параметров N_{LMOV}, предположительно перечисляющих число BPS-состояний в топологической струне. Формула (4.58) описывает прямую связь генерирующей функции ХОМФЛИ многочленов с плетистической экспонентой, возникающей в теории струн, в которой фигурируют разложения по степеням A, роду римановой поверхности g и диаграммам Юнга фигурирующих представлений с коэффициентами, определяющими числа N_{LMOV}. Приводятся результаты численных расчетов в пользу гипотезы о гауссовом распределении N_{LMOV} по роду g (формула (4.60)). Данное интересное наблюдение еще не получило своего теоретического объяснения.

В пятой главе диссертации обсуждаются $6j$-символы Рака-Вигнера двух типов, в которых фигурируют только симметрические и сопряженные к ним представления квантовой алгебры $U_q(sl_N)$. Показано, что в этих случаях эти символы сводятся к $6j$-символам квантовой алгебры $U_q(sl_2)$, определяемых обрывающимися q-гипергеометрическим рядами ${}_4\Phi_3$ с различными параметризациями аргументов (формула (5.41)). Последние ряды описывают дискретные ортогональные многочлены q-Рака - классические специальные функции самого общего типа в своем классе, построенные Аски и Вильсоном. Кроме того, представлены новые симметрии вычисленных $6j$-символов и доказательство гипотезы о собственных значениях в простейшем случае алгебры $U_q(sl_2)$. Полученные $6j$-символы позволяют вычислить многочлены ХОМФЛИ для произвольной трехнитевой косы и крендельных узлов.

Диссертация Слепцова А.В. представляет собой цельный труд, содержащий важный вклад в различные разделы теоретической и математической физики. Полученные результаты носят теоретический характер – они могут найти реальные применения в исследованиях, проводимых в ИППИ РАН (г. Москва), отделе теоретической физики МИ РАН им. В.А. Стеклова (г. Москва) и лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН (г. Санкт-Петербург), МГУ (г. Москва), Лаборатории теоретической физики ОИЯИ (г. Дубна) и других научных учреждениях.

В качестве недостатков отметим несколько рыхлый характер текста – некоторые вопросы излагаются достаточно подробно (но чрезмерно детально представлены несколько таблиц), а некоторые факты представлены весьма беглым образом. В частности, не приводится определение квантовой алгебры $U_q(sl_N)$, имеется множество технических опечаток и грамматических ошибок, имеются текстовые вкрапления на английском языке. Во многих местах обозначения для второго параметра многочленов ХОМФЛИ используется то символ "A", то "a". В списке литературы отсутствуют ссылки на русском языке на многие публикации в российских изданиях. В качестве комментария укажем, что в привязке к узлам в литературе (и в даной диссертации) рассматриваются только конечномерные представления алгебры $U_q(sl_2)$, в то время как более общая ситуация имеет место с модулярным дублем Фаддеева $U_q(sl_2) \times U_{\tilde{q}}(sl_2)$, у которого более богатая структура представлений. Естественным является вопрос привносит ли использование новых представлений дополнительные характеристики в инварианты узлов? Тем более, что инварианты Кашаева-Хиками в скрытой фоме основываются именно на модулярном дубле Фаддеева. Перечисленные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на качество научной части диссертации.

Результаты, полученные автором, были доложены на международных конференциях и семинарах многих институтов как в России, так и за рубежом. Все результаты представлены в статьях, опубликованых в престижных зарубежных и российских изданиях. Автореферат правильно передает содержание диссертации. Слепцов А.В. – хорошо известный специалист в теории узлов и в практических расчетах, связанных с ней. Результаты диссертации получили международное признание и активно цитируются в литературе, автор внес основной вклад в их разработку. Сама диссертация представляет собой тщательную научную работу, которую можно оценить как крупное продвижение в развитии теории узлов и ее применения в квантовой теории поля.

Рассматриваемая диссертационная работа "Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых $6j$-символов" полностью удовлетворяет всем критериям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук по специальности 01.04.02 - «Теоретическая физика», а ее автор Слепцов Алексей Васильевич, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук, начальник
сектора Лаборатории теоретической физики,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Ж. Кюри 6, г. Дубна, Московская обл., 141980
тел.: +74962163332, e-mail: spiridon@theor.jinr.ru

Вячеслав Павлович Спиридонов
14 июня 2022 г.

Подпись д.ф.-м.н. В.П. Спиридонова заверяю,

Ученый секретарь Лаборатории
теоретической физики ОИЯИ

А.В. Андреев

Спиридонов Вячеслав Павлович
доктор физико-математических наук, специальность 01.01.03-математическая физика
Список основных публикаций по теме диссертации А.В.Слепцова:

1. Brünner F., Regalado D., Spiridonov V. P. Supersymmetric Casimir energy and SL(3,Z) transformations //Journal of High Energy Physics. – 2017. – Т. 2017. – №. 7. – С. 1-21.
2. Spiridonov V. P. Rarefied elliptic hypergeometric functions //Advances in Mathematics. – 2018. – Т. 331. – С. 830-873.
3. Brünner F., Spiridonov V. P. 4d N = 1 quiver gauge theories and the An Bailey lemma //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 3. – С. 1-30.
4. Sarkissian G., Spiridonov V. P. From rarefied elliptic beta integral to parafermionic star-triangle relation //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 10. – С. 1-15.
5. Деркачёв С. Э., Спиридонов В. П. О 6j-символах для группы SL(2,C) //Теоретическая и математическая физика. – 2019. – Т. 198. – №. 1. – С. 32-53.
6. Spiridonov V. P. The rarefied elliptic Bailey lemma and the Yang–Baxter equation //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2019. – Т. 52. – №. 35. – С. 355201.
7. Спиридонов В. П. Суперконформные индексы, дуальности Зайберга и специальные функции //Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2020. – Т. 51. – №. 4. – С. 556-567.
8. Sarkissian G. A., Spiridonov V. P. The endless beta integrals //SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2020. – Т. 16. – С. 074.
9. Саркисян Г. А., Спиридонов В. П. Общий модулярный квантовый дилогарифм и бета-интегралы //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2020. – Т. 309. – №. 0. – С. 269-289.
10. Саркисян Г. А., Спиридонов В. П. Модулярная группа и гиперболический бета-интеграл //Успехи математических наук. – 2020. – Т. 75. – №. 3 (453. – С. 187-188.
11. Спиридонов В. П. Автомодельные потенциалы в квантовой механике и когерентные состояния //Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2021. – Т. 52. – №. 2. – С. 274-289.
12. Саркисян Г. А., Спиридонов В. П. Рациональные гипергеометрические тождества //Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55. – №. 3. – С. 91-97.
13. Деркачёв С. Э., Саркисян Г. А., Спиридонов В. П. Эллиптическая гипергеометрическая функция и 6j-символы для группы SL(2,C) // Теоретическая и математическая физика. – 2022. – в печати.