

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

На правах рукописи

Слепцов Алексей Васильевич

**Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых  
6j-символов**

01.04.02 — «Теоретическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Глава 1. <math>\mathcal{R}</math>-матричный формализм и новые симметрии</b> . . . . .	<b>50</b>
1.1 Инварианты зацеплений из квантовых групп . . . . .	50
1.1.1 $\mathcal{R}$ -инварианты матрицы и зацепления . . . . .	50
1.1.2 Квантовые $6\text{-}j$ символы . . . . .	53
1.1.3 $\mathcal{R}$ -матрицы через матрицы Рака . . . . .	54
1.1.4 Гипотеза о собственных значениях . . . . .	56
1.1.5 Знаки собственных значений . . . . .	57
1.2 Трехнитевая коса, раскрашенная симметрическими представлениями . . . . .	58
1.2.1 Ограничения на представления . . . . .	59
1.2.2 Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц . . . . .	60
1.3 $6j$ -символы $U_q(sl_2)$ . . . . .	62
1.4 Цветные многочлены ХОМФЛИ для трехнитевых зацеплений . . . . .	63
1.4.1 Зацепление $L_7a_3$ . . . . .	63
1.5 Симметрия тяни-крюк . . . . .	66
1.6 Супергрупповые инварианты узлов . . . . .	70
1.6.1 Пертурбативный анализ полинома Александра . . . . .	74
1.7 Гипотеза о собственных значениях . . . . .	77
<b>Глава 2. Крендельные узлы и <math>6j</math>-символы</b> . . . . .	<b>82</b>
2.1 Подготовительные примеры . . . . .	84
2.1.1 Род $g = 1$ , фундаментальное представление, две параллельные нити . . . . .	84
2.1.2 Род $g = 1$ , фундаментальное представление, антипараллельные нити . . . . .	86
2.1.3 ХОМФЛИ в фундаментальном представлении произвольного рода . . . . .	86
2.2 Основной результат: произвольное симметрическое представление $[r]$ . . . . .	89

2.3	Комментарии к главному результату (2.20) . . . . .	93
2.4	Матрицы $a_{km}$ и $\bar{a}_{km}$ как универсальные матрицы Рака . . . . .	96
2.5	Какие узлы и зацепления принадлежат семейству рода $g$ . . . . .	99
<b>Глава 3. Пертурбативный анализ, инварианты Васильева и</b>		
	<b>связь с интегрируемыми иерархиями . . . . .</b>	<b>106</b>
3.1	Введение . . . . .	106
3.2	Основные результаты . . . . .	111
3.3	Полином Александера . . . . .	114
3.4	Уравнения Александера . . . . .	116
3.4.1	Уравнения . . . . .	116
3.4.2	Свойства уравнений Александера . . . . .	118
3.4.3	Групповые факторы полинома Александера . . . . .	123
3.4.4	Суперсимметричные полиномы . . . . .	124
3.5	Иерархия КП . . . . .	125
3.6	Иерархия КП и решения уравнений Александера . . . . .	129
<b>Глава 4. Приложение к вычислению инвариантов ЛМОВ . . . . .</b>		
4.1	Введение . . . . .	138
4.2	Гипотеза ЛМОВ: условия целочисленности . . . . .	144
4.2.1	Гипотеза целочисленности в случае полиномов ХОМФЛИ . . . . .	144
4.2.2	Гипотеза целочисленности в случае полиномов Кауффмана . . . . .	149
4.2.3	База данных цветных полиномов узлов . . . . .	153
4.3	Проверки гипотез о целочисленности . . . . .	154
4.3.1	$SU(N)$ теория Черна-Саймонса . . . . .	154
4.3.2	$SO/Sp$ теория Черна-Саймонса . . . . .	159
4.3.3	Полиномы зацеплений . . . . .	162
4.3.4	Матрицы Рака для зацеплений . . . . .	163
4.4	Новые свойства чисел ЛМОВ . . . . .	167
4.5	Теоретические основы . . . . .	173
4.5.1	Подсчет состояний . . . . .	173
4.5.2	Плетистические экспоненты . . . . .	175
4.5.3	Исчисление симметрической группы . . . . .	176
4.5.4	Гауссово распределение . . . . .	180

	Стр.
4.6 Экспериментальные свидетельства . . . . .	182
4.6.1 Гауссова зависимость от $g$ . . . . .	183
4.6.2 Зависимость от $n$ . . . . .	184
4.6.3 Отклонения от гауссовости при малых представлениях $Q$ : $g$ -распределения . . . . .	186
4.6.4 $\mu$ , $\sigma$ и $I$ как функции от $n$ . . . . .	187
4.6.5 $\mu$ и $\sigma$ как функции узлов . . . . .	188
4.7 Изобилие и происхождение гауссовых кривых . . . . .	192
4.7.1 Роль полиномиальности . . . . .	192
4.7.2 "Игрушечный" пример: квантовые числа . . . . .	194
4.7.3 Другие примеры: отношения квантовых чисел . . . . .	195
4.7.4 Гауссовость мутантной разницы . . . . .	196
4.7.5 Теоретическое объяснение и оценка: гауссовские параметры относительно узла . . . . .	198
4.7.6 Остающаяся загадка . . . . .	201
<b>Глава 5. Симметрии и соотношения <math>6_j</math>-символов . . . . .</b>	<b>204</b>
5.1 Введение . . . . .	204
5.2 Коэффициенты Рака, $6_j$ символы и выражения типа I и II . . . . .	206
5.3 Гипергеометрическое выражение для $6_j$ символа . . . . .	213
5.3.1 $q$ -гипергеометрические симметрии . . . . .	213
5.3.2 $6_j$ символ как ряд ${}_5\Phi_4$ . . . . .	214
5.3.3 $6_j$ символ как ряд ${}_4\Phi_3$ . . . . .	216
5.4 Связь с $6_j$ символами $U_q(sl_2)$ . . . . .	220
5.5 Асимптотики $6_j$ символа . . . . .	222
5.6 Вывод симметрий . . . . .	224
5.6.1 Гипергеометрическая группа симметрий . . . . .	224
5.6.2 Внутренние симметрии типа I . . . . .	228
5.6.3 Внутренние симметрии типа II . . . . .	231
5.6.4 Внешние симметрии типа I . . . . .	232
5.6.5 Внешние симметрии типа II . . . . .	234
5.7 $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы, коэффициенты Рака и гипотеза о собственных значениях . . . . .	237
5.7.1 $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы и коэффициенты Рака . . . . .	237

	Стр.
5.7.2 Инклюзивные и эксклюзивные коэффициенты Рака . . . . .	239
5.7.3 Гипотеза о собственных значениях . . . . .	240
5.8 Гипотеза о собственных значениях для симметрических представлений . . . . .	242
5.9 Доказательство гипотезы о собственных значениях для $U_q(sl_2)$ . . . . .	247
5.9.1 набросок доказательства . . . . .	248
5.10 Симметрии для симметрических представлений $U_q(sl_N)$ . . . . .	254
5.10.1 вывод симметрий (5.121) . . . . .	258
5.10.2 Другой подход к выводу (5.121) . . . . .	263
5.11 Симметрии для эксклюзивного случая $U_q(sl_N)$ . . . . .	265
5.11.1 Симметрическое $R_4$ . . . . .	265
5.11.2 $R_4$ – комбинация симметрического и сопряженного к симметрическому . . . . .	266
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>268</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>272</b>
<b>Приложение А. Элементы теории узлов . . . . .</b>	<b>301</b>

## Введение

### **Актуальность и современное состояние исследований.**

Данная диссертация посвящена квантовым инвариантам узлов и квантовым  $b_j$ -символам – объектам, которые связывают квантовую теорию поля, конформную теорию поля, маломерную топологию, теорию групп, теорию интегрируемых систем, теорию струн и ряд других разделов теоретической физики и фундаментальной математики. Очертим круг научных задач и проблем, которых касается исследование, и объясним, как именно связаны вышеперечисленные разделы друг с другом. Также мы обсудим о каких именно симметриях идет речь, и почему они важны.

Квантовая теория поля является единой теорией, совмещающей квантовую механику, теорию поля и специальную теорию относительности. Она с успехом применяется для описания физики микромира. Например, исследования в области физики высоких энергий привели к построению красивой и стройной квантовой теории поля – Стандартной модели, которая описывает сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия на определенной шкале энергий. Любая квантовая теория поля содержит 3 типа вводных данных, которые в конечном итоге и определяют физику задаваемой системы: поля, константы взаимодействия и симметрии. Поля определяют состав частиц в модели, константы взаимодействия определяют силу взаимодействия между частицами, а симметрии генерируют законы сохранения. Если все эти данные заданы, то вся физика в рассматриваемой модели определена. Однако несмотря на то, что так определить физическую систему совсем не сложно, ее изучение может оказаться задачей не из простых. Рассмотрим, в чем конкретно эта задача заключается, и какие сложности возникают на пути ее решения.

Задача заключается в том, чтобы найти все наблюдаемые в рассматриваемой квантовой теории, изучить их динамику и сравнить с экспериментом. Для того чтобы вычислить наблюдаемые в квантовой теории поля, существуют различные методы, которые постоянно совершенствуются. Все эти методы можно разбить на два класса: пертурбативные и непертурбативные. Пертурбативные основаны на приближенном вычислении поправок к точно решаемой упрощенной задаче. Для возможности применения таких методов необходимо наличие малых величин в рассматриваемой задаче. Как правило, в качестве ма-

лых величин выступают константы связи. В таком случае говорят, что теория находится в режиме слабой связи. Многие физически наблюдаемые процессы и эффекты могут быть описаны с высокой точностью пертурбативно, например, лэмбовский сдвиг или эффект Комптона [244; 318; 330]. Однако у этого подхода есть три недостатка. Во-первых, эффект описывается только приближенно. Во-вторых, существуют эффекты, которые невозможно описать пертурбативно, например, топологические эффекты типа инстантонов и монополей [3; 251] или эффект Швингера рождения пар в сильном электрическом поле [290]. В-третьих, в некоторых теориях, например, в квантовой хромодинамике на больших расстояниях нет малой константы связи и выполнить разложение в ряд математически невозможно. В таких случаях необходимо вычислять наблюдаемые непертурбативно.

Общий рецепт для проведения непертурбативных вычислений пока неизвестен, однако известен общий принцип – надо использовать симметрии данной физической системы. Чем больше симметрий, тем меньше функций, через которые наблюдаемая может быть выражена и тем проще производить функциональное интегрирование, которое в некоторых случаях может превратиться в конечномерное интегрирование (например, двумерная теория Янга-Миллса [100] или бозонная теория струн [30; 250; 251]) или вообще в конечную сумму (например, локализация суперсимметричных теорий [65; 66; 245; 246]). Таким образом, симметрии упрощают общую ситуацию и позволяют провести вычисления, которые в некоторых случаях приводят к точному ответу. Это вторая роль симметрий в физической системе. Первая роль, напомним, проявляется в законах сохранения. Есть еще и третья роль. Сами наблюдаемые также могут быть связаны друг с другом симметриями, например, амплитуда вероятности одного процесса равна амплитуде вероятности другого процесса. В Стандартной модели хорошим примером может служить изотопическая симметрия [244], из-за которой при сильных взаимодействиях  $u$  и  $d$  кварки не различаются. Вот три основные роли, которые играют симметрии в квантовой теории поля.

Для развития и совершенствования методов вычисления наблюдаемых зачастую удобно и полезно рассматривать более простые теории, чем те, которые описывают реальные физические процессы. Таким образом появился целый класс так называемых “игрушечных” теорий, на примере которых удобно изучать те или иные особенности формализма квантовой теории поля. Однако некоторые “игрушечные” модели очень быстро зажили своей собственной жиз-

нию и стали весьма популярны. Причина этого кроется в том, что “физические” наблюдаемые в этих теориях являются интересными математическими объектами, которые исследовались сугубо математическими методами при этом не всегда успешно, а квантово-полевой подход принес много новых неожиданных идей, которые довольно быстро были поставлены на строгую математическую основу, породив целые новые направления исследований. В данной диссертации рассматривается как раз такая теория, которая называется теорией Черна-Саймонса, и исследуются симметрии ее наблюдаемых.

Эта квантовая теория поля замечательна тем, что является примером точно решаемой трехмерной неабелевой калибровочной теории, действие которой задано лагранжианом Черна-Саймонса [44]:

$$S(A) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left( A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right). \quad (1)$$

Более строгое и подробное введение будет дано ниже, а здесь пока обсуждаются общезначимые аспекты этой теории. Состав полей в теории Черна-Саймонса очень простой – всего лишь одно, вообще говоря, неабелево калибровочное поле  $A_\mu$ . В Стандартной модели наиболее близким аналогом этого поля  $A_\mu$  являются глюоны – переносчики сильного взаимодействия. Таким образом, теория Черна-Саймонса является примером неабелевой теории Янга-Миллса. В этой теории всего лишь одна константа связи  $\kappa$ , и можно рассмотреть режим слабой связи, чтобы исследовать теорию пертурбативно. Теперь обсудим симметрии этой теории.

В теории есть калибровочная симметрия. Поле  $A_\mu$  преобразуется при калибровочных преобразованиях с помощью простой группы Ли. Это группа локальных калибровочных симметрий теории Черна-Саймонса. Если преобразовать поля с помощью этой группы, то лагранжиан, а, значит, и динамика самой системы, не изменится. Но кроме этой симметрии, в теории есть еще топологическая симметрия. Дело в том, что лагранжиан не зависит от метрики, и все наблюдаемые в этой теории от метрики не зависят. Это одна из разновидностей общей ковариантности, которая в данном случае достигается не за счет того, что проинтегрировали по всем метрикам, а за счет того, что лагранжиан изначально не зависит от метрики. Так как тензор энергии-импульса определяется как вариация действия по метрике, следовательно, для теории Черна-Саймонса он равен нулю, поэтому гамильтониан теории тоже равен нулю. Иными словами, в теории нет динамики.

Тем не менее в теории есть состояния, которые интересно перечислить и описать. Интерес к ним заключается в следующем. Появление содержательных топологических решений в динамических теориях, таких как монополи и инстантоны, сразу привлекло внимание исследователей к топологическим эффектам. Чтобы научиться с ними эффективно работать, нужно рассмотреть чисто топологическую теорию, в которой нет динамики. Однако чисто топологическая теория Черна-Саймонса без члена Янга-Миллса с момента своего открытия в 1974 году С.Черном и Дж.Саймонсом [44] и до работы Э.Виттена 1989 года [323] не привлекала к себе особого внимания (см. примеры применения в [252; 288; 289; 298; 329]). В работе Виттена было показано, что если рассмотреть подходящий класс калибровочно инвариантных величин, которые называются петлями Вильсона, то их наблюдаемые будут крайне нетривиальными инвариантами узлов и зацеплений. В совокупности с появившимися в то же время работами В.Джонса [126; 127], ХОМФЛИ-ПТ [2; 257], Н.Решетихина и В.Тураева [273; 276; 277; 308; 331] это привело к настоящему прорыву в теории инвариантов узлов, поскольку эта теория, отсчитывающая свое начало от работ Ф.К.Гаусса 1833 года, была довольно плохо развита в силу отсутствия аналитических методов их вычисления. Подход Виттена через квантовую теорию поля позволил включить все эти выглядящие разрозненными результаты в единый контекст теории Черна-Саймонса, объяснить появление новых структур и сформулировать новые направления исследования. Прежде чем обсуждать симметрии наблюдаемых теории Черна-Саймонса, необходимо подробнее обсудить, какие есть задачи и проблемы в теории инвариантов узлов, а каковы методы их решения с помощью квантовой теории поля.

Более подробное введение в теорию узлов представлено в приложении А. Основная задача в классической теории узлов состоит в том, чтобы научиться отличать разные узлы друг от друга. Разными или топологически неэквивалентными называются узлы, которые нельзя преобразовать друг в друга непрерывным взаимно однозначным способом. Одинаковые узлы образуют один топологический класс эквивалентности. Чтобы хорошо себе представлять узел и его топологический класс эквивалентности, можно прибегнуть к физической интуиции и думать об узле, как о его физической реализации, сделанной из легко деформируемой резины, которую нельзя разрезать и склеивать. Примеры на рис. 1. Основная задача различения узлов тесно связана с задачей классификации узлов – построения списка узлов, который перечисляет все возможные

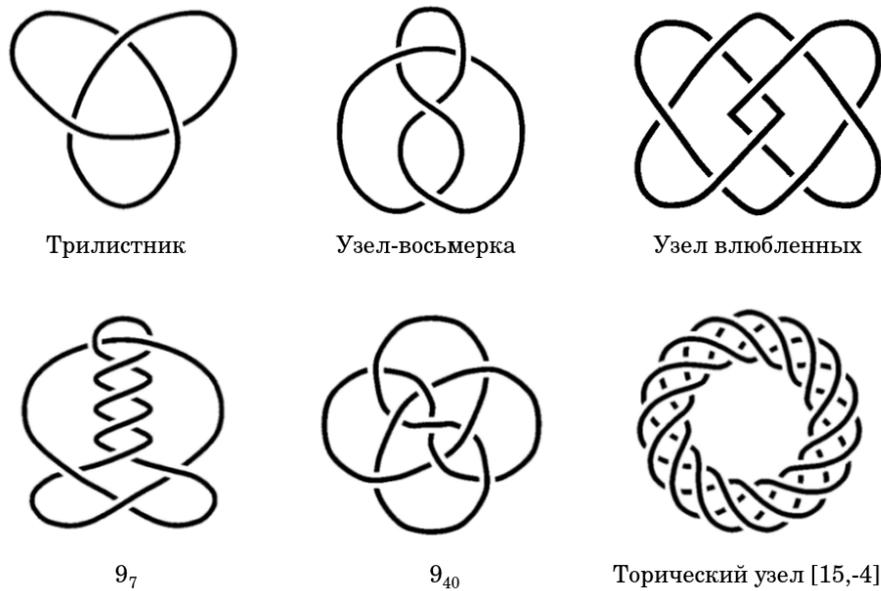


Рисунок 1 — Примеры узлов

варианты без дублирования. Обычно несложно создать алгоритм, который перечислит все возможные объекты, но этот список будет содержать дубликаты. Нетрудно вообразить себе два на первый взгляд разных узла, которые топологически эквивалентны (см. рис. 2). Естественно, возникает задача, как различать

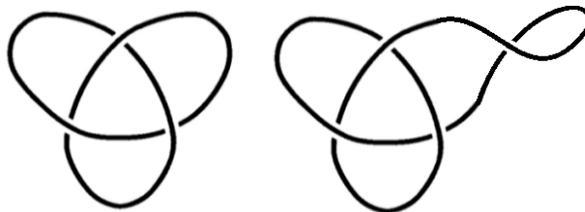


Рисунок 2 — Две реализации узла-трилистника

узлы. Классифицировать узлы принято по минимальному числу пересечений в планарной диаграмме. Например, на рис. 2 планарная диаграмма левого узла содержит три пересечения, а правая – четыре.

Есть два магистральных направления, чтобы решать задачу различения узлов: перерисовывать диаграммы одних узлов в другие (как на рис. 2) и вычислять нетривиальные инварианты узлов. Исторически первый достаточно сильный инвариант узла, который можно эффективно вычислять, появился относительно недавно в 1984 году. До этого, начиная с работы П.Г.Тейта 1885 года, различение узлов производилось ручным способом. В итоге на классификацию первых 249 узлов, чьи диаграммы содержат не более 10 пересечений, ушло почти 100 лет. Несмотря на то, что многие знаменитые математики, такие как

М.Ден, К.Райдемайстер, Дж.Александр и Дж.Конвей, отметились вкладом в создание каталога узлов, развитие чисто топологических методов привело к очень скромным результатам. В принципе, это не слишком удивительно, поскольку топологические методы больше напоминают искусство, нежели науку. Если удастся перерисовать одну диаграмму узла в другую, то нет сомнений, что узлы, отвечающие этим диаграммам, эквивалентны. Однако, если этого сделать не удалось, то это еще не означает, что узлы различны.

Другое направление, основанное на вычислении инвариантов, долгое время находилось в зачаточном состоянии, поскольку никак не удавалось придумать аналитических инвариантов и алгоритмического способа их вычисления. Инвариант узла – это такая функция на узле, которая принимает одни и те же значения на всех топологически эквивалентных контурах. Данное определение не дает рецепта как построить инвариант и не позволяет понять, насколько хорошо инвариант будет различать узлы. Например, любая постоянная функция удовлетворяет определению и является инвариантом узлов, но с ее помощью нельзя различить никакие узлы, потому что она принимает одинаковые значения на всех узлах. Поэтому для полного решения задачи различения узлов необходимо, чтобы инвариант узла принимал разные значения на топологически разных узлах. Такой инвариант называется полным инвариантом узла. Однако тут есть проблема, которая заключается в том, что с практической точки зрения полный инвариант узла будет полезен, только если его можно будет относительно эффективно вычислять. Те инварианты узлов, про которые доказано, что они являются полными, практически не поддаются вычислению. Например, известно, что фундаментальная группа узла [142] и квандл [128;183] (в русскоязычной литературе дистрибутивный группоид [182]) являются полными инвариантами<sup>1</sup>, однако их очень трудно вычислить [178]. В свою очередь те, которые относительно легко вычислить, являются весьма грубыми инвариантами, то есть плохо различают узлы (методы вычисления различных инвариантов узлов можно найти в классических книгах по теории узлов, например, в [4;53;142]). Разумеется, при создании каталога узлов исследователи использовали различные инварианты узлов, например, полином Александра [9], но эти инварианты довольно грубые и не могут различить многие узлы.

Создание аналитической теории инвариантов узлов началось в 1984 году с работ В.Джонса [126;127]. И хотя полином Джонса не является полным инва-

<sup>1</sup>Точнее, фундаментальная группа является полным инвариантом примарных узлов [142].

риантом узла, за свое открытие В.Джонс был удостоен Филдсовской премии в 1990 году. Работы В.Джонса (а также работы М.Атья [24], С.Дональдсона [62], А.Флоера [75] и М.Громова [99]) положили начало новой области математики, которая сейчас называется квантовой топологией. Идея состоит в том, чтобы связать конструкции квантовой механики и квантовой теории поля с топологическими объектами. Сам В.Джонс для определения и построения своего инварианта использовал алгебры фон Неймана, которые были введены фон Нейманом в 1930 году для описания определенных квантовомеханических операторов [313]. Идея Джонса состоит в том, чтобы представить узел как переплетение нитей и каждую нить заменить на векторное пространство, а с каждым пересечением связать определенный оператор из алгебры фон Неймана, который действует на векторное пространство состояний определенной квантовомеханической системы. Удивительный факт, который и доказал Джонс, состоит в том, что такая конструкция является топологическим инвариантом. Получившийся в результате инвариант является многочленом Лорана по определенной вещественной переменной, которая участвует в коммутационных соотношениях алгебры фон Неймана.

У данного подхода есть два преимущества по сравнению со всеми остальными методами, которые были до этого в теории узлов. Во-первых, полином Джонса оказался довольно сильным инвариантом узла по сравнению со всеми предыдущими инвариантами. Например, он различает все простые узлы с минимальным числом пересечений не более 9. Из 165 простых узлов с минимальным числом пересечений равным 10 полином Джонса различает 157 узлов. Во-вторых, его довольно легко посчитать. Процедура оказывается совершенно алгоритмической, и больше не надо думать, как правильно перерисовывать один узел в другой. Тем самым наука про инварианты узлов перестала быть чисто топологической и стала *аналитической*. Это не только существенно облегчает вычисление инвариантов, но и позволяет их исследовать *аналитическими* методами. Подход Джонса к построению инвариантов оказался чрезвычайно плодотворным. В 1985 году сразу 4 научные группы 4 независимыми способами [2] (а в 1987 г. появилась еще одна работа [257]) обнаружили обобщение полиномов Джонса, которые называются полиномами ХОМФЛИ-ПТ по первым буквам фамилий первооткрывателей (иногда называются просто ХОМФЛИ). Вскоре Э. Виттен [323] обнаружил, что наблюдаемые в теории Черна-Саймонса для фундаментального представления калибровочной группы  $SU(2)$  совпада-

ют с полиномами Джонса, а для фундаментального представления  $SU(N)$  – с полиномами ХОМФЛИ-ПТ. Однако если рассмотреть старшие представления калибровочной группы, то теория Черна-Саймонса дает новые инварианты узлов, которые называются цветными и раскрашенными (англ. colored) квантовыми инвариантами. Таких инвариантов бесконечно много, поскольку у групп Ли бесконечно много представлений.

Вернемся к вопросу о распознавания узлов с помощью квантовых инвариантов. Ключевая гипотеза состоит в том, что весь набор цветных квантовых инвариантов является полным инвариантом узла. Хотя на сегодняшний день исследования квантовых инвариантов продвинулись довольно далеко, эта гипотеза по-прежнему открыта. Как бы то ни было, даже если она не верна, квантовые инварианты узлов в любом случае являются довольно мощным инструментом для их распознавания. Основная трудность заключается в том, что для все более сложных узлов требуются все более сложные представления, которые довольно плохо исследованы. Проиллюстрируем это утверждение на конкретном классе проблем.

Большую проблему для различения какими бы то ни было методами представляют узлы-мутанты [53]. Это такие разные узлы, которые получаются друг из друга с помощью определенной операции, которая называется мутацией узла (см.рис. 3). Известно, что любой квантовый инвариант узла, раскрашенный

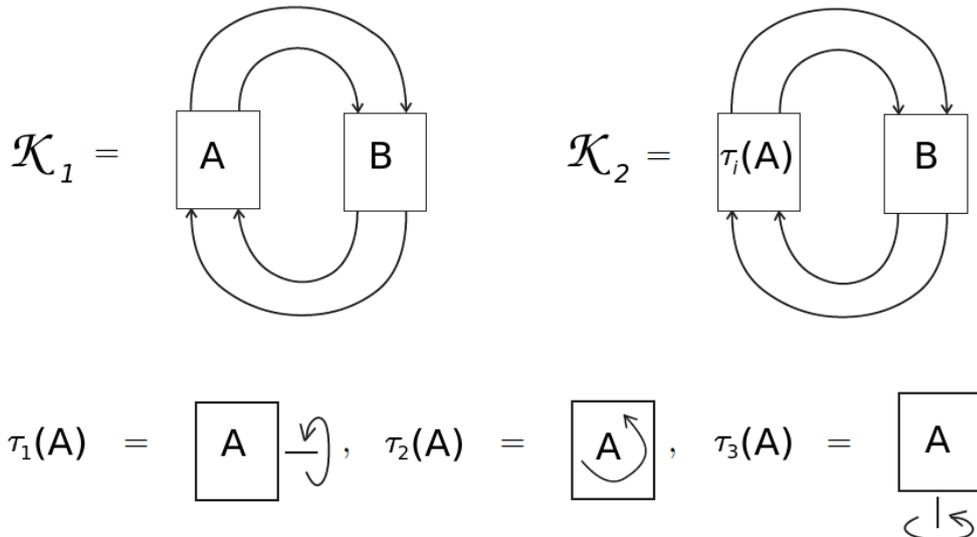


Рисунок 3 — Два мутантных узла

представлением без кратностей, не различает узлы-мутанты [216]. Кратность представления – это число повторяющихся слагаемых в разложении на неприводимые представления тензорного квадрата этого представления. Если в та-

ком разложении нет повторяющихся слагаемых, то представление называется представлением без кратностей. Например, все симметрические представления  $su(N)$  являются представлениями без кратностей. Первым примером представления  $su(N)$  с кратностью является представление, соответствующее диаграмме Юнга [2,1]<sup>2</sup>:

$$[2,1] \otimes [2,1] = [4,2] + [4,1,1] + [3,3] + 2 \cdot [3,2,1] + [3,1,1,1] + [2,2,2] + [2,2,1,1],$$

где разложение на неприводимые представления осуществляется согласно правилу Литтлвуда-Ричардсона [109]. Видно, что в разложении справа представление [3,2,1] появилось дважды. Это и означает, что представление [2,1] имеет кратность 2. На уровне конкретных примеров известно, что инварианты, раскрашенные представлениями с кратностями различают некоторые узлы-мутанты [47; 60; 216; 217; 224; 304]. В этих примерах инварианты были посчитаны численно для простейших представлений с кратностью 2. Однако представлений с кратностью 2 может оказаться недостаточно. В работе [215] Х.Мортон построил узлы-мутанты с определенными симметриями и доказал теорему, что такие узлы невозможно различить никакими квантовыми инвариантами, раскрашенными какими бы то ни было представлениями с кратностью 2. При этом он привел в пример два крендельных узла, связанных друг с другом как раз такой мутацией с симметрией и раскрашенных простейшим представлением  $su(3)$  с кратностью 3, квантовые инварианты которых не совпадают. Это означает, что узлы-мутанты с симметриями в принципе могут различаться представлениями с кратностью не ниже 3. При этом неизвестно, бывают ли узлы-мутанты с такой симметрией, что для их различения требуются квантовые инварианты, раскрашенные представлением с кратностью 4 или выше.

Этот пример с различением узлов-мутантов хорошо отражает суть проблемы: задача о различении узлов с помощью квантовых инвариантов сводится к вычислению этих инвариантов в представлении с кратностью выше 1. Такие представления появляются только в алгебрах ранга больше 1, например, в  $su(2)$  их нет. При этом ясно, что мы не можем удовлетвориться только численными методами вычисления таких инвариантов, как это было проделано Х.Мортоном

---

<sup>2</sup>Диаграмма Юнга – это комбинаторный способ задать конечномерное представление алгебры  $su(N)$ . Как хорошо известно [327], все такие представления являются представлениями старшего веса  $\omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ . Эти веса можно задать с помощью диаграммы Юнга  $\lambda = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N-1}\}$ ,  $\lambda_i = \sum_{j=i}^{N-1} \omega_j$ .

для  $su(3)$ , потому что класс узлов-мутантов с симметриями содержит бесконечно много узлов. Кроме того, нет никаких гарантий, что со временем не будет открыт еще какой-нибудь класс узлов, которые также нельзя будет различать с помощью простых представлений без кратностей. Поэтому для полного решения проблемы различения узлов необходимы аналитические методы, а также понимание того, как топология узлов влияет на теорию представлений, стоящую за квантовыми инвариантами. Однако на этом пути встает трудная проблема, которая заключается в том, что аналитических методов, которые бы позволили работать с квантовыми инвариантами, раскрашенными представлениями с кратностями, на сегодняшний день не существует. Под аналитическими методами мы подразумеваем такие методы, которые позволяют получать для интересующих нас величин явные формулы с зависимостью от интересующих нас параметров, выраженной через явные функции.

Глобальная задача, на решение которой направлена диссертация, состоит в исчерпывающем аналитическом описании квантовых инвариантов узлов, раскрашенных представлениями с кратностями. Это описание должно удовлетворять двум требованиям. Первое требование заключается в том, что должна появиться полная классификация узлов и зацеплений по квантовым инвариантам, то есть мы должны научиться описывать все классы узлов, которые различаются или не различаются квантовыми инвариантами, раскрашенными различными конечномерными неприводимыми представлениями простых алгебр Ли. Если гипотеза о том, что квантовые инварианты являются полным инвариантом узла, верна, то это требование приведет к построению полной классификации узлов. Второе требование заключается в том, что необходимо уметь описывать зависимость, как от узла, так и от представления аналитически. Как уже обсуждалось выше, с точки зрения различения узлов-мутантов ключевую роль должны играть представления с кратностями. Для различения немутантных узлов обычно достаточно одного-двух простейших представлений без кратностей, например, фундаментального и первого симметрического алгебры  $su(N)$  (автору неизвестны исключения из этого экспериментального факта). Тем не менее исследование квантовых инвариантов, раскрашенных представлениями без кратностей, представляет большой интерес, потому что такие инварианты узлов описывают интересные геометрические, причем не только топологические, инварианты различных многообразий. В качестве примера приведем три интересные гипотезы, к которым результаты данной диссертации примени-

мы: гипотеза объема [59; 114; 115; 133; 134], AJ гипотеза [85; 90; 167] и гипотеза о целочисленности [160; 161; 164; 238]. Первая утверждает, что объем гиперболического многообразия, являющегося дополнением узла до трехмерной сферы, совпадает в определенном пределе с полиномами ХОМФЛИ-ПТ, раскрашенными симметрическими представлениями. Вторая гипотеза гласит, что разностный оператор, зануляющий полиномы ХОМФЛИ-ПТ, раскрашенные симметрическими представлениями, совпадает с так называемым  $A$ -полиномом [247] определенных характеристических многообразий. Для исследования и проверки этих двух гипотез необходимо знать аналитическую зависимость квантового инварианта узла от симметрических представлений, которые являются представлениями без кратностей. Третья гипотеза основана на калибровочно-струнной дуальности [93; 94] и связывает определенные коэффициенты разложения по родам квантовых инвариантов узлов с симплектическими инвариантами (открытыми инвариантами Громова-Виттена [136; 168]) многообразий Калаби-Яу. Для третьей гипотезы требуются квантовые инварианты для всех неприводимых представлений, включая представления без кратностей.

Поскольку представленная глобальная задача является сложной и трудоемкой, и на сегодняшний день нет до конца понимания, каким именно способом ее можно полностью решить, то необходимо развивать несколько разных подходов.

- Во-первых, удобно поделить все узлы и представления на различные классы и работать с отдельными классами. Это существенно упрощает общую ситуацию и облегчает вычисления. Если выбрать удачное разбиение узлов на классы, то это индуцирует естественную параметризацию узлов внутри класса.

- Во-вторых, необходимо развивать численные методы, которые позволяют контролировать аналитические вычисления, например, проверять на явных примерах определенные гипотезы. Кроме того, в некоторых случаях проще найти какую-то закономерность эмпирически, а затем уже ее доказать.

- В-третьих, руководствуясь общим принципом проведения сложных вычислений, о чем мы говорили в самом начале, необходимо исследовать все возможные симметрии, которыми обладают квантовые инварианты узлов для различных представлений. Например, в силу симметрий может оказаться так, что сложное представление с кратностями редуцируется к более простому представлению без кратностей, поэтому для различения узлов-мутантов оно не годится.

Вот три основных подхода, которые разработаны в диссертации. Конкретная реализация каждого из этих подходов на практике очень сильно зависит от выбора конкретного метода вычисления квантовых инвариантов узлов. Поэтому далее мы рассмотрим эти два вопроса вместе.

Непертурбативные методы в теории Черна-Саймонса сводятся [104; 105; 139; 141; 323] к методам теории квантовых групп, основанных на применении квантовых универсальных  $R$ -матриц и квантовых  $6j$ -символов. Поскольку  $R$ -матрицы задают представление группы  $\text{kos}$  [124; 274; 308], то для систематического исследования удобно представить узел в виде замыкания косы фиксированной ширины. С одной стороны, согласно классической теореме Александра любой узел или зацепление всегда можно так представить [53], с другой стороны, это дает естественное разбиение узлов на классы (по ширине косы) и естественную параметризацию узлов внутри класса, описывающуюся числами переплетений соседних ниток в косе. Есть два разных способа замкнуть косу (см. приложение А), которые отличаются техническими тонкостями, но общий подход от этого не меняется. Зависимость квантового инварианта от параметров косы в фиксированном классе и при фиксированном представлении будет описываться только собственными значениями  $R$ -матриц. Зависимость от представления при фиксированных параметрах косы определяется и собственными значениями  $R$ -матриц, и  $6j$ -символами. Однако собственные значения  $R$ -матриц в отличие от  $6j$ -символов хорошо известны [95; 273], поэтому самая трудная часть для описания зависимости от представления сосредоточена именно в  $6j$ -символах. При увеличении ширины косы собственные значения  $R$ -матриц, которые используются при вычислениях, не меняются, зато в вычислениях вовлекаются  $6j$ -символы для все более сложных представлений. Например, для вычислений квантовых инвариантов узлов, реализуемых на косе ширины 4 и раскрашенных симметрическими представлениями  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ , потребуются некоторые  $6j$ -символы, определяемые правилом Литтлвуда-Ричардсона, для представлений с кратностями. Таким образом, для вычислений квантовых инвариантов произвольных узлов, раскрашенных произвольными представлениями, потребуются  $6j$ -символы с произвольными представлениями.

Перечислим результаты диссертации, полученные с помощью непертурбативных методов вычислений. В рамках первого из трех описанных выше подходов мы придумали [48; 202], как квантовые инварианты более сложных семейств крендельных узлов конструировать из более простых торических узлов вида

$T[2,n]$ : топологическая операция склейки таких узлов, предложенная в [51], переносится на конструкцию из  $R$ -матриц. При этом ширина косы произвольного крендельного узла может быть сколь угодно большой, однако ценность нашего метода заключается в том, что для вычисления требуются такие же  $b_j$ -символы, что и для исходного простого торического узла  $T[2,n]$ , реализованного на косах ширины 4. Такая реализация торических узлов была предложена еще в исходной работе Виттена [323], вычисления соответствующих квантовых инвариантов для симметрических представлений  $U_q(sl_2)$  с помощью формулы Кириллова-Решетихина для  $b_j$ -символов симметрических представлений этой алгебры [145] была получена в [139].

В рамках второго из трех описанных выше подходов мы разработали [49; 117; 259; 264] эффективный метод вычисления квантовых  $b_j$ -символов алгебры  $U_q(sl_N)$  произвольного ранга для произвольных конечномерных представлений. Метод основан на построении линейного отображения между двумя наборами ортонормированных базисных векторов в пространстве кратностей представлений. Метод является аналитическим по  $q$  и по  $N$ , но работает только при фиксированном представлении и с этой точки зрения является численным. С его помощью впервые были построены квантовые матрицы Рака-Вигнера для простейших несимметрических представлений с кратностями. Используя эти результаты, мы построили квантовые инварианты всех 3-нитевых узлов и зацеплений, раскрашенных различными  $([2,1], [3,1], [2,2], [3,2], [4,1], [3,3], [4,2])$  несимметрическими представлениями. Полученные результаты позволяют, например, проверить различные гипотезы о внутренней структуре квантовых инвариантов: факторизацию [156], универсальность [186; 189; 317], дифференциальное разложение [157; 210; 211] и разложение эт Хофта [200; 201]. Кроме того, большое количество результатов позволяют увидеть новые свойства. Например, для матриц Рака-Вигнера было замечено свойство распадаться на блоки [237], если представления, которыми нумеруются матричные элементы, содержат достаточно количество представлений с кратностями.

До работ автора в литературе обсуждалось несколько численных методов построения квантовых инвариантов и  $b_j$ -символов. Самый прямолинейный метод вычисления квантовых инвариантов основан на применении конструкции Решетихина-Тураева с  $R$ -матрицами [277], которые действуют в полном пространстве представления, а не на пространстве кратностей, как в нашем методе. Это приводит сразу к трем недостаткам: метод не является аналитическим по

$N$ ; его нельзя применить к семейству узлов, а только к одному конкретному узлу; размер  $R$ -матрицы растет очень быстро с ростом  $N$  и ростом представления. Эти недостатки делают данный метод весьма ограниченным в применении (см. недавний обзор этого метода в [60]). Однако есть и достоинства этого метода: для проведения сложных вычислений не требуется знания  $b_j$ -символов, которые появляются только при переходе к пространству кратностей. С помощью этого метода можно проводить вычисления для фиксированного узла, ранга алгебры и представления. Например, Х.Мортон [215] именно с помощью этого метода показал, что пара крендельных узлов-мутантов с симметриями различаются квантовым инвариантом представления  $[4,2]$  для алгебры  $su(3)$ . Альтернативный метод вычисления квантовых инвариантов основан на методе каблирования (см. обзор [18]), который заключается в том, что вдоль узла или зацепления запускается кабель из нескольких ниток и вычисляется обычный полином ХОМФЛИ-ПТ через скейн-соотношения. В результате получится также квантовый инвариант узла, но только от приводимого представления – тензорного  $n$ -кратного произведения фундаментального представления, где  $n$  – число ниток в кабеле. Чтобы получить неприводимое представление, необходимо построить соответствующий проектор. Общая техника известна [109], но конкретная реализация даже для простейшего представления  $[2,1]$  алгебры  $su(N)$  с кратностью 2 до сих пор не представлена (см. обсуждение проблемы в [18]). Данный метод является аналитическим по  $N$ , но не позволяет вычислять инварианты для семейств узлов, а только для конкретных узлов.

В рамках третьего подхода мы получили два результата. Во-первых, разработали метод для нахождения симметрий квантовых  $b_j$ -символов. Метод основан на однородности уравнения Янга-Бакстера и гипотезе о собственных значениях [71]. Исследуя эту гипотезу, мы обнаружили большое количество новых симметрий  $b_j$ -символов и показали, что в отличие от алгебры  $sl(2)$ , где группа симметрий содержит всего 144 элемента, для алгебры  $sl(N)$  симметрий бесконечно много. При этом часть симметрий “проносится” через конструкцию Решетихина-Тураева и индуцирует симметрии квантовых инвариантов любых узлов и зацеплений при фиксированном  $N$ , причем симметрии на уровне квантовых инвариантов в некоторых случаях связывают сложные представления с кратностями с простыми представлениями без кратностей. Полученные результаты являются далеко идущим обобщением наблюдения симметрии для цветных полиномов Александра на представлениях, соответствующих 1-крюковым

диаграммам Юнга [116; 192; 328]. Из похожих симметрий известна только двойственность ранг-уровень [101; 222; 223], которая утверждает, что квантовый инвариант произвольного узла при транспонировании диаграммы Юнга, которая задает представление  $U_q(sl_N)$ , и одновременной замене  $\hbar \rightarrow -\hbar$ ,  $N \rightarrow -N$  не меняется. У этой симметрии есть два важных отличия от наших симметрий. Во-первых, при транспонировании диаграммы Юнга кратность представления не меняется. В этом смысле эта симметрия связывает представления одинаковой сложности. Во-вторых, для каждого представления эта симметрия образует группу  $\mathbb{Z}_2$ , которая состоит всего из двух элементов: единичного и единственного нетривиального преобразования. Какие группы образуют открытые нами симметрии, в общем случае пока сказать затруднительно, но они заведомо более богатые и могут содержать много нетривиальных элементов.

Во-вторых, для симметрических представлений мы показали, что бj-символы квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$  совпадают с бj-символами квантовой алгебры  $U_q(sl_2)$ . Для представлений, сопряженных к симметрическим, показано, что бj-символы  $U_q(sl_N)$  пропорциональны бj-символам  $U_q(sl_2)$  при сдвиге всех параметров представлений на  $N$ ; коэффициент пропорциональности, являющийся функцией как от представлений, так и от  $N$ , явно посчитан. Показано, что все известные свойства бj-символов  $U_q(sl_2)$  [145] обобщаются на случай представлений, сопряженных к симметрическим.

Несмотря на то, что в теории Черна-Саймонса для вычисления квантовых инвариантов узлов существуют точные методы, подход через теорию возмущений, основанный на классической технике диаграмм Фейнмана, также очень интересен [12; 14; 103; 106; 137; 163; 258; 306]. Он приводит к появлению инвариантов узлов несколько иной природы, чем квантовые инварианты. Каждый член ряда по теории возмущений является линейной комбинацией так называемых инвариантов Васильева [159; 315], умноженных на групповые факторы исходной калибровочной алгебры [13; 15; 26; 27; 162]. Инвариант Васильева описывает зависимость от узла, а групповой фактор – зависимость от представления, то есть зависимости от узла и представления в правильном базисе расщепляются. Это дает в некотором смысле ортогональный подход к исходной задаче, который к тому же позволяет контролировать непертурбативные вычисления в рамках квантовых алгебр на уровне теории представлений классических алгебр с точностью до определенного порядка. Таким образом, если знать групповую структуру пертурбативного разложения вильсоновских средних, то можно вычислять

инварианты Васильева из полиномиальных инвариантов. Используя технику вычисления групповых инвариантов [54], групповая структура пертурбативного разложения была исследована в работах не далее 6 порядка, что позволяет вычислять инварианты Васильева до 6 порядка включительно [68; 162].

Для исследования групповых структур мы использовали иной подход, основанный на симметриях квантовых инвариантов узлов, которые мы открыли. Этот подход не только позволяет находить явные аналитические выражения для групповых факторов в произвольных представлениях, но и открывает совершенно новую неожиданную связь с солитонными тау-функциями интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП). Мы показали, что групповые структуры раскладываются по выделенному базису в центре универсальной обертывающей алгебры  $gl(\infty)$ , который находится во взаимно однозначном соответствии с дисперсионными соотношениями 1-солитонной тау-функции. Соответствие реализовано простой заменой волновых векторов солитона на собственные значения операторов Казимира. Поскольку действие производящей функции иерархии Кадомцева-Петвиашвили на солитонную тау-функцию генерирует эти дисперсионные соотношения, то используя указанную связь, найдено довольно простое комбинаторное описание групповых структур с помощью диаграмм Юнга. Это позволяет выписать все групповые структуры на любом уровне и посчитать инварианты Васильева, если известны соответствующие квантовые инварианты.

**Теория Черна-Саймонса.** Теперь приведем более строгое определение теории Черна-Саймонса. Идея рассмотреть трехмерную  $(2 + 1)$  квантовую теорию поля Черна-Саймонса с неабелевой калибровочной группой  $G$  для изучения топологических инвариантов появилась в работах М.Атьи [23] и А.Шварца [288]. Действие Черна-Саймонса для векторного поля  $A_\mu = A_\mu^a T^a$

$$S(A) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left( A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \quad (2)$$

построено без использования метрики на трехмерном многообразии  $\mathcal{M}^3$ . В принципе, в качестве  $\mathcal{M}^3$  в литературе рассматриваются различные многообразия [25; 34; 110; 111; 146; 166; 180; 277], но в данной работе подразумевается,

что  $\mathcal{M}^3 = S^3$ . В качестве калибровочной группы можно рассматривать разные группы, но мы ограничимся  $G = SU(N)$  за исключением четвертой главы, где в некоторых разделах рассматривается случай  $SO(N)$  и  $Sp(N)$ . Пусть  $G = SU(N)$ , тогда  $T^a$  являются генераторами алгебры  $su(N)$ . След в действии берется по фундаментальному представлению, а  $k$  - это константа связи теории. Калибровочно инвариантные функции определяются с помощью оператора петли  $C$  Вильсона:

$$W_R(C, A) = \text{Tr}_R \left( \text{Pexp } i \oint_C A_\mu dx^\mu \right), \quad (3)$$

где  $R$  - это неприводимое представление рассматриваемой алгебры Ли  $su(N)$ . В данной диссертации рассматриваются только конечномерные представления. Обозначение  $\text{Pexp}$  соответствует упорядоченной по пути экспоненте:

$$\begin{aligned} \text{Pexp } \oint_C A_\mu dx^\mu &= 1 + \oint_C A_\mu^a(x) T^a dx^\mu + \\ &+ \oint_C A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) dx_1^{\mu_1} \int_0^{x_1} A_{\mu_2}^{a_2}(x_2) T^{a_1} T^{a_2} dx_2^{\mu_2} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Вакуумное среднее от оператора петли Вильсона определено как

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} W_R(C, A), \quad (5)$$

и зависит от топологического класса эквивалентности  $\mathcal{K}$  контура  $C$ , по которому идет интегрирование. Поэтому такой коррелятор  $\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle$  определяет топологический инвариант узла.

**Непертурбативный подход: модель ВЗНВ.** Далее идеи М.Атья и А.Шварца были развиты в работах Э.Виттена [323], где было показано, что физические состояния теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU(2)$  описывают конформные блоки 2-мерной конформной теории Весса-Зумино-Новикова-Виттена (ВЗНВ) [231; 232; 319; 321; 322]. Более того, с помощью этого соответствия Э.Виттен предложил непертурбативный способ вычисления вильсоновских средних. Идея вычисления проста и состоит из двух шагов. Во-первых, надо представить  $S^3$  как связанную сумму двух трехмерных шаров  $B_3$ , содержащих петлю Вильсона, вложенную подходящим образом, а именно петля должна пересекать границу каждого шара  $S^2 = \partial B_3$  в четырех точках,

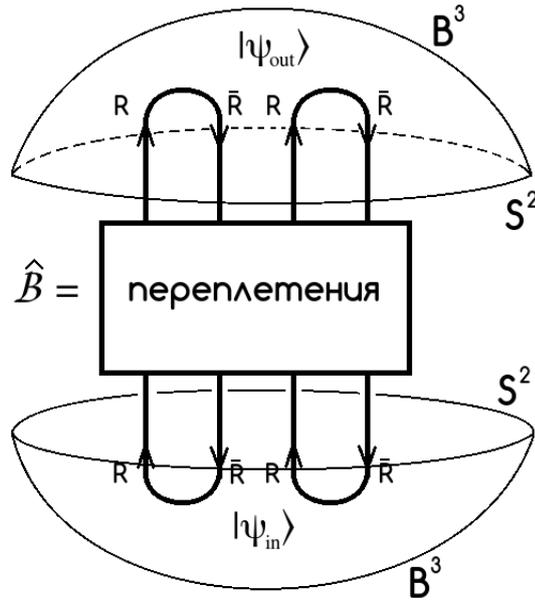


Рисунок 4 — Пример разрезания  $S^3$  с петлей Вильсона

см. рис. 4. Эта топологическая процедура разрезания переносится на функциональный интеграл. Во-вторых, надо использовать соответствие между теорией Черна-Саймонса и ВЗНВ, которое гласит, что функциональный интеграл на  $B_3$  соответствует состояниям в пространстве четырехточечных конформных блоков модели ВЗНВ. Начальное состояние живет на границе первого шара, а конечного – второго. Переплетения между нитями реализовано с помощью сплетающих операторов, чьи собственные значения к тому моменту были уже вычислены [209]. Начальное и конечное состояния могут находиться в разных базисах, поэтому для их корректного скалярного произведения, соответствующего склейки двух шаров  $B_3$  в исходную сферу  $S^3$ , их необходимо привести к одному базису с помощью матриц слияния (англ. fusion matrix или duality matrix, реже crossing matrix). Таким образом, петле Вильсона соответствует эволюция конформного блока:

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \langle \psi_{out} | \hat{\mathcal{B}} | \psi_{in} \rangle. \quad (6)$$

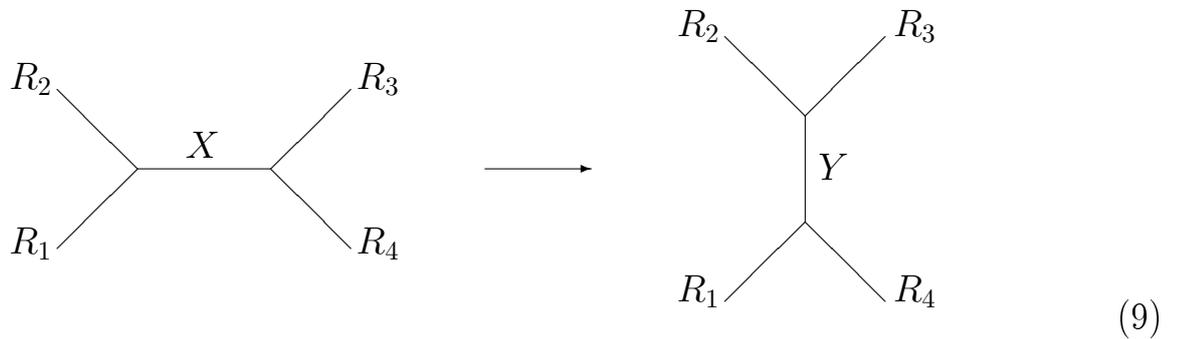
Э.Виттену удалось проделать все вышеописанные вычисления для фундаментального представления группы  $SU(2)$  и показать, что ответ совпадает с полиномом Джонса  $J^{\mathcal{K}}(q)$  [126; 127], если вильсоновскую петлю для узла  $\mathcal{K}$  нормировать на вильсоновскую петлю для незаузленной окружности

$$\frac{\langle W_{fund}(\mathcal{K}) \rangle}{\langle W_{fund}(\bigcirc) \rangle} = J^{\mathcal{K}}(q) \quad (7)$$

и ввести переменную  $q$  следующим образом:

$$q = \exp(\hbar), \quad \hbar = \frac{2\pi i}{\kappa + 2}. \quad (8)$$

По сути, для того чтобы выполнить все вычисления в рамках данной модели, необходимо знать только матрицы слияния. Матрица слияния – это общий термин в конформных теориях полей, обозначающий линейное преобразование одного конформного блока в другой. Простейший пример такого преобразования для четырехточечных блоков изображен на рис. 9



Для модели ВЗНВ в работе [209] показано, что матрицы слияния есть не что иное, как матрицы бј-символов квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$ . Позже в серии работ [97; 139; 141; 266; 267] описанный выше метод вычисления вильсоновских средних был развит и расширен на произвольный ранг группы  $SU(N)$  и на произвольные представления этой группы. Для фундаментального представления ответы совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ [2; 257] от двух переменных  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa+N}\right)$ ,  $A = q^N$ . Если специализировать переменную  $A = q^2$ , то получатся полиномы Джонса, а если выбрать специализацию  $A = 1$ , то получится полином Александра. Важно подчеркнуть, что в этих работах был осуществлен прогресс именно в определении и расширении данной конструкции на более общие случаи, однако вычислительная сторона вопроса оставалась, по сути, нетронутой, так как она упирается в задачу по вычислению квантовых бј-символов. Поскольку на тот момент были доступны только бј-символы для квантовой алгебры  $U_q(sl_2)$  ранга 1 [145], то все вычисления ограничивались только цветными полиномами Джонса. История вопроса про вычисления бј-символов обсуждается ниже. В диссертации в главе 2 показано, как простым способом склеивать 3-мерные шары, содержащие только 4-точечные конформные блоки. Показано, что таким образом можно получить произвольный крендельный узел и зацепление. Это все такие узлы, которые могут быть положены на риманову

поверхность рода  $g$  так, что на каждой ручке поверхности лежит только простая 2-нитевая коса. Это довольно обширное и представительное семейство узлов и зацеплений, содержащее в том числе узлы-мутанты с повышенными симметриями, которые упоминались выше. Главное достоинство нашей конструкции состоит в том, что для вычисления достаточно знать те же  $b_j$ -символы, что и для вычисления рациональных узлов (про рациональные узлы см. приложение А), которые получаются с помощью эволюции 4-точечных конформных блоков, в точности как на рис. 4. Вычисления проделаны для симметрических представлений, используя формулы для  $b_j$ -символов, полученные нами независимо от [227] в работе [202].

**Непертурбативный подход: инварианты Решетихина-Тураева.** Теория Черна-Саймонса и работы Э.Виттена инспирировали появление и развитие другого подхода, альтернативного к конформному, к построению квантовых инвариантов узлов, основанному на представлении группы  $\mathfrak{kos}$  с помощью квантовых  $R$ -матриц. Он был определен в серии работ [273;276;277;308;331]. Поскольку данный подход играет ключевую роль в диссертации, то его подробное изложение представлено в главе 1. У него есть два важных отличия от предыдущего. Во-первых, с помощью  $R$ -матриц он устанавливает связь с теорией интегрируемых систем, а во-вторых, он сформулирован на математическом уровне строгости, что позволило подключиться многим математикам к дальнейшим исследованиям. На сегодняшний день формализм квантовых групп настолько прочно вошел во многие аспекты теоретической и математической физики, что большого различия между физическим и математическим подходом можно не делать, однако в тот момент это было важным этапом на пути развития как теории Черна-Саймонса, так и квантовой топологии. Исследования происхождения  $R$ -матриц и симметрий квантовой группы в теории Черна-Саймонса описаны, например, в работах [104; 105; 213; 295]. Связь между конформными теориями поля и квантовыми группами обсуждалась впоследствии во многих работах, см. для примера [16; 17; 88; 92; 208].

В данной диссертации мы занимаемся следующими двумя направлениями: упрощение и дальнейшая разработка  $R$ -матричного подхода Решетихина-Тураева и исследование свойств квантовых инвариантов и установление с их помощью связей с другими разделами математики. Для упрощения вычислений квантовых инвариантов узлов заметную роль играет работа [281], где была

получена довольно простая формула для квантовых инвариантов торических узлов и зацеплений, раскрашенных произвольными конечномерными представлениями. Торические узлы – это еще один выделенный класс узлов (см. приложение А). Его важной особенностью является тот факт, что его квантовые инварианты можно построить без использования  $6j$ -символов. Это играет важную прикладную роль этого семейства при исследованиях различных свойств цветных инвариантов, потому что это существенно облегчает анализ. Активно исследуются инварианты и для других классов узлов, среди которых твистованные узлы [196; 301], узлы двойных кос [210], рациональные узлы [226] и 3-нитевые узлы [71; 116; 193]. Практически все доступные вычислительные результаты различных инвариантов, которые можно найти в литературе, относятся к этим классам. Для нас важным является тот факт, что до работ автора [49; 117; 259; 292] в литературе все имеющиеся продвижения были связаны с инвариантами, раскрашенными (анти)симметрическими представлениями, которые не содержат кратностей. Единственным исключением является работа [102], которая позволяет вычислять рациональные узлы (но, например, 3-нитевые не позволяет) в первом несимметрическом представлении.

**Пертурбативный подход: инварианты Васильева.** Несмотря на то, что Э.Виттен предложил непертурбативный способ вычисления вильсоновских средних, их можно вычислять и по теории возмущений, предполагая, что теория находится в режиме слабой связи. В работах [103; 106; 258] было показано, что теория перенормируема и не содержит расходимостей, т.е. конечна. Это существенно упрощает вычисления. Обычно в квантовой теории поля непертурбативные методы ценятся гораздо больше, чем пертурбативные, поскольку они дают точный ответ. Однако в данном случае теория возмущений приводит к очень интересным результатам. Это разложение можно выполнить в разных калибровках. В литературе обсуждались временная калибровка [163; 213; 295; 306], калибровка Ландау [12–15; 103; 106] и калибровка светового конуса (она же голоморфная калибровка) [68; 137; 162; 306]. Рассмотрим схематично вычисление в голоморфной калибровке. Для этого надо перейти от обычных координат  $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$  к комплексным  $(t, z, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ :

$$t = x_0, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

и наложить условие голоморфной калибровки

$$A_{\bar{z}} = 0 \quad (10)$$

Основная особенность этой калибровки состоит в том, что первоначально сложное кубическое действие Черна-Саймонса становится чисто квадратичным, а результирующий интеграл по траекториям становится гауссовым:

$$S(A)|_{A_{\bar{z}}=0} = i \int_{\mathbb{R}^3} dt d\bar{z} dz \varepsilon^{\mu\nu} A_{\mu}^a \partial_{\bar{z}} A_{\nu}^a. \quad (11)$$

Основным компонентом теории возмущений с действием (11) является калибровочный пропагатор, определяемый как обратный квадратичному оператору действия:

$$\langle A_{\mu}^a(t_1, z_1, \bar{z}_1) A_{\nu}^b(t_2, z_2, \bar{z}_2) \rangle = \left( \frac{\delta^{ab}}{\hbar} \varepsilon^{\nu\mu} \partial_{\bar{z}} \right)^{-1} = \varepsilon_{\mu\nu} \delta^{ab} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\delta(t_1 - t_2)}{z_1 - z_2}. \quad (12)$$

Введем ориентацию  $o$  на узле, чтобы можно было сравнить две точки  $x_1$  и  $x_2$  как  $o(x_1) < o(x_2)$ . Тогда вакуумное среднее от петли Вильсона (5) примет следующий вид:

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{o(x_1) < \dots < o(x_n)} \prod_{k=1}^n dx_k^{\mu_k} \langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \rangle \text{tr}_R \left( T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_n} \right) \quad (13)$$

Используя теорему Вика и формулу (13), можно переписать это выражение в виде

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{(2\pi i)^n} \int_{o(z_1) < \dots < o(z_n)} \sum_{p \in P_{2n}} (-1)^{p_{\downarrow}} \prod_{k=1}^n \frac{dz_{i_k} - dz_{j_k}}{z_{i_k} - z_{j_k}} \times \text{tr}_R \left( T^{a_{\sigma_p(1)}} T^{a_{\sigma_p(2)}} \dots T^{a_{\sigma_p(2n)}} \right). \quad (14)$$

Здесь сумма проходит по множеству всех пар  $P_{2n}$  из  $2n$  чисел. Элемент этого множества имеет вид  $p = \left( (i_1, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_n, j_n) \right)$ , где  $i_k < j_k$  и числа  $i_k, j_k$  – разные числа из множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Если  $p \in P_{2n}$  – спаривание, то определим функцию  $\sigma_p$  на множестве  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  следующим образом:

$$\sigma_p(i_k) = i_k, \quad \sigma_p(j_k) = i_k,$$

то есть она возвращает минимальное число из пары  $(i_k, j_k)$ .

Структурно формула (14) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle W_R(\mathcal{K}) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \oint dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle A^{a_1}(x_1) \dots A^{a_n}(x_n) \rangle \text{tr}_R(T^{a_1} \dots T^{a_n}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{CD_n} V_{n,m} G_{n,m} \end{aligned} \quad (15)$$

Из этого разложения видно, что информация об узле и калибровочной группе входят в  $\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle$  отдельно. Информация о вложении узла в  $\mathbb{R}^3$  закодирована в интегралах вида:

$$V_{n,m} \sim \oint dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle A^{a_1}(x_1) A^{a_2}(x_2) \dots A^{a_n}(x) \rangle,$$

а информация о калибровочной группе и представлении входит в ответ как групповые факторы:

$$G_{n,m} \sim \text{tr}_R(T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_n}).$$

Их можно друг на друга умножать: произведение групповых факторов снова является групповым фактором. Поэтому они образуют определенную алгебру  $\mathfrak{g}_n$  с соотношениями. Аналогичную алгебру образуют и величины  $V_{n,m}$ . Если в этих алгебрах выбрать базисы, то формула (15) примет вид

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim \mathfrak{g}_n} v_{n,m}^{\mathcal{K}} r_{n,m}^R. \quad (16)$$

Очевидно, что каждый член ряда по теории возмущений также будет инвариантом узла  $v_{n,m}^{\mathcal{K}}$ , но природа этих инвариантов отличается от природы полиномиальных инвариантов. Они называются инвариантами Васильева и являются инвариантами конечного типа (см. приложение A), открытыми В.А.Васильевым в 1990 году [315] при исследовании теории катастроф на гладких многообразиях. Связь между инвариантами Васильева и теорией Черна-Саймонса исследовалась во многих работах [14; 15; 26; 27; 33; 162]. В 1993 году М.Л.Концевич построил универсальный инвариант Васильева, доказав взаимно однозначное соответствие между алгеброй инвариантов Васильева и алгеброй хордовых диаграмм [159]. Этот универсальный инвариант кодирует все инварианты Васильева с помощью хордовых диаграмм. Имеется открытая гипотеза, что универсальный инвариант Васильева является полным инвариантом узла. Однако интерес к интегралу Концевича и инвариантам Васильева проистекает не только из-за

этой гипотезы, но и из-за их связей с интересными комбинаторными структурами, такими как алгебры хордовых, тривалетных и гауссовых диаграмм (подробности можно найти в [45; 46; 96; 248]). Также было установлено, что из интеграла Концевича можно получить любой цветной квантовый инвариант [135], если реализовать алгебру хордовых диаграмм с помощью групповых структур алгебры Ли калибровочных преобразований. Это позволяет вычислять инварианты Васильева из цветных квантовых инвариантов, если при этом известны соответствующие групповые факторы. На сегодняшний день это практически единственный рабочий способ систематически вычислять инварианты Васильева. Групповая структура пертурбативного разложения была исследована в работах не далее 6 порядка [68; 162]. В данной диссертации в главе 3 представлен совершенно иной подход к исследованию групповых структур, основанный на симметриях квантовых инвариантов узлов. Этот подход не только позволяет находить явные аналитические выражения для групповых факторов в произвольных представлениях, но и открывает совершенно новую связь с солитонными тау-функциями интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили.

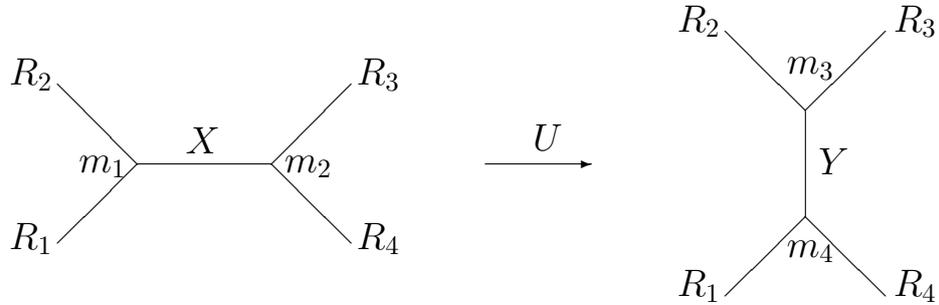
**Квантовые  $6j$ -символы.** Как уже отмечалось выше, оба непертурбативных подхода к вычислению цветных квантовых инвариантов узлов требуют знания квантовых  $6j$ -символов, также известных как квантовые коэффициенты Рака-Вигнера. Однако их вычисление само по себе является крайне нетривиальной задачей. Основных стратегий две: численные методы и аналитические методы. И в том, и в другом случае удобно ограничиться рассмотрением какого-нибудь класса  $6j$ -символов, потому что общая задача пока еще слишком сложна. Класс обычно выбирается либо исходя из метода, поскольку методы зачастую для одних классов представлений работают лучше, чем для других, либо исходя из конкретной задачи, которую исследователь хотел бы решить с помощью  $6j$ -символов. Ниже представлен обзор ключевой литературы, которая известна автору, по вычислению  $6j$ -символов с кратким указанием задач и областей, в которых различные классы  $6j$ -символов применяются или могут быть применены.

Подробное определение  $6j$ -символов дано в следующей главе, но, грубо говоря, они являются коэффициентами переразложения одного ортонормированного базиса в другой, определяемых порядком перемножения неприводимых

представлений:

$$U \begin{bmatrix} R_2 & R_3 \\ R_1 & R_4 \end{bmatrix}_{r_1, r_2}^{r_3, r_4} : \left\{ (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \longrightarrow R_4 \right\} \longrightarrow \left\{ R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) \longrightarrow R_4 \right\} \quad (17)$$

или графически



где левая и правая стороны представляют собой два различных базиса в пространстве переплетений (инвариантных тензоров квантовой группы)

$R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 \longrightarrow R_4$ . Каждый базис представляет собой набор векторов, раскрашенных выбором цвета внутреннего канала ( $X$  и  $Y$  на рисунке выше) и выбором переплетения  $m_i$  в каждой из четырех трехвалентных вершин. Матрица Рака представляет собой изменение базиса с левой стороны на правую.

Коэффициенты Рака-Вигнера или 6j-символы играют важную роль в науке, поскольку они возникают во множестве различных задач. Основная проблема - это возникновение кратностей  $m_i$ , которые появляются, когда ранг алгебры становится довольно большим, например, для алгебры  $sl(N)$  при  $N > 2$ . Тем не менее, даже для представлений без кратностей аналитические формулы 6j-символов известны далеко не для всех классов представлений. С физической точки зрения 6j-символы отвечают за смену базиса  $s$ -канала на базис  $t$ -канала и находят самое разнообразное применение от моделей квантовой гравитации до теории конденсированного состояния вещества. Более подробный обзор применения 6j-символов для описания физических систем приведен ниже.

Впервые 6j-символы появились в работе Е.Вигнера в 1940 году [320], где использовались как инструмент для исследования неприводимых представлений  $SO(3)$  и  $SU(2)$ . В 1942 году при изучении атомных спектров Г.Рака [263] ввел понятие коэффициентов обратной связи (recoupling coefficients по-английски) для описания угловых моментов. С тех пор во всех учебниках по квантовой механике есть обязательно главы, посвященные 6j-символам, например, в классическом труде Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [332]. Подробнее про применение

6j-символов в обобщенной теории углового момента для описания сложных систем (атомов, ядер, молекул, адронов, излучения) можно прочитать, например, в книге [52]. Отличие между определениями Вигнера и Рака состоит в нормировке, которая в случае 6j-символов Вигнера делает симметрию тетраэдра более явной.

В теории представлений исследование 6j-символов сконцентрировано, в основном, вокруг представлений алгебры  $sl(N)$  и ее различных деформаций. Поскольку в теории углового момента важны конечномерные неприводимые представления группы  $SU(2)$ , то в первую очередь исследования были сосредоточены вокруг этих представлений. Подытоживая эти работы, хочется обратить внимание на три самых интересных момента в этой истории. Во-первых, была открыта полная группа симметрий 6j-символов, которая содержит 144 элемента: группа вращения тетраэдра  $S_4$  была обнаружена еще Е.Вигнером, а дополнительная группа симметрий  $S_3$  была обнаружена Т.Редже в 1959 году [272]. Первые называются симметриями тетраэдра, а вторые называются симметриями Редже. Во-вторых, была получена явная аналитическая формула для всех таких 6j-символов в терминах гипергеометрической функции  ${}_4F_3$  [123], которая оказалась связанной с системой дискретных ортогональных многочленов Рака [22]. Это открывает связь 6j-символов с теорией специальных функций, которая в дальнейшем оказалась очень плодотворной. В-третьих, у 6j-символов оказался очень интересный квазиклассический предел, когда все представления становятся большими [254]. Он, с одной стороны, осциллирует, а с другой стороны, связан с объемом соответствующего тетраэдра. Появление таких интересных свойств даже для самых простых представлений  $SU(N)$  побудило большое количество исследователей по всему миру заняться изучением 6j-символов.

Все дальнейшие исследования 6j-символов можно условно разделить на три направления:

1. конечномерные представления для старших рангов  $sl(N)$ ;
2. бесконечномерные представления  $sl(2)$ ;
3. обобщения на всевозможные другие алгебры, например,  $so(N)$ ,  $sp(N)$ ,  $U_q(sl_N)$ ,  $su(1|1)$ ,  $osp(1|2)$  и др.

**Конечномерные представления  $sl(N)$ .** Естественным продолжением работ по 6j-символам стал переход от группы  $SU(2)$  к группе  $SU(3)$ , поскольку Стандартная модель включает эту группу и для описания процессов рассеяния

потребуется  $s-t$ ,  $s-u$  и  $t-u$  кроссинг-матрицы [271]. Группа  $SU(3)$  уже достаточно общая и расширения на произвольный ранг прямолинейны, поэтому удобно работать сразу в общем случае. Случаем общего положения для представлений алгебр старшего ранга является наличие нетривиальных кратностей  $m_i > 1$ . Насколько известно автору, никаких замкнутых аналитических формул в этом случае пока не найдено. Тем не менее, существуют методы вычислений конкретных коэффициентов для фиксированных представлений, см. например [40]. Однако если рассмотреть случай, когда все кратности тривиальны  $m_i = 1, \forall i$ , то работать станет проще. И хотя, насколько нам известно, общий случай произвольных бј-символов без кратностей для  $sl(N)$  пока еще остается неизученным, но ряд интересных результатов был получен. Если положить представления  $R_1$  и  $R_3$  полностью (анти)симметричными, то вне зависимости от того, чему равны оставшиеся четыре представления, такой бј-символ будет без кратностей. Общая формула была получена в [113] и независимо в [108], см. также работу [326]. При этом в работе [108] были определены ортогональные многочлены гипергеометрического типа от многих переменных, которые обобщают полиномы Рака, и ответ был выражен через них.

В физических приложениях бј-символы для конечномерных представлений старших рангов имеют широкое применение. Как уже было сказано, они описывают  $s-t$ ,  $s-u$  и  $t-u$  кроссинг-матрицы [271]. Например, бј-символы с кратностями группы  $SU(3)$  используются для описания эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала в кварк-глюонной плазме, см. в качестве примера недавнюю работу [19] и ссылки в ней.

Случай бј-символов с полностью антисимметричными представлениями применим для задач ядерной спектроскопии в системах идентичных фермионов, особенно использующих методы спектральных распределений, разработанные в [42]. Для симметрических представлений можно также рассмотреть систему идентичных нуклонов, охватывающую большую часть модельного пространства ядерных оболочек, где соответствующая унитарная группа  $SU(N)$ , с  $N = (2j_1 + 1) + (2j_2 + 1) + \dots$ , может включать большие значения  $N$ , где  $j_1, j_2, \dots$  – это угловые моменты нуклонов [113].

Список физических приложений огромен, для примера приведем еще несколько работ по самой разнообразной тематике: в решеточной калибровочной теории поля [20]; в теории конденсированного состояния вещества бј-символы появляются в задачах, связанных с квантовыми состояниями ультрахо-

лодных щелочноземельных атомов, которые преобразуются по представлениям  $SU(N)$  [311]; в теории полупроводников для построения кубитов [69].

**Бесконечномерные представления  $sl(2)$ .** Хотя в данной диссертации изучаются только конечномерными представлениями, вкратце стоит упомянуть про бесконечномерные представления, потому что конечномерные представления вкладываются в бесконечномерные как частные случаи. Однако методы работы с бесконечномерными представлениями зачастую сильно отличаются от методов для конечномерных случаев, поэтому разумно их выделить в отдельный класс. Для таких представлений б<sub>j</sub>-символы были впервые получены в работах [121; 122]. Впоследствии с помощью диаграммной техники Фейнмана они были получены в [57] в виде бесконечной суммы интегралов типа Меллина-Барнса, что снова отсылает полученные результаты к теории специальных функций гипергеометрического типа. В продолжении этих работ недавно [56] было получено, что эти б<sub>j</sub>-символы являются частным случаем эллиптической гипергеометрической  $V$ -функции (определения можно найти в [297]), которая также описывает эллиптические б<sub>j</sub>-символы [79]. Таким образом, на сегодняшний день для алгебр ранга 1 эллиптическая  $V$ -функция описывает самые общие б<sub>j</sub>-символы.

В физических приложениях бесконечномерные представления  $sl(2, \mathbb{C})$  появляются в высокоэнергетическом режиме квантовой хромодинамике [172], при этом рассеяние глюонов описывается одномерной решеточной моделью [173], которая полностью интегрируема [72].

**Обобщения на другие алгебры.** Среди всех алгебр для нас выделенным примером является квантовая версия  $U_q(sl_N)$  алгебры  $sl(N)$ , поскольку настоящая работа посвящена исследованием б<sub>j</sub>-символов именно такой алгебры. За определениями мы отсылаем к книге [147] и ссылкам на первоисточники внутри. С одной стороны, эта алгебра сложнее своей классической версии и в ней больше структур. С другой стороны, все полученные ответы легко редуцируются к классическим ответам, если положить  $q = 1$ .

Первым важным результатом для квантовых б<sub>j</sub>-символов является формула Кириллова-Решетихина [145] для конечномерных представлений  $U_q(sl_2)$ , которая обобщает все классические результаты. Ответ выражен через  $q$ -гипергеометрическую функцию, которая редуцируется к ортогональным полиномам

q-Рака (см. также [119; 131; 230; 265; 296]). Некоторые общие свойства для алгебры произвольного ранга  $U_q(sl_N)$  были получены в [170]. Некоторые методы вычисления произвольных квантовых бj-символов с простыми примерами обсуждаются в [170; 241].

Обобщение специального случая без кратностей [108; 113], который упоминался выше для классических алгебр, был получен в работе [10], которая осталась совершенно незамеченной. Ответ получен в виде многократной суммы гипергеометрического типа. Поскольку эта работа оставалась долгое время никому неизвестной, то ряд ее частных случаев был переоткрыт совсем недавно [227], в том числе в работах автора [202], правда, совершенно другими методами.

Ответы для конечномерных представлений с кратностями до работ автора были получены только в работе [102], если не считать совсем простых примеров из [241]. Там изучен случай представления  $[2,1]$  для так называемых эксклюзивных матриц Рака-Вигнера. Подробнее о них чуть ниже.

Свое применение квантовые бj-символы находят в рациональных конформных теориях поля, где они играют роль матриц слияния [209], о конкретной модели ВЗНВ уже упоминалось выше. Они применяются при вычислении инвариантов Тураева-Виро трехмерных многообразий [309; 310]. Также они играют ключевую роль в некоторых моделях 3-мерной квантовой гравитации, см. для примера [76; 78; 177; 233]. Они также важны в моделях топологического квантового компьютера [80; 307].

Квантовые бj-символы для бесконечномерных представлений алгебры  $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$  были вычислены в [253]. Там же обсуждается связь с квантовой теорией Лиувилля и со специальными функциями – квантовыми дилогарифмами Фаддеева. Развитие этого сюжета продолжено в работе [243], где получены бj-символы для  $U_q(osp(1|2))$  в рамках исследования суперсимметричной теории Лиувилля. Результаты для бj-символов бесконечномерных представлений  $U_q(su(1|1))$  получены в [98], где обсуждается связь с полиномами Аски-Вильсона, которые являются аналитическим продолжением полиномов q-Рака.

Другой пласт работ посвящен исследованиям бj-символам алгебры  $so(N)$  или ее квантовой деформации  $U_q(so(N))$ . Результаты для конечномерных симметрических представлений классической  $so(N)$  были получены были получены в [11], обобщения на квантовый случай для простейших представлений [236]. В физических приложениях такие бj-символы возникают при описании эффек-

та Яна-Теллера, см. для примера [129; 130], а также в высокотемпературном режиме решеточных  $SO(N)$ -моделей [118].

**Инклюзивные и эксклюзивные  $6j$ -символы.** Как можно видеть,  $6j$ -символы широко используются как в классических, так и в современных работах. Отметим, что во многих ситуациях, например в квантовой гравитации или в статистических моделях, рассматриваются статистические суммы, которые содержат сумму по всем возможным  $6j$ -символам заданной калибровочной группы. В таких задачах было бы очень полезно использовать симметрии между различными  $6j$ -символами, чтобы сократить сумму и упростить вычисления.

В зависимости от того, какую проблему в теории узлов вы решаете, могут потребоваться различные типы матриц Рака. Если в исходном формализме Решетихина-Тураева требовались все они, то некоторые упрощения могут быть достигнуты за счет использования его современных модификаций. Нас особенно интересуют следующие два класса матриц Рака:

$$\text{инклюзивные : } \mathcal{U}_Q \text{ with } R_1 = R_2 = R_3 = R, \quad R_4 = Q \in R^{\otimes 3} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} \text{эксклюзивные : } \quad S \text{ with } R_1 = R_2 = R_4 = R, \quad R_3 = \bar{R} \\ \bar{S} \text{ with } R_1 = R_3 = R_4 = R, \quad R_2 = \bar{R}. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти два класса матриц Рака позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для двух больших классов узлов. Инклюзивные (термин относится к произвольности конечного представления  $Q \in R^{\otimes 3}$ ) матрицы  $\mathcal{U}_Q$  позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИ, окрашенные в  $R$ , для произвольного трехнитевой косы  $\mathcal{L} = (m_1, n_1 | m_2, n_2 | \dots)$  через [194],

$$H_R^{(m_1, n_1 | m_2, n_2 | \dots)}(A, q) = \sum_{Q \in R^{\otimes 3}} \frac{d_Q}{d_R} \cdot \text{Tr}_Q \left( \mathcal{R}_Q^{m_1} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_Q^{n_1} \mathcal{U}_Q^\dagger \mathcal{R}_Q^{m_2} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_Q^{n_2} \mathcal{U}_Q^\dagger \dots \right), \quad (20)$$

где  $d_R$  – квантовая размерность представления  $R$  алгебры Ли  $sl_N$  (см. формулу (1.11)), выраженная через переменную  $A = q^N$ , а  $\mathcal{R}_Q$  – диагональная матрица с элементами

$$\lambda_Y = \varepsilon_Y q^{\varkappa_Y}, \quad Y \in R^{\otimes 2}, \quad (21)$$

где  $\varkappa_Y = \sum_{(i,j) \in Y} (ij)$  — значение оператора Казимира в представлении  $Y$ , а  $\varepsilon_Y = \pm 1$  в зависимости от того, принадлежит ли  $Y$  к симметричному или антисимметричному квадрату  $R$ . Для других простых алгебр Ли существуют аналогичные формулы, см. краткий обзор [190].

Эксклюзивные матрицы  $S$  и  $\bar{S}$ , где в “конечном состоянии” произведения  $R \otimes R \otimes \bar{R}$  подбирается только  $R$ , определяют [47; 304] строительные блоки (“пальцы”), которые позволяют вычислить ХОМФЛИ в представлении  $R$  для произвольных древовидных (двойных толстых) узлов [35; 41]  $\mathcal{K} = \{F^{I, k_I}\}$ :

$$H_R^{\{F_I\}} = \sum_{X_I \in R \otimes R \text{ or } R \otimes \bar{R}} \prod_{I, J} P_{X_I, X_J} \prod_{k_I} F_{X_I}^{\{I, k_I\}}, \quad (22)$$

где пропагаторы  $P_{X'X''}$ , соединяющие вершины  $I$ , являются просто матрицами  $S_{\bar{X}'X''}$  или  $\bar{S}_{\bar{X}'\bar{X}''}$  (черты относятся к антипараллельным, а не параллельным двойным линиям, две параллельные вершины никогда не соединяются), а пальцы, прикрепленные к вершинам, являются произвольными матричными элементами типа

$$F_X = \left( \dots S \bar{R}^{l_3} S R^{l_2} S^\dagger \bar{R}^{l_1} \bar{S} \right)_{\emptyset X}. \quad (23)$$

Несмотря на ограниченность, эти два класса узлов достаточно богаты и уже достаточно информативны: в частности, второй класс содержит нетривиальные пары мутантов. Вычисление инклюзивных и эксклюзивных матриц Рака может пролить свет на свойства этих двух классов узлов.

Различение мутантных узлов — очень сложная топологическая задача. Известно [216], что многочлены ХОМФЛИ, раскрашенные бескратными представлениями, не могут различать мутантов, а представления с кратностями, по крайней мере во всех известных нам случаях, могут (см. недавние работы [60; 215; 225] по этой теме). Представления без кратностей нумеруются всеми

прямоугольными диаграммами Юнга, поэтому представление [3,3] также относится к этому типу. Однако квантовые  $6j$ -символы по-прежнему представляют большой интерес для таких представлений. В первую очередь нас интересуют их аналитические свойства. Например, как уже упоминалось выше, любой  $6j$ -символ в  $SU(2)$  (а кратностей для  $SU(2)$  вообще нет) можно описать с помощью ортогонального полинома Рака, который выражается через гипергеометрическую функцию  ${}_4F_3$ . Из этого выражения, например, легко найти все их  $S_4 \times S_3$  симметрии: тетраэдрическую и Редже. Также из явного выражения легко получить известную асимптотическую формулу Понцано-Редже [254] через объем соответствующего тетраэдра.

Кроме того, согласно [188; 304], комбинируя 3-нитевую косу и древесные косы, можно построить большой класс узлов и зацеплений, которые мы называем *1-петлевыми* зацепления. Этот класс определенно включает в себя все древовидные зацепления и зацепления, которые имеют реализацию косы из 3 нитей. Обратите внимание, что эти 3-нитевые и древовидные классы не покрывают всю таблицу Рольфсена, в то время как 1-петлевой класс содержит всю таблицу Рольфсена, все 3-нитевые зацепления, все древовидные зацепления и, например, все мутантные узлы с 11 пересечениями.

**Целью** работы является построение методов вычисления квантовых инвариантов узлов и квантовых  $6j$ -символов, а также описание и исследование их различных свойств, в первую очередь, симметрий.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. разработать методы вычисления квантовых  $6j$ -символов для произвольных конечномерных представлений алгебры  $U_q(sl_N)$  для произвольных  $N$  и при общих значениях параметра квантовой деформации  $q$ ;
2. разработать методы построения симметрий квантовых  $6j$ -символов для произвольных конечномерных представлений алгебры  $U_q(sl_N)$ ;
3. на основе полученных результатов для квантовых  $6j$ -символов разработать методы вычисления квантовые инварианты узлов и зацеплений, раскрашенные произвольными конечномерными представлениями алгебры  $U_q(sl_N)$ ; получить явные аналитические формулы для квантовых инвариантов различных представительных классов узлов и зацеплений;

4. исследовать полученные формулы для квантовых инвариантов узлов и зацеплений на предмет скрытых симметрий;
5. описать зависимость от  $U_q(sl_N)$ -представления групповых структур квантовых инвариантов узлов, возникающих в пертурбативном разложении вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса, и исследовать их свойства.

**Научная новизна и практическая значимость** Полученные в диссертационной работе результаты являются оригинальными и новыми разработками автора диссертации. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных конференциях. Работы известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов.

Результаты работы имеют большую теоретическую значимость для исследований трехмерной квантовой теории поля с действием Черна-Саймонса, двумерной конформной теории поля Весса-Зумино-Новикова-Виттена, теории открытых топологических струн, моделей трехмерной гравитации, топологического квантового компьютера, открытых инвариантов Громова-Виттена. Полученные результаты открывают новые возможности для исследования различных математических объектов физическими методами. Большой прогресс в установлении тесных связей между современными подходами теоретической физики и фундаментальной математики, достигнутый в последнее время различными исследовательскими группами по всему миру, оказывается исключительно плодотворным как для физических теорий, так и для математических. Разработанные автором методы и полученные результаты регулярно используются отечественными и зарубежными научными группами.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Результаты, представленные в диссертации, получены с помощью аналитических и численных вычислений. Для описания квантовых инвариантов узлов использовались методы теории интегрируемых систем, основанные на R-матричном подходе к описанию представлений группы кос. Для получения аналитических формул для инвариантов семейства узлов или зацеплений использовался метод эволюции собственных значений R-матриц. Для вычисления квантовых б<sub>j</sub>-символов использовался метод векторов старшего веса, а также гипотеза о собственных значениях. Для исследования вильсоновских корреляторов использовались методы квантовой и конформной теории поля, например, разложение при больших N и операторное разложение. Для исследования спектров состояний Бо-

гомольного-Прасада-Зоммерфельда (далее БПС состояния) использовались методы калибровочно-струнной дуальности. Для исследования пертурбативного петлевого разложения вильсоновских операторов использовались методы теории групп, топологические методы и методы теории интегрируемых иерархий нелинейных дифференциальных уравнений.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработан алгоритм (метод старшего веса) вычисления квантовых  $6j$ -символов произвольных конечномерных представлений алгебры  $U_q(sl_N)$  для произвольного  $N$  и при общих значениях параметра квантовой деформации  $q$ . Алгоритм опирается на развитый автором подход с использованием пространств кратностей представлений и построением специальных ортонормированные базисов в этих пространствах. Применение алгоритма позволило впервые вычислить квантовые матрицы  $6j$ -символов для ряда представительных примеров несимметрических представлений с кратностями.
2. Предложенный алгоритмический метод старшего веса использован для явного вычисления квантовых инвариантов узлов и зацеплений в частном, но представительном классе, для которого эти инварианты ранее не были известны (3-нитевые узлы и зацепления, раскрашенные несимметрическими представлениями алгебры  $U_q(sl_N)$  для любых  $N$ , отвечающими диаграммам Юнга с двумя крюками и не более чем шестью клетками). Результаты согласуются с несколькими известными, но остающимися недоказанными, гипотезами о квантовых инвариантах 3-нитевых узлов, раскрашенных несимметрическими представлениями: гипотеза факторизации, гипотеза универсальности, дифференциальное разложение и разложение эт Хофта.
3. Предложен метод, позволяющий установить наличие бесконечного числа симметрий  $6j$ -символов для конечномерных представлений  $U_q(sl_N)$  при  $N \geq 3$ .

3.1. Для представлений без кратностей показано, что найденные симметрии содержат нетривиальные обобщения конечной группы симметрий, известной для  $U_q(sl_2)$  (симметрии тетраэдра и Редже, продолжение которых на общий случай  $U_q(sl_N)$  ранее не ожидалось).

- 3.2. Для представлений с кратностями выдвинута гипотеза о существовании симметрий  $\mathfrak{b}_j$ -символов, которые индуцируются двухпараметрическим семейством перестроек диаграмм Юнга, определяющих представления  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Эти перестройки, названные тяни-крюк в соответствии с их диаграммной реализацией, порождают отображения между шестерками представлений, оставляющие  $\mathfrak{b}_j$ -символы инвариантными. Для семейства перестроек тяни-крюк найдены явные формулы.
4. Установлено, что квантовые  $\mathfrak{b}_j$ -символы для симметрических и сопряженных к ним  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлений при произвольном  $N$  пропорциональны квантовым  $\mathfrak{b}_j$ -символам для представлений алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , определяемых перестройками диаграмм Юнга, которые отвечают исходным  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлениям. Коэффициенты пропорциональности, вообще говоря, нетривиальны и зависят от  $q$ , от  $N$  и от представлений; установлено, тем не менее, что указанные  $\mathfrak{b}_j$ -символы при произвольном  $N$  обладают тем же набором свойств, что и в случае  $N = 2$ . В частности, они являются ортогональными многочленами  $q$ -Рака и обладают асимптотикой Понцано-Редже, что открывает возможности приложения полученных в диссертации результатов к теории специальных функций и трехмерной квантовой гравитации.
5. Для обширного класса  $g$ -параметрических крендельных узлов найдена конструкция их квантовых инвариантов в виде сверток универсальных  $R$ -матриц, которые реализуют представление 2-нитевых узлов на косах специального вида (ширины 4). В сочетании с полученными в диссертации результатами для  $\mathfrak{b}_j$ -символов отсюда получены явные аналитические формулы квантовых инвариантов всех крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ .
6. Показано, что симметрии  $\mathfrak{b}_j$ -символов тяни-крюк индуцируют класс симметрий квантовых инвариантов узлов и зацеплений, раскрашенных  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлениями. Установлено происхождение этих симметрий в пертурбативном и непертурбативном построении вильсоновских средних в теориях Черна-Саймонса соответственно с калибровочной группой  $SU(N)$  и супергруппой  $SU(N + M|M)$ . Это дает прямое описание открытых нами новых симметрий квантовых инвариантов через извест-

ные симметрии в соответствующих теориях Черна-Саймонса, а также дополнительное свидетельство в поддержку сформулированной нами гипотезы о  $6j$ -символах.

7. Построенные симметрии квантовых инвариантов типа тяни-крюк позволили установить взаимно однозначное соответствие между групповыми структурами квантовых инвариантов узлов в конкретной специализации и подмножеством дисперсионных соотношений для солитонных решений в интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили. С использованием методов теории интегрируемых систем отсюда получены явные аналитические выражения для всех групповых структур в теории Черна-Саймонса в специализации, отвечающей цветным полиномам Александра. Это, в частности, дает аналитическую зависимость групповых структур от представлений  $SU(N)$ , что существенно облегчает вычисления важных классов инвариантов узлов и зацеплений (инвариантов Васильева).

**Степень достоверности** полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой рецензионной политикой. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в МИАН, ФИАН, НМУ, Сколтех, МФТИ, ИТЭФ, ЧелГУ, ИЯИ, в институте Кортвега-де Фриза (Амстердам, Нидерланды), в технологическом институте Бомбея (Мумбаи, Индия), в международном институте физики (Натал, Бразилия), в техническом университете (Гебзе, Турция). Полученные результаты также обсуждались на международных конференциях:

1. II International Conference "Quantum Topology" (Санкт-Петербург, 2015),
2. Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" (Москва, 2015),
3. "Duality, Integrability and Matrix Model" (Ицу, Япония, 2016),
4. "5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Spaces and Cohomological Field Theories" (Москва, 2016),

5. The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Прага, Чехия, 2016),
6. III International Conference "Quantum Topology" (Москва, 2016),
7. Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" (Москва, 2016),
8. "New Trends in Integrable Models" (Натал, Бразилия, 2016),
9. "Physics and knot homologies" (Кембридж, Великобритания, 2017),
10. "Topological field/string theory, Frobenius algebras and integrable system" (Москва, 2017),
11. "Topological Field Theories, String Theory and Matrix Models" (Москва, 2017),
12. "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics" (Баку, Азербайджан, 2018),
13. "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2018" (Москва, 2018),
14. "Actual Problems of Knot theory" (Стамбул, Турция, 2018),
15. International Russian-Japanese Conference on Interaction Between Algebraic Geometry and QFT (Москва, 2019),
16. International online conference "Integrability" dedicated to the 75th anniversary of A.K. Pogrebkov (2021).

**Личный вклад.** Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 печатном издании, индексируемых Web of Science и Scopus [7; 8; 43; 48–50; 87; 117; 165; 202–206; 212; 219; 240; 259; 264; 292; 294].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 311 страниц, включая 40 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 0 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, дается обзор современного состояния исследования и очерчивается круг задач, которым посвящена работа. Кратко излагаются основные положения топологиче-

ской квантовой теории поля Черна-Саймонса, теории узлов и квантовых б $\bar{j}$ -символов Рака-Вигнера.

В **главе 1** представлен  $\mathcal{R}$ -матричный формализм для вычисления квантовых инвариантов узлов, представлены новые симметрии этих инвариантов и показано, как их можно вывести в рамках данного формализма из гипотезы о собственных значениях.

В **разделе 1.1** мы определяем инварианты зацепления с помощью квантовых  $\mathcal{R}$ -матриц, обсуждаем их конечномерные представления  $U_q(sl_N)$  и их связи с квантовыми коэффициентами Рака. Также мы формулируем гипотезу о собственных значениях, которая утверждает, что матрица Рака полностью определяется набором нормированных собственных значений  $\mathcal{R}$ -матрицы.

В **разделе 1.2** мы рассматриваем трехнитевые косы, раскрашенные симметричными представлениями, и уточняем конструкцию и гипотезу о собственных значениях из предыдущего раздела для этого частного случая. Это дает нам доказательство (в предположении, что гипотеза о собственных значениях верна), что все матрицы Рака, возникающие при построении, на самом деле являются матрицами Рака алгебры  $U_q(sl_2)$ . Доказательство этого факта состоит из следующих шагов:

1. Мы находим все представления  $X$ , которые возникают из тензорного произведения двух базовых представлений и могут дать представление  $Q$  после умножения на третье представление. Это делается в **разделе 1.2.1**.
2. Мы показываем, что набор нормированных собственных значений для представления  $Q = [l, m, n]$ ,  $l + m + n = r_1 + r_2 + r_3$  совпадает с набором нормированных собственных значений для  $Q' = [l - 1, m - 1, n - 1]$ . Это делается в **разделе 1.2.2**.
3. Путем рекурсии показывается, что матрица Рака для представления  $Q = [l, m, n]$  совпадает с матрицей Рака для представления  $Q_0 = [ln, mn]$ , где диаграмма Юнга  $[ln, mn]$  является разбиением числа  $(r_1 - n + r_2 - n + r_3 - n)$ .

В **разделе 1.3** мы явно выписываем соответствующие коэффициенты Рака для неприводимых представлений алгебры  $U_q(sl_2)$ .

В **разделе 1.4** мы рассматриваем зацепление  $L_{7a_3}$ , чтобы продемонстрировать, как наши результаты позволяют вычислять симметричный многочлен ХОМФЛИ.

В разделе 1.5 найдена новая симметрия цветных полиномов ХОМФЛИ, которая связывает пары полиномов, раскрашенных разными представлениями при определенных значениях  $N$ .

В разделе 1.6 показано на качественном уровне, как такая симметрия возникает из супералгебр. В разделе 1.6.1 основное внимание сосредоточено на ограничениях, которые такое свойство накладывает на общую теоретико-групповую структуру, а именно на весовую систему  $sl(N)$ , возникающую в пертурбативном разложении инварианта узла.

В разделе 1.7 раскрывается связь с гипотезой о собственных значениях. Главным образом показано, как проверить эту симметрию в предположении, что гипотеза о собственных значениях верна.

В главе 2 с помощью метода эволюции по дискретным значениям количества пересечений нитей в косе мы вычисляем полиномы ХОМФЛИ, раскрашенные произвольными симметрическими представлениями алгебры  $sl(N)$ , для большого семейства крендельных узлов и зацеплений, которые состоят из  $g + 1$  двухнитевых кос с сонаправленной и противоположно направленной ориентациями и зависящих от  $g + 1$  целочисленных параметров.

В разделе 2.1 разобраны простые подготовительные примеры: в разделе 2.1.1 рассмотрен пример рода 1 (торические узлы) в фундаментальном представлении; в разделе 2.1.2 рассмотрен пример рода 1, торические зацепления, одна компонента которых раскрашена фундаментальным представлением, а вторая сопряженным к фундаментальному; в разделе 2.1.3 рассмотрен пример произвольного рода, но только в фундаментальном представлении.

В разделе 2.2 представлен основной результат – формула для полиномов ХОМФЛИ произвольных крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими и сопряженными к ним представлениями. Формула состоит из 3 основных ингредиентов: квантовых размерностей, собственных значений операторов эволюции и матриц слияния.

В разделе 2.3 даны краткие комментарии к основному результату, касающиеся общих замечаний про семейство кренделей.

В разделе 2.4 показано, что матрицы слияния с точностью до коэффициента пропорциональности равны матрицам квантовых б $\bar{j}$ -символов Рака-Вигнера для квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$ .

В разделе 2.5 с помощью полученных инвариантов дана классификация крендельных узлов с минимальным числом пересечений не более 10.

В **главе 3** изучаются теоретико-групповые структуры раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в специальном пределе  $A \rightarrow 1$ , который называется цветным полиномом Александра. Устанавливается соответствие между дисперсионными соотношениями солитонных тау-функций иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) и групповыми факторами Александра. Таким образом, цветной полином Александра вкладывается в действие производящей функции КП на солитонную тау-функцию. Используя данное соответствие, представлено достаточно простое комбинаторное описание групповых факторов в терминах диаграмм Юнга вместо хордовых диаграмм, для которых простое описание неизвестно.

В **разделе 3.1** представлено краткое введение в эту главу.

В **разделе 3.2** представлены основные результаты, полученные в этой главе. Там же обсуждаются качественные аспекты полученных утверждений, их важность и физические следствия.

**Раздел 3.3** посвящен определениям цветного полинома Александра, который представлен как обобщение обыкновенного топологически определенного полинома Александра.

В **разделе 3.4** изучается пертурбативное разложение полинома и определяется система уравнений Александра. Далее изучается пространство решений этой системы, выводятся свойства этих решений и размерность пространства решений. Обсуждается интересная связь с суперсимметричными полиномами.

**Раздел 3.5** посвящен общим свойствам уравнений КП и тау-функциям, необходимым для формулировки утверждения.

В **разделе 3.6** представлено доказательство основной теоремы, которая устанавливает соответствие между решениями уравнений Александра, солитонными дисперсионными соотношениями и комбинаторным описанием пертурбативных групповых факторов.

В **главе 4** приведен пример вычислений в рамках гипотезы о топологической струнной дуальности, которая связывает теорию Черна-Саймонса с топологической теорией струн на разрешенном конифолде – некомпактном многообразии Калаби-Яу. Этот пример иллюстрирует, как с помощью раскрашенных квантовых инвариантов узлов проверять струнные гипотезы о целочисленности чисел БПС состояний, которые определяют амплитуды ориентированной топологической струны.

В **разделе 4.1** дано краткое описание гипотез Гопакумара-Вафы и Оогури-Вафы о топологической струнной дуальности.

В **разделе 4.2** приведена точная формулировка гипотез о целочисленности: в **разделе 4.2.1** для группы  $SU(N)$ , в **разделе 4.2.2** для группы  $SO(N)$ . В **разделе 4.2.3** обсуждаются источники формул для проверки гипотез и кратко резюмируется недавний прогресс в вычислении полиномиальных инвариантов узлов.

В **разделе 4.3** подробно представлены проверки гипотезы о целочисленности для конкретного узла: в **разделе 4.3.1** для группы  $SU(N)$ , в **разделе 4.3.2** для группы  $SO(N)$ , а в **разделе 4.3.3** для зацепления. В **разделе 4.3.4** выписаны инклюзивные матрицы Рака, которые необходимы для вычисления полиномов для двухкомпонентных зацеплений из предыдущего раздела и проверки гипотезы о целочисленности.

**Раздел 4.4** посвящен первому применению полученных результатов: наблюдению гауссовского распределения инвариантов Лабастиды-Мариньо-Оогури-Вафы (ЛМОВ). Представлена точная формулировка и свидетельства в поддержку этого нового загадочного наблюдения о старых не до конца понятых величинах. Это, вероятно, подразумевает, что БПС состояния, подсчитываемые числами ЛМОВ, на самом деле могут быть составными частями, сделанными из еще более элементарных объектов.

В **разделе 4.5** обсуждаются возможные теоретические объяснения наблюдаемого феномена. Сначала в **разделе 4.5.1** обсуждаются общие вопросы, связанные с подсчетом состояний, в **разделе 4.5.2** определяются плетистические экспоненты и обсуждаются их свойства. В **разделе 4.5.3** для полноты картины делается обзор работ по интерпретации чисел ЛМОВ с точки зрения подсчета отображений римановых поверхностей с границами. В **разделе 4.5.4** кратко приводятся основные формулы для различных распределений.

В **разделе 4.6** приводятся еще несколько гауссовских и биномиальных графиков, чтобы лучше проиллюстрировать явление. Также обсуждаются различные связанные проблемы, в частности, зависимости чисел ЛМОВ не только от рода римановой поверхности, но также от заряда и узла, последнее для естественных серий 2-нитевых и 3-нитевых торических узлов и скрученных узлов и для различных представлений.

В **разделе 4.7** обсуждается вопрос насколько часто встречаются гауссовские распределения коэффициентов, действительно ли это экзотика среди

«реалистичных» больших многочленов с положительными коэффициентами. В качестве примера разбираются квантовые числа и их отношения.

В **главе 5** представлены новые симметрии и соотношения квантовых бј-символов. Приведено доказательство гипотезы о собственных значениях для квантовой алгебры  $sl_2$ .

В **разделе 5.1** дается краткое введение в историю вопроса о симметриях бј-символов.

В **разделе 5.2** приводятся определения коэффициентов Рака и бј-символов для  $U_q(sl_N)$ . Рассматриваются бј-символы, которые содержат только симметрические и сопряженные симметрическим представления. Все эти бј-символы могут быть преобразованы с помощью симметрии тетраэдра в два типа эксклюзивных бј-символов, которые уже фигурировали в главе 2. Для типа I единственным сопряженным симметрическому представлением является второе, для типа II - третье. Каждый тип можно рассматривать как естественное обобщение бј-символов  $U_q(sl_2)$ , потому что каждое разложение тензорного произведения для этого случая не имеет кратностей и может быть занумеровано целым числом, а не всей диаграммой Юнга.

В **разделе 5.3** рассматривается выражение для обоих типов. Сначала доказывается, что выражение можно упростить, после чего ряд становится намного больше похож на ряд  $U_q(sl_2)$ . Это делается для обоих типов независимо, и, похоже, они могут быть представлены как одно универсальное выражение для обоих типов. Затем оно выражается через q-гипергеометрическую функцию  ${}_4\Phi_3$  с некоторым множителем. Доказывается, что это выражение не имеет ограничений на свои аргументы. В результате выражение становится более удобным для изучения симметрий.

В **разделе 5.4** анализируется полученное гипергеометрическое выражение. Найдено преобразование между рассматриваемыми бј-символами алгебры  $U_q(sl_N)$  и бј-символами для  $U_q(sl_2)$ . Этот результат дает множество возможностей для обобщения хорошо известных свойств бј-символа  $U_q(sl_2)$  на рассматриваемый случай.

В качестве непосредственного следствия такого соотношения в **разделе 5.5** выводится классическая ( $q = 1$ ) асимптотику бј-символов, используя известные результаты для  $U(sl_2)$ . Изначально этот результат был написан в терминах ассоциированного тетраэдра. Обобщение на  $U(sl_N)$  модифицирует выражение

так, что тетраэдр теперь зависит от  $N$  и деформируется по-разному для двух типов бj-символов.

В **разделе 5.6** исследуются симметрии полученного выражения для бj-символов. Полученный ряд  ${}_4\Phi_3$  имеет две известные симметрии: перестановка аргументов в каждой строке и преобразование Сирса. Полное число гипергеометрических симметрий обоих типов равно 23040. Тем не менее, только 24 из них образуют группу симметрий бj-символа типа I и 12 – типа II. Некоторые из них тетраэдральные, другие могут быть описаны как обобщение симметрий Редже для  $N \geq 2$ .

Также рассматриваются дополнительные симметрии, которые связывают бj-символы  $U_q(sl_N)$  и  $U_q(sl_M)$  в **разделе 5.6.4** и **разделе 5.6.5**. Они получены в терминах симметрий между гипергеометрическими рядами, поэтому необходимо подобрать нормировку, соответствующую бj-символам. Найдены нетривиальные выражения для обоих типов и приведены примеры. Основными результатами этих подразделов являются симметрии, которые обобщают перестановки отличным от тетраэдрального способом. Они переходят в обычные хорошо известными симметрии при  $N = 2$ , а при  $N > 2$  явно зависят от  $N$ .

В **разделе 5.7** гипотеза о собственных значениях переформулируется таким образом, чтобы с ней было удобно работать в данной главе. Все начинается с общей формулировки гипотезы, а затем ограничивается конкретным классом матриц Рака.

В **разделе 5.8** рассматриваются 3 симметрических входящих представления и произвольное выходящее. Это позволяет свести гипотезу к системе линейных уравнений. В результате все предсказанные симметрии перечислены как решения системы.

В **разделе 5.9** приводится доказательство гипотезы о собственных значениях для случая  $U_q(sl_2)$ . Хорошо известно, что существует 144 симметрии для  $U_q(sl_2)$  бj-символов, но в терминах матриц Рака эти отношения приравнивают некоторые конкретные матричные элементы, а не обязательно матрицы целиком. Если рассматривать только матричные симметрии бj-символов, то остается 8 эквивалентных матриц. Все эти соотношения получены с помощью гипотезы о собственных значениях для случая  $U_q(sl_2)$ . Также верно, что условия гипотезы о собственных значениях выполняются для матриц Рака в  $U_q(sl_2)$ , которые равны из-за симметрии. Это означает, что в случае  $U_q(sl_2)$  гипотеза о собственных значениях доказана.

В разделе 5.10 такая же процедура применяется для представлений  $U_q(sl_{N>2})$ , где возникает такое же количество соотношений – получается 8 симметрий. Есть несколько ключевых особенностей, которые отличают  $N > 2$  от  $N = 2$ . Во-первых, эти симметрии не являются симметриями бј-символов при условии, что коэффициенты нормировки могут быть различными после применения симметрии. Также интересной особенностью обнаруженных симметрий является наличие в этих соотношениях свободного параметра. Этот параметр может принимать произвольные неотрицательные целые значения, и он позволяет нам приравнять бесконечный набор матриц Рака. Поскольку вывод очень похож для  $N = 2$  и  $N > 2$ , можно видеть соответствие между симметриями в этих двух случаях и называть  $U_q(sl_N)$  симметрии по аналогии с симметриями  $U_q(sl_2)$ . В частности, симметрия Редже может быть легко обобщена для этого класса матриц Рака. Также известно, что  $U_q(sl_N)$  бј-символы имеют симметрии тетраэдра, но полученные симметрии совпадают с ними только при  $N = 2$ .

Симметрии тетраэдра для  $U_q(sl_N)$  связывают матрицы Рака, чей класс отличается от предыдущего раздела, этот класс включает эксклюзивные матрицы Рака. Фактически, в разделе 5.11 исследуется эксклюзивный класс матриц Рака с двумя симметрическими входящими и выходящими представлениями, и получаются только симметрии тетраэдра. Затем рассматривается более сложный случай, чтобы продемонстрировать гибкость метода гипотезы о собственных значениях. Получаются 4 новые симметрии, которые нельзя выразить через симметрии тетраэдра.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

В приложении А изложены необходимые элементы теории узлов.

## Глава 1. R-матричный формализм и новые симметрии

### 1.1 Инварианты зацеплений из квантовых групп

В этом разделе мы даем определение раскрашенных полиномов ХОМФЛИ произвольных зацеплений с помощью подхода Решетихина-Тураева [273; 276; 277; 308; 331], основанного на теории квантовых групп и квантовой  $\mathcal{R}$ -матрице.

#### 1.1.1 $\mathcal{R}$ -инварианты матрицы и зацепления

Прежде всего, определим квантовые  $\mathcal{R}$ -матрицы, которые связаны с разноцветной косой. Предположим, у нас есть коса из  $m$  прядей. Мы связываем конечномерное представление  $R_i$  квантованной универсальной обертывающей алгебры  $U_q(sl_N)$  с  $i$ -й нитью. Поскольку мы предполагаем, что  $q$  - ненулевое комплексное число, которое не является корнем из единицы, все конечномерные представления являются представлениями старших весов и могут быть пронумерованы диаграммами Юнга. Из-за этого для простоты мы идентифицируем диаграмму Юнга и представление и используем одни и те же обозначения для обоих, когда это может быть сделано без двусмысленности.

- Существует универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица

$$\check{\mathcal{R}} = q^{\sum_{i,j} C_{ij}^{-1} H_i \otimes H_j} \prod_{\text{полож. корни } \beta} \exp_q[(1 - q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta]. \quad (1.1)$$

здесь  $(C_{ij})$  является матрицей Картана,  $\{H_i, E_i, F_i\}$  генераторы  $U_q(sl_N)$ , а функция  $\exp_q$  определена как

$$\exp_q = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{r(r+1)}{2}} \frac{x^n}{[n]!}, \quad (1.2)$$

$$[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q^1 - q^{-1}}, \quad [n]! := [n][n-1] \dots [2][1]. \quad (1.3)$$

- Если мы определим обратимый линейный оператор

$$\mathcal{R}_i = 1_{V_1} \otimes 1_{V_2} \otimes \dots \otimes P\check{\mathcal{R}}_{i,i+1} \otimes \dots \otimes 1_{V_m} \in \text{End}(V_1 \otimes \dots, \otimes V_m), \quad (1.4)$$

где  $P(x \otimes y) = y \otimes x$  и  $\check{\mathcal{R}}$  действует на два  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -модуля  $V_i$  и  $V_{i+1}$ , тогда хорошо известно [145], [281], что  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{m-1}$  определяют представление группы кос Артина  $B_m$  на  $m$  нитях:

$$\begin{aligned} \pi : B_m &\rightarrow \text{End}(V_1 \otimes \dots, \otimes V_m) \\ \pi(\sigma_i) &= \mathcal{R}_i, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  являются генераторами группы кос  $B_m$ . Графически мы можем представить  $\mathcal{R}_i$  следующим образом:

$$\mathcal{R}_i = \begin{array}{c} V_1 \text{ ————— } \\ \dots \\ V_i \text{ ————— } \\ V_{i+1} \text{ ————— } \\ \dots \\ V_m \text{ ————— } \end{array}$$

Очевидно, что обратное пересечение дается  $\mathcal{R}_i^{-1}$ . Операторы  $\mathcal{R}_i$  удовлетворяют соотношениям группы кос  $B_m$ :

$$\begin{aligned} \text{far commutativity} \quad \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j &= \mathcal{R}_j \mathcal{R}_i, & \text{для } |i - j| \neq 1 \\ \text{braiding relation} \quad \mathcal{R}_i \mathcal{R}_{i+1} \mathcal{R}_i &= \mathcal{R}_{i+1} \mathcal{R}_i \mathcal{R}_{i+1}, & \text{для } i = 1, \dots, m - 2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Графически сплетающее соотношение есть не что иное, как третье движение Рейдемейстера, а алгебраически это хорошо известное *квантовое уравнение Янга-Бакстера* на квантовой  $\mathcal{R}$ -матрице.

Теорема • Александера утверждает, что любая ссылка  $\mathcal{L}$  в  $\mathbb{R}^3$  может быть получена замыканием соответствующей косы. Пусть  $\mathcal{L}$  - ориентированное звено с  $L$  компонентами  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_L$ , раскрашенными представлениями  $R_1, \dots, R_L$  и  $\beta_{\mathcal{L}} \in B_m$  - неким коса, замыкание которой дает  $\mathcal{L}$ . Тогда согласно подходу Решетихина-Тураева [277] квантовый групповой инвариант, также известный как цветной многочлен ХОМФЛИ, связки  $\mathcal{L}$  определяется следующим образом:

$$H_{R_1, \dots, R_L}^{\mathcal{L}} = {}_q \text{tr}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m} (\pi(\beta_{\mathcal{L}})), \quad (1.7)$$

где  ${}_q\text{tr}$  квантовый след.

• Хотя квантовый след является стандартным понятием в теории квантовых групп [147], мы приводим здесь некоторые детали, которые полезны в подходе Решетихина-Тураева.

Пусть  $\rho$  обозначает полусумму всех положительных корней  $sl_N$ . Существует элемент  $K_{2\rho} \in U_q(sl_N)$ , определенный как

$$\begin{aligned} K_{2\rho} &= K_1^{n_1} K_2^{n_2} \dots K_{N-1}^{n_{N-1}}, \\ 2\rho &= \sum_{i=1}^{N-1} n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\alpha_i$  простые корни. Тогда для каждого  $z \in \text{End}(V)$  имеем квантовый след

$${}_q\text{tr}_V(z) = \text{tr}_V(zK_{2\rho}). \quad (1.9)$$

• Давайте разложим  $R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_m$  в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\bigotimes_i R_i = \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_{\mu} \otimes Q_{\mu}, \quad (1.10)$$

где  $Q_{\mu}$  - неприводимое представление, а  $\mathcal{M}_{\mu}$  - подпространство векторов старшего веса с старшими весами<sup>1</sup> соответствующей диаграмме Юнга  $\mu \vdash \sum_i |R_i|$ . Размерность пространства  $\mathcal{M}_{\mu}$  называется *кратностью* представления  $Q_{\mu}$ .

Вычислим квантовый след (1.9) на таком разложении (1.10). Поскольку  $\mathcal{R}$ -матрица коммутирует с любым элементом из  $U_q(sl_N)$ , то  $\mathcal{R}$ -матрица получает блочную структуру, соответствующую разложению по неприводимым компонентам (1.10), т.е. он не смешивает векторы из разных представлений. Более того,  $\mathcal{R}$ -матрица действует на  $Q_{\mu}$  как единичный оператор, а на  $\mathcal{M}_{\mu}$  - нетривиально. Элемент  $K_{2\rho}$  действует по диагонали на  $Q_{\mu}$ , а на  $\mathcal{M}_{\mu}$  он действует идентично, поскольку существуют векторы старшего веса с одинаковым весом  $\vec{\omega}(\mu)$ . Следовательно, разложение (1.10) влечет для раскрашенного ХОМФЛИПТ (1.7) следующее

$$\begin{aligned} H_{R_1, \dots, R_L}^{\mathcal{L}}(q, A = q^N) &= \text{tr}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m}(\pi(\beta_{\mathcal{L}}) K_{2\rho}) = \\ &= \sum_{\mu} \text{tr}_{\mathcal{M}_{\mu}}(\pi(\beta_{\mathcal{L}})) \cdot \text{tr}_{Q_{\mu}}(K_{2\rho}) = \sum_{\mu} \text{tr}_{\mathcal{M}_{\mu}}(\pi(\beta_{\mathcal{L}})) \cdot q \dim_{\mu}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Напомним, что если  $\mu$  - диаграмма Юнга  $\mu = \{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots, \mu_l > 0\}$ , то старшие веса  $\vec{\omega}$  соответствующее представление:  $\omega_i = \mu_i - \mu_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, l$ , и наоборот  $\mu_i = \sum_{k=i}^l \omega_k$ .

где явная формула для квантовой размерности  $\text{qdim}_\mu =_q \text{tr}(id_{Q_\mu})$  представления  $Q_\mu$  задается с помощью многочленов Шура:

$$\text{qdim}_\mu = s_\mu(x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_i = q^{N+1-2i}} = s_\mu(p_1, \dots, p_N) \Big|_{p_k = p_k^*} \equiv s_\mu^*(A, q), \quad (1.11)$$

где  $p_k = \sum_{i=1}^N x_i^k$  и  $p_k^* = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}$ . Для  $s_\mu^*(A, q)$  существует очень простая формула крюков:

$$s_\mu^*(A, q) = \prod_{(i,j) \in R} \frac{Aq^{j-i} - (Aq^{j-i})^{-1}}{q^{\kappa(i,j) + \lambda(i,j) + 1} - (q^{\kappa(i,j) + \lambda(i,j) + 1})^{-1}}, \quad (1.12)$$

где  $\kappa(i, j) = R_i - j - 1$  и  $\lambda(i, j) = R'_j - i - 1$ .

### 1.1.2 Квантовые б- $j$ символы

В этом подразделе мы определяем квантовые коэффициенты Рака, также известные как символы б- $j$ .

Рассмотрим три конечномерных неприводимых представления  $R_{i_1}$ ,  $R_{i_2}$ ,  $R_{i_3}$  старших весов  $U_q(sl_N)$ . Поскольку тензорное произведение этих представлений ассоциативно, возникает естественный изоморфизм:

$$(R_{i_1} \otimes R_{i_2}) \otimes R_{i_3} \rightarrow R_{i_1} \otimes (R_{i_2} \otimes R_{i_3}). \quad (1.13)$$

Разложим тензорное произведение двух представлений на неприводимые компоненты, как в (1.10):

$$\begin{aligned} R_{i_1} \otimes R_{i_2} &= \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_{\mu}^{i_1, i_2} \otimes X_{\mu}, \\ R_{i_2} \otimes R_{i_3} &= \bigoplus_{\nu} \mathcal{M}_{\nu}^{i_2, i_3} \otimes Y_{\nu}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

и снова

$$\begin{aligned} (R_{i_1} \otimes R_{i_2}) \otimes R_{i_3} &= \bigoplus_{\mu, \xi} \mathcal{M}_{\mu}^{i_1, i_2} \otimes \mathcal{M}_{\xi}^{\mu, i_3} \otimes R_{\xi}, \\ R_{i_1} \otimes (R_{i_2} \otimes R_{i_3}) &= \bigoplus_{\nu, \xi} \mathcal{M}_{\xi}^{i_1, \nu} \otimes \mathcal{M}_{\nu}^{i_2, i_3} \otimes R_{\xi}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Тогда изоморфизм ассоциативности (1.13) влечет

$$\Phi_{i_3, \xi}^{i_1, i_2} : \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_{\mu}^{i_1, i_2} \otimes \mathcal{M}_{\xi}^{\mu, i_3} \rightarrow \bigoplus_{\nu} \mathcal{M}_{\xi}^{i_1, \nu} \otimes \mathcal{M}_{\nu}^{i_2, i_3}, \quad (1.16)$$

а коэффициенты Рака определяются как компоненты отображения:

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} i_1 & i_2 & \mu \\ i_3 & \xi & \nu \end{array} \right] = \left( \Phi_{i_3, \xi}^{i_1, i_2} \right)_{\mu, \nu}. \quad (1.17)$$

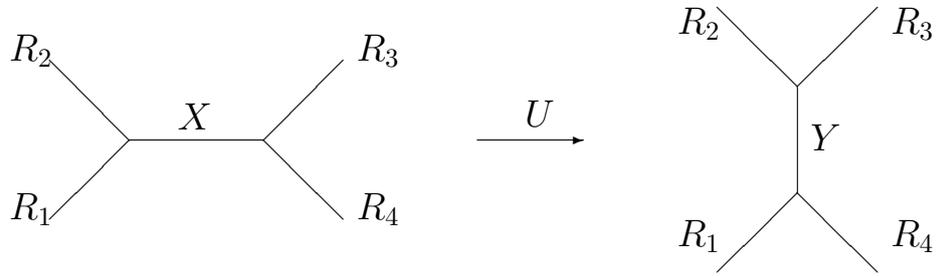
Поскольку данная работа посвящена коэффициентам Рака, то давайте изменим некоторые обозначения, чтобы сделать их более удобными и наглядными. Вместо индексов  $i_1, i_2, i_3$  и  $\xi$  мы будем использовать представления  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$ , а вместо промежуточных индексов  $\mu$  и  $\nu$  -  $X \in R_1 \otimes R_2$  и  $Y \in R_2 \otimes R_3$ . Таким образом, мы обозначим матрицу Рака через

$$U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

и коэффициент Рака

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & X \\ R_3 & R_4 & Y \end{array} \right]. \quad (1.19)$$

Графически матрицу Рака можно представить следующим образом



Подробное их явное вычисление с помощью векторов старшего веса для различных представлений можно найти в [49; 117; 259; 260; 292].

### 1.1.3 $\mathcal{R}$ -матрицы через матрицы Рака

Теперь мы опишем, как квантовые матрицы Рака связывают различные  $\mathcal{R}$ -матрицы (1.4) друг с другом [145; 273].

- Выберем базис на  $R_1 \otimes \cdots \otimes R_m$ , что соответствует следующий порядок в тензорном произведении:

$$B_{12,3,\dots,m} := \left( \dots \left( (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \right) \otimes \dots \right) \otimes R_m. \quad (1.20)$$

Тогда матрица  $\mathcal{R}_1$  в этом базисе принимает блочную форму на каждом пространстве  $\mathcal{M}_\mu$  из (1.10). Разные блоки соответствуют разным представлениям  $X_\alpha$  в разложении

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_{\alpha}^{1,2} \otimes X_{\alpha} \quad (1.21)$$

как мы обсуждали после формулы (1.10). Размер блока, который соответствует  $X_\alpha$ , равен  $\dim \mathcal{M}_\alpha^{1,2} \times \dim \mathcal{M}_\alpha^{1,2}$ . Следовательно, если  $\dim \mathcal{M}_\alpha^{1,2} > 1$ , то нужно дополнительно повернуть базис (те компоненты, которые соответствуют  $\alpha$ ) для диагонализации матрицы  $\mathcal{R}_1$ , но это всегда можно сделать. Таким образом, в базисе  $B_{12,3,\dots,m}$  всегда можно диагонализировать матрицу  $\mathcal{R}_1$ .

• Чтобы диагонализировать матрицу  $\mathcal{R}_2$ , мы должны повторить ту же процедуру, но для базиса, соответствующего

$$B_{1,23,\dots,m} := \left( \dots \left( R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) \right) \otimes \dots \right) \otimes R_m. \quad (1.22)$$

Следовательно, для диагонализации матрицы  $\mathcal{R}_2$  необходимо произвести преобразование базиса с помощью матрицы Рака:

$$\mathcal{R}_2 = U^\dagger \begin{bmatrix} R_1 & R_3 \\ R_2 & R_4 \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(\lambda_{\mathcal{R}_2}) \cdot U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

где  $\lambda_{\mathcal{R}_2}$  средние собственные значения матрицы  $\mathcal{R}_2$  и  $U$  - соответствующие матрицы Рака.

• Третью матрицу  $\mathcal{R}_3$  можно диагонализировать в базисе, соответствующем следующему произведению представлений:

$$B_{1,2,34,\dots,m} := \left( \dots \left( R_1 \otimes \left( R_2 \otimes (R_3 \otimes R_4) \right) \right) \otimes \dots \right) \otimes R_m. \quad (1.24)$$

Таким образом, диагонализация  $\mathcal{R}_3$  должна производиться с помощью следующей цепочки преобразований:

$$(1.25)$$

Здесь у нас есть следующие матрицы Рака:

$$U_1 = U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & Q_1 \end{bmatrix}, \quad U_2 = U \begin{bmatrix} R_1 & Y \\ R_4 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad U_3 = U \begin{bmatrix} R_2 & R_3 \\ R_4 & Q_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{U}_1 = U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_4 & Q_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_2 = U \begin{bmatrix} R_1 & W \\ R_3 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_3 = U \begin{bmatrix} R_2 & R_4 \\ R_3 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

где  $W \in R_2 \otimes R_4$  и  $Q_4 \in R_1 \otimes W$ . Таким образом, мы получаем для  $\mathcal{R}_3$

$$\mathcal{R}_3 = \tilde{U}_1^\dagger \tilde{U}_2^\dagger \tilde{U}_3^\dagger \cdot \text{diag}(\lambda_{\mathcal{R}_3}) \cdot U_3 U_2 U_1. \quad (1.27)$$

Аналогичным образом мы можем диагонализировать все  $\mathcal{R}$ -матрицы. И так, чтобы оценить инвариант связи (1.11), нам нужно найти собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц и коэффициенты Рака. Хотя собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц известны явно, и мы даем ответ для произвольных представлений ниже, коэффициенты Рака известны только для нескольких простых случаев. Их расчет является загадочной и сложной задачей, стоящей более 50 лет как для квантовых, так и для классических групп, полностью решенной только для случая  $U_q(sl_2)$ .

Теперь рассмотрим тензорное произведение двух представлений  $R_1$  и  $R_2$  и неприводимых представлений  $X_\alpha$ , возникающих при их разложении на неприводимые компоненты:

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\alpha} X_{\alpha}. \quad (1.28)$$

В этой сумме допускаются повторяющиеся слагаемые. Тогда согласно [273] собственные значения универсальной R-матрицы равны

$$\begin{aligned} \lambda_{X_\alpha} &= \varepsilon_{X_\alpha} q^{\varkappa(X_\alpha) - \varkappa(R_1) - \varkappa(R_2)}, & \text{if } R_1 \neq R_2 \\ \lambda_{X_\alpha} &= \varepsilon_{X_\alpha} q^{\varkappa(X_\alpha) - 4\varkappa(R_1) - |R_1|N}, & \text{if } R_1 = R_2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

где  $\varepsilon_{X_\alpha} = \pm 1$  - знак, который мы обсуждаем в подразделе 1.1.5, а  $\varkappa(X_\alpha)$  определяется следующим образом

$$\sum_{(i,j) \in \alpha} i - j. \quad (1.30)$$

Наконец, определим *нормализованные* собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы условием

$$\prod_i \tilde{\lambda}_i = 1. \quad (1.31)$$

### 1.1.4 Гипотеза о собственных значениях

В [71] была предложена гипотеза собственных значений. Он связывает квантовые коэффициенты Рака с собственными значениями  $\mathcal{R}$ -матриц. Поскольку в этом разделе мы рассматриваем только трехрядные косы, мы даем формулировку только для этого случая. В простейшем случае трехниточных узлов гипотеза о собственных значениях утверждает, что матрицы Рака полностью определяются набором нормированных собственных значений соответствующей  $\mathcal{R}$ -матрицы. Для матриц размеров до  $6 \times 6$  гипотеза дополнительно подтверждается существованием точных формул для коэффициентов Рака через нормированные собственные значения. Эта гипотеза была далее обобщена на косы из узлов с большим количеством прядей в [70]. Однако здесь нас больше интересует другое обобщение - случай ссылки.

Если рассматривать 3-рядную косу с представлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Тогда есть 3 разных диагональных  $\mathcal{R}$ -матрицы, скажем,  $\mathcal{R}_{12}$ ,  $\mathcal{R}_{23}$  и  $\mathcal{R}_{13}$ , соответствующие базам  $B_{12,3}$ ,  $B_{1,23}$  и  $B_{13,2}$ , поскольку матрицы  $\mathcal{R}_{21}$ ,  $\mathcal{R}_{32}$  и  $\mathcal{R}_{31}$  одинаковы. Тогда связная версия гипотезы о собственных значениях состоит в том, что матрица Рака определяется нормализованными наборами собственных значений всех трех  $\mathcal{R}$ -матриц. В более общем виде, который мы будем использовать ниже:

**Гипотеза:** Матрица Рака  $U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}$  однозначно выражается через 3 множества нормированных собственных значений  $\mathcal{R}_{12}$ ,  $\mathcal{R}_{23}$  и  $\mathcal{R}_{13}$ .

### 1.1.5 Знаки собственных значений

Формула (1.29) определяет собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц с точностью до знака  $\epsilon_{X_\alpha}$ . Эти знаки также существуют в классическом пределе  $q = 1$ , когда  $\mathcal{R}$ -матрица является просто оператором перестановки.  $\mathcal{R}$ -матрица - это оператор, действующий из пространства  $R_1 \otimes R_2$  в пространство  $R_2 \otimes R_1$ :

$$\mathcal{R} : R_1 \otimes R_2 \rightarrow R_2 \otimes R_1. \quad (1.32)$$

Если мы изучаем узлы, то  $R_1 = R_2 = R$  и оба пространства одинаковы. Таким образом, знаки собственных значений зависят от того, являются ли векторы старшего веса представлений *симметричными* или *антисимметричными* при перестановке двух представлений  $R_1$  и  $R_2$ . Говорят, что эти два типа представлений  $X_\alpha$  принадлежат либо симметричным, либо антисимметричным квадратам представления  $R$ .

Однако для зацеплений, когда  $R_1 \neq R_2$ , пространства, между которыми действует  $\mathcal{R}$  - матрица, различны. Поскольку векторы старшего веса фактически определены с точностью до знака, это означает, что можно независимо изменять знаки векторов в обоих пространствах. Это приводит к тому, что знаки собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц, которые используются для зацеплений, не определены. Однако, поскольку коэффициенты Рака связывают одни и те же векторы старшего веса, то знаки собственных значений матрицы  $\mathcal{R}$  должны согласовываться со знаками коэффициентов Рака.

В данном случае нас интересуют только симметричные представления. Для узловых  $\mathcal{R}$  - матриц это приводит к довольно простому правилу выбора знаков - если собственные значения упорядочиваются по убыванию по степеням  $q$ , то знаки собственных значений чередуются, т. е. знак собственного значения с наибольшей степенью - плюс, следующий - минус и т. д.

Приведем пример - возьмем представление  $R = [2]$ . Тогда есть три собственных значения, а именно  $\epsilon_{[4]}q^4$ ,  $\epsilon_{[3,1]}q^0$  и  $\epsilon_{[2,2]}q^{-2}$ . Тогда знаки:  $\epsilon_{[4]} = +1$ ,  $\epsilon_{[3,1]} = -1$  и  $\epsilon_{[2,2]} = +1$ . Оказывается, то же самое верно и для линковых  $\mathcal{R}$  - матриц симметричного представления, если нужно, чтобы знаки согласовывались с известными матрицами  $U_q(sl_2)$  Рака в формуле (1.48). Этот выбор знаков мы будем использовать в дальнейшем.

## 1.2 Трехнитевая коса, раскрашенная симметрическими представлениями

В этом разделе мы рассматриваем трехрядные косы, раскрашенные произвольными симметричными представлениями, т.е. в терминах диаграмм Юнга  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$ ,  $R_3 = [r_3]$ , и находим собственные значения всех  $\mathcal{R}$  - матрицы, возникающие при этом. Затем с помощью гипотезы о собственных

значениях мы находим все матрицы Рака, которые нам нужны для вычисления матрицы  $\mathcal{R}_2$  по формуле (1.23).

### 1.2.1 Ограничения на представления

Рассмотрим тензорное произведение трех симметричных представлений  $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$  с диаграммами Юнга  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$ ,  $R_3 = [r_3]$  и разложим его на неприводимые представления:

$$R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 = \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_{\mu} \otimes Q_{\mu}, \quad (1.33)$$

где  $\mu \vdash (r_1 + r_2 + r_3)$ . Так как все представления  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  симметричные, то  $\mu$  имеет не более трех компонент:  $\mu = [l, m, n]$ .

Тензорное произведение двух симметричных представлений дает

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= \bigoplus_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}^{1,2} \otimes X_{\alpha}, \\ R_2 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\beta} \mathcal{M}_{\beta}^{2,3} \otimes Y_{\beta}, \\ R_1 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\gamma} \mathcal{M}_{\gamma}^{1,3} \otimes Z_{\gamma}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где  $\dim \mathcal{M}_{\alpha}^{1,2} \leq 1$ ,  $\dim \mathcal{M}_{\beta}^{2,3} \leq 1$  and  $\dim \mathcal{M}_{\gamma}^{1,3} \leq 1$ , and  $\alpha \vdash (r_1 + r_2)$ ,  $\beta \vdash (r_2 + r_3)$ ,  $\gamma \vdash (r_1 + r_3)$ .

Пусть  $Q_{\mu} \in X_{\alpha} \otimes R_3$ , тогда сразу можно записать набор ограничений на представления:

$$\begin{aligned} \alpha &= [r_1 + r_2 - i, i] & \mu &= [l, m, n], \\ i &= 0, \dots, \min(r_1, r_2), & l + m + n &= r_1 + r_2 + r_3, \\ l - (r_1 + r_2 - i) &\leq r_3, & l &\geq r_1 + r_2 - i, \\ m - i &\leq r_3, & m &\geq i, \\ r_1 + r_2 - i &\geq m, & i &\geq n, \\ n &\leq \min(r_1, r_2, r_3), & l &\geq \max(r_1, r_2, r_3) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Это означает, что для любого представления  $Q_\mu$  с  $\mu = [l, m, n]$  представлениями  $X_\alpha$  и аналогично  $Y_\beta$  и  $Z_\gamma$ , дающие представление  $Q_\mu$ , нумеруются

$$\begin{aligned}\alpha &= [r_1 + r_2 - i_{12}, i_{12}], & i_{12} &= j_{12,3}, \dots, J_{12,3}, \\ \beta &= [r_2 + r_3 - i_{23}, i_{23}], & i_{23} &= j_{23,1}, \dots, J_{23,1}, \\ \gamma &= [r_1 + r_3 - i_{13}, i_{13}], & i_{13} &= j_{13,2}, \dots, J_{13,2}, \\ j_{ij,k} &= \max(r_i + r_j - l, m - r_k, n), \\ J_{ij,k} &= \min(r_i + r_j + r_k - l, r_i + r_j - m, m, r_i, r_j).\end{aligned}\tag{1.36}$$

Дополнительно

$$\begin{aligned}(r_i + r_j - l) - (m - r_k) &= r_i + r_j + r_k - l - m = n \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (r_i + r_j - l) &\geq (m - r_k), \\ (r_i + r_j + r_k - l) - (m) &= n \geq 0 \Rightarrow (r_i + r_j + r_k - l) \geq m.\end{aligned}$$

Следовательно

$$j_{ij,k} = \max(r_i + r_j - l, n), \quad J_{ij,k} = \min(r_i + r_j - m, m, r_i, r_j).\tag{1.37}$$

Если  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ , тогда формула из [71] дает:

$$\alpha = [2r - i, i], \quad \max(2r - l, n) \leq i \leq \min(2r - m, m).\tag{1.38}$$

Таким образом, из (1.36) следует, что неприводимые представления  $X_{ik}$ , возникающие при разложении  $X_i \otimes X_k$ , пронумерованных последовательными диаграммами Юнга с 2 строками, лексикографически упорядоченными из  $[r_i + r_k - j_{ik}]$  к  $[r_i + r_k - j_{ik}]$ .

### 1.2.2 Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц

Теперь, когда мы знаем набор представлений  $X$ , необходимых для получения представления  $\mu$ , мы можем изучить соответствующие собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц. Собственные значения матрицы  $\mathcal{R}$  задаются формулой (1.29):

$$\begin{aligned}\lambda_{X_\alpha} &= \varepsilon_{X_\alpha} q^{\varkappa(X_\alpha) - \varkappa(R_1) - \varkappa(R_2)} \\ \varkappa_{X_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j (\alpha_j + 1 - 2j),\end{aligned}\tag{1.39}$$

где  $X_\alpha$  из (1.34), и  $j$  перечисляет строки в диаграмме Юнга  $\alpha = \{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_l > 0\}$ .

В случае симметричных представлений  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$  и  $R_3 = [r_3]$ ,  $\alpha$  представляет собой диаграмму с 2 строками, как обсуждалось в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} \alpha &= [r_1 + r_2 - i, i], \\ i &= \max(r_1 + r_2 - l, n), \dots, \min(r_1 + r_2 - m, m, r_1, r_2). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Соответствующее собственное значение

$$\lambda_{X_\alpha} = \varepsilon_{X_\alpha} q^{r_1 r_2 + i^2 - i(r_1 + r_2 + 1)} = (-1)^i q^{r_1 r_2 + i^2 - i(r_1 + r_2 + 1)}. \quad (1.41)$$

В разложении (1.33) рассмотрим такие  $\mu = [l, m, n]$ , что  $n > 0$ . Сдвинем все строки диаграммы Юнга на  $(-1)$ :

$$\begin{aligned} Q_{\mu'} &\in R'_1 \otimes R'_2 \otimes R'_3, \\ \mu' &= [l - 1, m - 1, n - 1], \quad R'_1 = [r_1 - 1], \quad R'_2 = [r_2 - 1], \quad R'_3 = [r_3 - 1]. \end{aligned}$$

Для разложения тензорного произведения первого и второго представлений имеем

$$\begin{aligned} \alpha' &= [r_1 + r_2 - i' - 2, i'], \\ i' &= \max(r_1 + r_2 - l - 1, n - 1), \dots, \min(r_1 + r_2 - m - 1, m - 1, r_1 - 1, r_2 - 1) \\ &\quad \updownarrow \quad i' = i - 1 \\ \alpha' &= [r_1 + r_2 - i - 1, i - 1], \\ i &= \max(r_1 + r_2 - l, n), \dots, \min(r_1 + r_2 - m, m, r_1, r_2), \end{aligned} \quad (1.42)$$

с соответствующим собственным значением

$$\lambda_{X_{\alpha'}} = -(-1)^i q^{r_1 r_2 + i^2 - i(r_1 + r_2 + 1) + 1}. \quad (1.43)$$

Таким образом, если мы сдвинем все строки диаграмм Юнга на  $(-1)$ , все соответствующие собственные значения будут сдвинуты на  $q$ . Таким образом, нормализованные собственные значения остаются неизменными.

Если гипотеза о собственных значениях из подраздела (1.1.4) верна, то

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [l, m, n] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_1 - 1] & [r_2 - 1] \\ [r_3 - 1] & [l - 1, m - 1, n - 1] \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Если повторить эти шаги  $n$  раз, то

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [l, m, n] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_1 - n] & [r_2 - n] \\ [r_3 - n] & [l - n, m - n] \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Поскольку последняя матрица зависит от диаграмм Юнга только с 1 и 2 строками, то ее можно полностью описать в терминах  $U_q(sl_2)$ :

$$U \begin{bmatrix} [r_1 - n] & [r_2 - n] \\ [r_3 - n] & [l - n, m - n] \end{bmatrix} = U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} (r_1 - n)/2 & (r_2 - n)/2 \\ (r_3 - n)/2 & (l - m)/2 \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

где последняя матрица - это просто матрица Рака алгебры  $U_q(sl_2)$ , которую мы обсудим в следующем разделе. Таким образом, получаем, что

$$\boxed{U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [l, m, n] \end{bmatrix} = U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} (r_1 - n)/2 & (r_2 - n)/2 \\ (r_3 - n)/2 & (l - m)/2 \end{bmatrix}} \quad (1.47)$$

### 1.3 6j-символы $U_q(sl_2)$

Для квантовой группы  $U_q(sl_2)$  коэффициенты Рака известны. Они были вычислены Кирилловым и Решетихиным в [145].

$$U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \left| \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right. \\ s_3 & s_4 & \end{bmatrix} = \sqrt{[2i+1][2j+1]} (-1)^{\sum_{m=1}^4 s_m} \theta(s_1, s_2, i) \\ \times \theta(s_3, s_4, i) \theta(s_4, s_1, j) \theta(s_2, s_3, j) \sum_{k \geq 0} (-1)^k [k+1]! \quad (1.48)$$

$$\left( [k - s_1 - s_2 - i]! [k - s_3 - s_4 - i]! [k - s_1 - s_4 - j]! [k - s_2 - s_3 - j]! \right. \\ \left. [s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - k]! [s_1 + s_3 + i + j - k]! [s_2 + s_4 + i + j - k]! \right)^{-1},$$

где мы используем стандартные обозначения квантовых чисел  $[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$  и

$$\theta(a, b, c) = \sqrt{\frac{[a - b + c]! [b - a + c]! [a + b - c]!}{[a + b + c + 1]!}}.$$

Обратим внимание, что в этой формуле (1.48) переменные  $s_1, \dots, s_4$  являются положительными полуцелыми числами, а  $i, j$  - положительными целыми числами, поскольку они являются матричными индексами.

## 1.4 Цветные многочлены ХОМФЛИ для трехнитевых зацеплений

Группа кос  $B_3$  из трех нитей порождается двумя элементами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Следовательно, чтобы вычислить многочлен ХОМФЛИ для любого трехнитевого зацепления, согласно (1.11), нам нужно вычислить  $\mathcal{R}_1 = \pi(\sigma_1)$  и  $\mathcal{R}_2 = \pi(\sigma_2)$ .

Поскольку мы рассматриваем только случай симметричных представлений, т.е. когда  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$  и  $R_3 = [r_3]$ , матрица  $\mathcal{R}_1$  известна по формуле (1.41). Матрица  $\mathcal{R}_2$  получается заменой формул (1.48) и (1.47) в (1.23). Таким образом, мы можем вычислить  $\pi(\beta_{\mathcal{L}}) \forall \beta_{\mathcal{L}} \in B_3$ , окрашенное произвольными симметричными представлениями.

Трехнитевые зацепления включают однокомпонентные, двухкомпонентные и трехкомпонентные зацепления. Очевидно, 1-компонентные зацепления - это все 3-ниточные узлы, 2-х компонентные зацепления содержат 1 компоненту, являющуюся узлом и 1 компоненту, являющуюся произвольным двухнитевым узлом (все они являются торическими), 3-компонентные зацепления содержат 3 узла в качестве своих компонентов.

### 1.4.1 Зацепление $L_{7a_3}$

Продемонстрируем на практике, как работает наша конструкция. Для этой цели мы рассматриваем зацепление  $L_{7a_3}$  в таблице зацеплений Thistlethwaite [28], которое является простейшим <sup>2</sup> 3-х нитевым зацеплением с, по крайней мере, одной нетривиальной компонентой (трилистник).

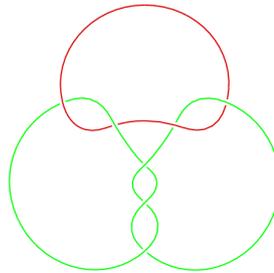
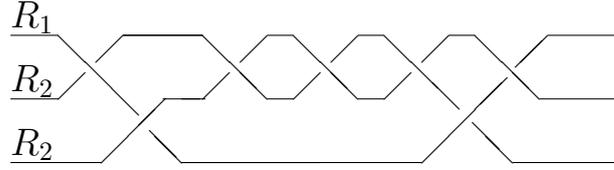


Рисунок 1.1 — Рисунок зацепления  $L_{7a_3}$ , взятое с сайта Knotilus [28]

<sup>2</sup>имеет минимальное количество пересечений

Оно имеет следующее 3-нитевое представление



Существуют две диагональные  $\mathcal{R}$  - матрицы:  $\mathcal{R}_{12}$ , обозначающие пересечения представлений  $R_1$  и  $R_2$  и  $\mathcal{R}_{22}$ , обозначает пересечения представлений  $R_2$  и  $R_2$ . Две матрицы Рака

$$U_{221} := U \begin{bmatrix} R_2 & R_2 \\ R_1 & Q \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad U_{212} := U \begin{bmatrix} R_2 & R_1 \\ R_2 & Q \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

соответствуют соответственно размещениям представлений  $R_2 R_2 R_1$  и  $R_2 R_1 R_2$ . Тогда ответ для полинома ХОМФЛИ (1.11) дается следующим образом:

$$H_{R_1 R_2}^{L7a3} = \sum_{Q \in R_1 \otimes R_2 \otimes R_2} \text{tr} \left( \mathcal{R}_{12} U_{212}^\dagger \mathcal{R}_{12}^{-1} U_{221} \mathcal{R}_{22}^3 U_{221}^\dagger \mathcal{R}_{12}^{-1} U_{212} \mathcal{R}_{12} \right) \cdot s_Q^*(A, q), \quad (1.50)$$

Пусть  $R_1 = [r]$  и  $R_2 = [s]$ , тогда мы можем использовать результаты разделов 3 и 4. Мы выполнили вычисления для многих конкретных значений  $R_1$  и  $R_2$  и нашли замкнутую формулу для (1.50), которые аналитически описывают зависимость от  $r$  и  $s$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \{x\} &:= x - \frac{1}{x} \\ D_k &:= \frac{\{Aq^k\}}{\{q\}} \\ [n]_q! &:= [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, \end{aligned} \quad (1.51)$$

мы получаем следующее

$$\begin{aligned} \frac{H_{r,s}^{L7a3}}{s_{[r]}^* \cdot s_{[s]}^*} &= T_s(q, A) + \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \left( \frac{[r]![s]!}{[r-k]![s-k]!} \frac{\{q\}^{3k}}{A^{3s}} D_{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\prod_{n=1}^k D_{r+n-1} \prod_{m=0}^{s-k-1} D_{2k+m}}{\prod_{i=0}^{s-k} D_{k+i-1}} \cdot G_{k,s}(q, A) \right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

где второй индекс инварианта ХОМФЛИ относится к компоненту трилистника данного зацепления,  $T_s(q, A)$  - (приведенный) многочлен ХОМФЛИ для трилистника в топологическом оснащении, окрашенном в  $[s]$ , и  $G_{k,s}(q, A)$  - многочлены с коэффициентами, которые можно считать из  $G_{1,s}(q, A)$ ,

$$\begin{aligned} G_{1,s}(q, A) &= \sum_{i=1}^s Q_{i,s}(q, A), \\ Q_{i,s}(q, A) &= \frac{[2(i+1)]}{[i+1]} \frac{[s-1]!}{[i-1]![s-i]!} \frac{\{q\}^{i-1}}{A^i q^{2s^2-i^2/2-5i/2+1}} \prod_{j=2}^i D_{s+j-1} \end{aligned} \quad (1.53)$$

следующим образом:

$$G_{k,s}(q,A) = \sum_{i=1}^{s-k+1} \left( \prod_{n=1}^{k-1} \frac{[s-i-n+1]}{[s-n]} \right) q^{(1-k)(k+2i-2)/2} [G_{1,s}(q,A)]_{1-2i}^A A^{s-k+2-2i} \quad (1.54)$$

где  $[G]_p^A$  обозначает коэффициент при  $p$ -й степени полинома (Лорана)  $G$  по  $A$ . Аналогично, формула для  $G_{k,r_2}(q,A)$  может быть записана в виде двойной суммы:

$$G_{k,r_2}(q,A) = \sum_{i=1}^{r_2} P_{i,k,r_2}(q,A) \quad \text{где} \quad (1.55)$$

$$P_{i,k,r_2}(q,A) = \frac{q^{i(i+5)/2}}{q^{2r_2 + \frac{k(k-1)}{2} + 1} A^{2i+k-r_2-2}} \frac{[2i+2]}{[i+1]} \frac{[r_2-1]!}{[r_2-i]![i-1]!} \prod_{p=r_2+k}^{r_2+i-1} \tilde{D}_p$$

$$\times \sum_{n=1}^{\min(i,k)} \prod_{m=r_2+n}^{r_2+\min(i,k)-1} \tilde{D}_m \prod_{j=1}^{n-1} \frac{[i-j][k-j]}{[j][r_2-j]} \frac{1}{q^{j+k+i-2}}.$$

Здесь  $\tilde{D}_m = A\{q\}D_m = A^2q^m - q^{-m}$ . Помним, что  $[0]! = 1$  члены внутри  $\prod_{j=a}^b$  при  $b < a$  равны 1.

Полученную формулу (1.52) мы проверили на большом кластере значений  $r_1$  и  $r_2$ . А именно, мы посчитали формулу (1.50) для  $r_1 \leq 10$  и  $r_2 \leq 10$  и проверили, что ответы совпадают с формулой (1.52) для этих конкретных значений  $r_1$  и  $r_2$ .

Другой способ вычисления полинома ХОМФЛИ для этого зацепления описан в [197], где вычисление выполняется для  $L7a3$  для  $[r_1] = [1]$  и  $[r_2] = [k]$ . Мы можем проверить, что наша предполагаемая форма (1.52) согласуется с результатами в [197], когда  $[r_1] = [1]$  и  $[r_2] = [k]$ . Однако текущий подход совершенно другой и использует свойства матриц Рака, в отличие от техники разложения по тенграм, используемой в [197]. Также наш нынешний подход намного более систематичен.

Точно так же можно вычислить цветные многочлены ХОМФЛИ любых 3-нитевых зацеплений. Вот список всех трехнитевых (но не двухнитевых) зацеплений с количеством минимальных пересечений не более 7 по классификации Thistlethwaite, с указанием количества компонентов в скобках:  $L5a1(2)$ ,  $L6a4(3)$ ,  $L6n1(3)$ ,  $L7a1(2)$ ,  $L7a3(2)$ ,  $L7a6(2)$ ,  $L7n1(2)$ ,  $L7n2(2)$ . Соответствующее им представление кос можно найти в [28]. Написание выражения в

замкнутой форме (1.52) для этих двухкомпонентных зацеплений в принципе может быть получено, глядя на инварианты разноцветных зацеплений для некоторых значений  $[r_1]$  и  $[r_2]$ .

## 1.5 Симметрия тяни-крюк

Теперь обсудим новую симметрию раскрашенного полинома ХОМФЛИ. Она связывает пары полиномов, раскрашенных разными представлениями при определенных значениях  $N$ , и обобщает ранее известную симметрию «тяги-крюк» раскрашенного многочлена Александра [205]. Эта симметрия возникает из супералгебр. Основное внимание сосредоточено на ограничениях, которые такое свойство накладывает на общую теоретико-групповую структуру, а именно на весовую систему  $\mathfrak{sl}(N)$ , возникающую в пертурбативном разложении инварианта узла. Также обсуждается тесная связь новой симметрии с гипотезой о собственных значениях.

Как уже упоминалось во введении, полином ХОМФЛИ – это вакуумное ожидание петли Вильсона:

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \langle W(\mathcal{K}) \rangle \quad (1.56)$$

Это функция двух переменных, которые выражаются через параметры теории Черна-Саймонса:

$$q = e^{\hbar}, \quad a = e^{N\hbar}, \quad \hbar = \frac{2\pi i k}{k + N} \quad (1.57)$$

Параметр  $\hbar$  играет роль параметра разложения петли в интеграле по путям.

Это значение петли Вильсона в действительности не является полиномом, но оно содержит простой рациональный фактор, который является значением петли Вильсона тривиального узла. Следовательно, чтобы получить полиномы Лорана, необходимо нормировать инвариант ХОМФЛИ на его значение на тривиальном узле:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \frac{H_R^{\mathcal{K}}(q, a)}{H_R^{\circ}(q, a)}. \quad (1.58)$$

Полиномы зависят от узла и представления. Этот раздел сосредоточена на зависимости полинома ХОМФЛИ от представления.

Представление  $R$  дается соответствующей диаграммой Юнга:

$$R = [R_1, R_2, \dots, R_n] \quad (1.59)$$

Обратите внимание, что выбор любого  $N$  ограничивает набор *физических* диаграмм Юнга. Под физическими мы подразумеваем те, для которых можно определить цветные петли Вильсона. В них должно быть  $n \leq N$ , т.е. не более  $N$  строк, чтобы указать представление  $SU(N)$ . Однако нормированный многочлен ХОМФЛИ имеет конечный предел для больших диаграмм с  $n > N$ . Поэтому мы будем рассматривать произвольные диаграммы Юнга для всех  $N$ .

Известно несколько интересных свойств раскрашенного многочлена ХОМФЛИ. Перечислим некоторые из них:

- Дуальность ранг-уровень теории Черна-Саймонса [101; 222; 223], также называемая зеркальной симметрией, обеспечивает следующее соотношение [176]:

$$\mathcal{H}_R^K(q, a) = \mathcal{H}_{R^T}^K(q^{-1}, a) \quad (1.60)$$

где  $R^T$  – представление, полученное транспонированием диаграммы Юнга:

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = R^T. \quad (1.61)$$

- Можно взять определенные пределы в переменных  $q$  и  $a$ . Планарный предел 'т Хофта означает предел:

$$\hbar \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad N\hbar - \text{fixed} \quad (1.62)$$

что соответствует подстановке  $q = 1$ . Возникающие так называемые специальные многочлены обладают замечательным свойством [116; 200; 302; 328]:

$$\begin{aligned} \sigma_R^K(a) &= \mathcal{H}_R^K(q = 1, a) \\ \sigma_R^K(a) &= \left( \sigma_{[1]}^K(a) \right)^{|R|} \end{aligned} \quad (1.63)$$

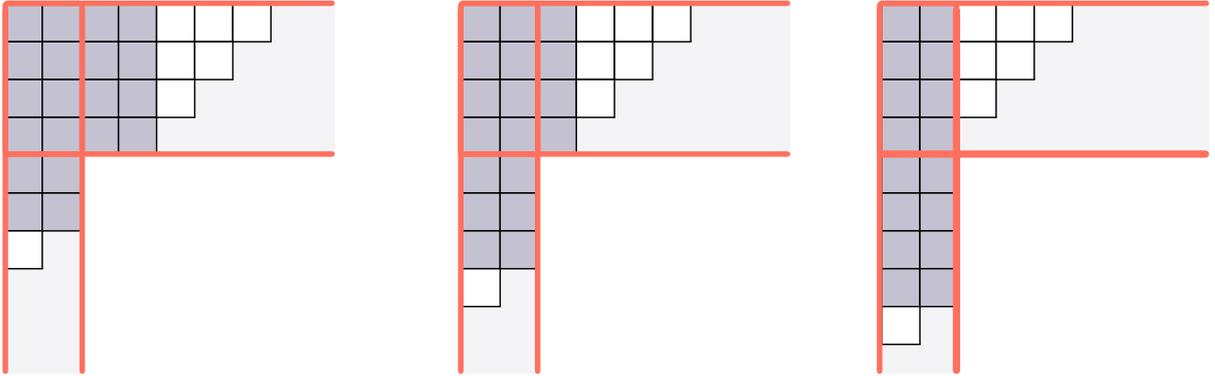
- Двойственный предел  $a = 1$  или  $N = 0$ , задающий цветной многочлен Александра, демонстрирует аналогичное свойство [116; 192; 328]:

$$\mathcal{A}_R(q) = \mathcal{A}_{[1]}(q^{|R|}), \text{ когда } R = [r, 1^L] \quad (1.64)$$

Мы хотим выдвинуть следующую симметрию нормированного цветного полинома ХОМФЛИ:

$$\mathcal{H}_R(q, A = q^N) = \mathcal{H}_{\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)}(q, A = q^N) \quad (1.65)$$

где  $\mathbf{T}_\varepsilon^N$  – преобразование диаграмм Юнга. Приведем пример:



Пример применения симметрии для  $N = 2$ . Преобразование применяется к **серой** части диаграммы, которая сдвигается внутри **толстого крюка**  $(4|2)$ .

Более конкретные примеры см. в (1.74)–(1.77).

Симметрия работает следующим образом:

- Сначала определяется **толстый крюк**  $(N + M|M)$ , т.е. диаграмма со столбцами высотой  $N + M$  идущими вправо до бесконечности и строками длиной  $M$  вниз до бесконечности, так что  $R$  полностью помещается в толстый крюк, как показано на рисунок выше. Для данного  $N$  такой выбор уникален.
- Затем определяется поддиаграмма, которая занимает толстый крюк *без зазоров*. Эта поддиаграмма имеет столбцы высотой  $N + M$  в правой части толстого крюка и строки длиной  $M$  в нижней части толстого крюка. Эти элементы окрашены в **серый** цвет на картинке выше.
- Легко видеть, что для данной диаграммы и данного  $N$  выбор  $M$  единственен, отсюда и отсутствие  $M$  в обозначении  $\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)$ .
- Преобразование сводится к перетягиванию диаграммы внутри **толстого крюка**. Полином ХОМФЛИ инвариантен относительно таких преобразований.
- Название происходит от аналогии с игрой «перетягивание каната».

Стоит отметить, что преобразование изменяет общее количество элементов в диаграмме, например:

$$|\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)| = |R| + \varepsilon N \quad (1.66)$$

где  $|R|$  – количество элементов в диаграмме. Для количественного описания симметрии воспользуемся аналогом обозначений Фробениуса для диаграмм Юнга:

- Параметризуем первые  $N$  строк их длиной  $R_i$  для  $1 \leq i \leq N$ .
- Остальная часть диаграммы параметризуется смещенными переменными Фробениуса:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= R_i - (i - N) + 1 & i > N \\ \beta_i &= R'_{i-N} - i + 1 \end{aligned} \quad (1.67)$$

В результате мы описываем диаграммы Юнга со следующими данными

$$[R_1, \dots, R_N](\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+k} \mid \beta_{N+1}, \dots, \beta_{N+k}). \quad (1.68)$$

Тогда  $\mathbf{T}_\varepsilon^N$  – это следующее преобразование:

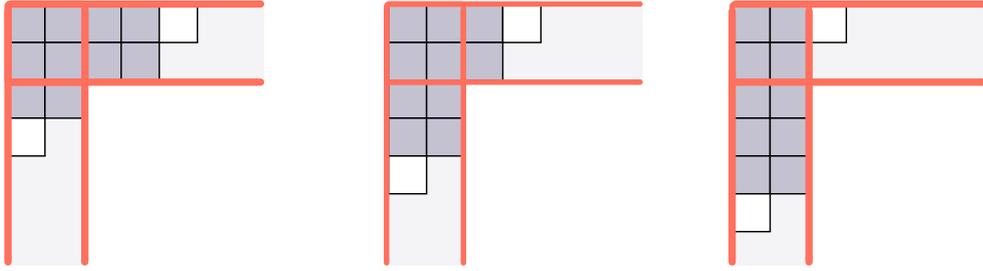
$$\begin{aligned} R_i &\longrightarrow R_i - \varepsilon \\ \alpha_i &\longrightarrow \alpha_i - \varepsilon \\ \beta_i &\longrightarrow \beta_i + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.69)$$

где  $\varepsilon$  – такое целое число, что результатом по-прежнему является диаграмма Юнга. В терминах смещенных переменных Фробениуса (1.67), (1.68) диаграммы в примере на рисунке выше параметризованы следующим образом:

$$R = [7, 6](5, 3 \mid 4, 2) \quad \mathbf{T}_{-1}^2(R) = [6, 5](4, 2 \mid 5, 3) \quad \mathbf{T}_{-2}^2(R) = [5, 4](3, 1 \mid 6, 4)$$

Легко убедиться, что для данной диаграммы  $R$  и фиксированного  $N$  существует только одно семейство связанных диаграмм, параметризуемых значением  $\varepsilon$ . В частности, для  $N = 0$  он сводится к симметрии «тяни-крюк» многочлена Александра [205]:

$$\mathcal{A}_R^\mathcal{K}(q) = \mathcal{A}_{\mathbf{T}_\varepsilon(R)}^\mathcal{K}(q) \quad (1.70)$$



Пример применения симметрии «тяги-крюк» при  $N = 0$ . Крюк теперь имеет форму  $(2|2)$ , и симметрию можно представить как «перетягивание» диаграмм через угол внутри толстого крюка. Диаграммы теперь параметризованы обычными переменными Фробениуса:

$$R = (5, 3 | 4, 2) \quad \mathbf{T}_{-1}(R) = (4, 2 | 5, 3) \quad \mathbf{T}_{-2}(R) = (3, 1 | 6, 4)$$

Стоит отметить, что в симметрии «тяги-крюк» для полинома Александера выполнен «закон сохранения элементов», т.е. она связывает диаграммы с равными  $|R|$ .

Мы хотели бы привести различные обоснования для нашего утверждения и способы думать об этом свойстве. Таких обоснований как минимум два:

- Это свойство узловых многочленов **супергрупповой теории Черна-Саймонса**
- Это конкретное **воплощение гипотезы о собственных значениях**

Для нас важны следствия такой симметрии для теоретико-групповых данных инварианта ХОМФЛИ.

## 1.6 Супергрупповые инварианты узлов

Инварианты узлов, возникающие из супергрупп, изучены достаточно широко. Как обычно, к ним можно подойти двумя способами: изучить супергрупповую теорию Черна-Саймонса [184; 185] или квантовые инварианты, возникающие в  $U_q(\mathfrak{sl}(N|M))$  [262; 316].

Супергрупповая теория Черна-Саймонса подробно описана в

[184; 185]. Основная идея состоит в том, что  $SU(N)$  теория Черна-Саймонса может быть (как всегда, со множеством тонкостей) обобщена на  $SU(M+N|M)$  теорию Черна-Саймонса. Как обсуждалось в [184], определение чистой супергрупповой теории Черна-Саймонса сопряжено с трудностями, что не мешает нам выдвинуть нашу гипотезу.

Как и в обычном случае Черна-Саймонса, интересными наблюдаемыми являются петли Вильсона:

$$\mathcal{W}_R(K) = \text{Str}_R P \exp \left( \oint_K \mathcal{A} \right) \quad (1.71)$$

Отложив в сторону все технические детали, нас интересуют два основных свойства этих инвариантов узлов:

1. Петля Вильсона, окрашенная представлением  $R$  супергруппы  $SU(N|M)$ .
2. Инвариант узла для  $SU(N|M)$  равен (возможно, с точностью до множителей) таковому в теории Черна-Саймонса с группой  $SU(|N-M|)$ . В частности, это позволяет описать случай  $N-M=0$ , соответствующий полиномам Александера.

Первое утверждение – это лишь часть определения. Второе может быть мотивировано несколькими способами, которые описаны в [184]. Резюмируя, можно сказать, что на языке чистого Черна-Саймонса всё сводится к утверждению, что математическое ожидание петли Вильсона нечувствительно к факторам  $U(1|1)$ .

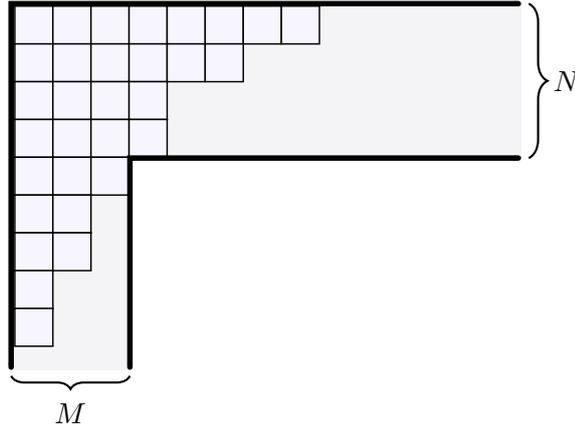
То же верно и с точки зрения квантовой супергруппы. Действительно, в [262] было доказано, что полиномы узлов  $U_q(\mathfrak{sl}(N|M))$  равны полиномам узлов  $U_q(\mathfrak{sl}(N-M))$ .

Напомним основы теории представлений для  $\mathfrak{sl}(N|M)$  [31; 32]. Представления супералгебры  $\mathfrak{sl}(N|M)$  нумеруются разбиениями вида:

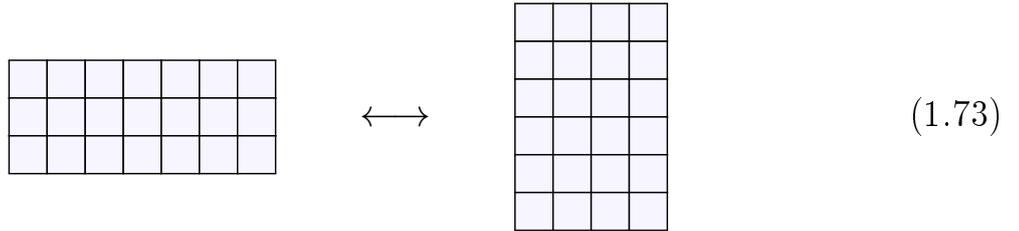
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_N \geq \lambda_{N+1} \geq \dots \quad (1.72)$$

где  $\lambda_{i>N} \leq M$ . Разбиения соответствуют представлению старшего веса, как и для обычной  $\mathfrak{sl}(N)$ . Однако в случае супералгебры отсутствует ограничение на число компонент. Соответствующая диаграмма Юнга должна уместиться в

толстый крюк  $(N|M)$ , изображённый ниже.



Это установленный факт, что для супералгебр диаграммы Юнга не описывают представление однозначно. В частности, в  $\mathfrak{sl}(N|M)$  диаграмма с  $M + \varepsilon$  столбцами из  $N$  строк эквивалентна диаграмме с  $M$  столбцами из  $N + \varepsilon$  строк [29].



Описанные свойства супергрупповых инвариантов узлов приводят нас к нашей гипотезе. Основной довод начинается с рассмотрения нормированных цветных полиномов ХОМФЛИ для  $a = q^N$ , определенных как петли Вильсона в представлении  $\mathfrak{sl}(N)$ , заданном диаграммой  $R$ . Нормированные полиномы ХОМФЛИ для  $R$  с  $l(R) > N$  как инварианты  $\mathfrak{sl}(N)$  лежат в *нефизической области*. То есть формально таких представлений не существует. Однако эти инварианты по-прежнему имеют смысл и являются конечными многочленами из-за нормировочного коэффициента в определении (1.58). Их можно вычислить в этой области, используя, например, метод  $\mathcal{R}$ -матрицы, см. раздел 1.7.

С другой стороны, можно представить себе петлю Вильсона в  $a = q^N$ , раскрашенную той же диаграммой  $R$ , но в супергрупповой теории Черна-Саймонса. Тогда  $R$  рассматривается как представление  $\mathfrak{sl}(N + M|M)$  для некоторого  $M$ . Симметрия (1.65) многочлена тогда является следствием соответствующей эквивалентности представлений (1.73). Обратите внимание, что для фиксированного представления  $R$  мы получаем множество тождеств, подходящим образом выбирая  $M$  и  $N$ . Конечно, мы должны признать, что эти аргументы

представляют собой расплывчатое употребление нескольких строгих утверждений, которое, однако, приводит к экспериментально подтверждённому равенству. Строгие утверждения будут предоставлены в других работах.

Важно подчеркнуть, что даже несмотря на то, что симметрия связывает многочлены ХОМФЛИ в нефизической области, она позволяет выдвинуть гипотетические суждения о **общей теоретико-групповой структуре инварианта**. Поэтому мы хотели бы сосредоточиться на следствиях этого утверждения.

**Примеры.** Сначала приведем примеры. Начнем с  $N > 0$ . Эти несколько примеров мы проверили для различных узлов, среди них: торические –  $[2,3]$   $[3,4]$ , не торические –  $4_1$ ,  $6_3$ . Для некоторых классов узлов, таких как торические и 3-нитевые, многочлены ХОМФЛИ в определенных классах представлений могут быть вычислены, и тождества могут быть проверены экспериментально.

– Самый простой нетривиальный пример –  $R = [1,1,1]$ . Мы можем взять только  $N = 1, M = 1, \varepsilon = 1$ , что означает, что мы рассматриваем представления  $\mathfrak{sl}(2|1)$ . Имеем следующее равенство:

$$\mathcal{H}_{[1,1,1]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) = \mathcal{H}_{[2,2]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.74)$$

В частности, нормированный полином ХОМФЛИ для трилистника в этом случае:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{[1,1,1]}^{T(2,3)}(q, a) = & -\frac{q^{18}}{a^{12}} + \frac{q^{20}}{a^{10}} + \frac{q^{18}}{a^{10}} + \frac{q^{16}}{a^{10}} + \frac{q^{12}}{a^{10}} + \frac{q^{10}}{a^{10}} \\ & + \frac{q^8}{a^{10}} - \frac{q^{20}}{a^8} - \frac{q^{18}}{a^8} - \frac{q^{16}}{a^8} - \frac{q^{14}}{a^8} - \frac{2q^{12}}{a^8} - \frac{2q^{10}}{a^8} \\ & - \frac{q^8}{a^8} - \frac{q^4}{a^8} - \frac{q^2}{a^8} - \frac{1}{a^8} + \frac{q^{18}}{a^6} + \frac{q^{14}}{a^6} \\ & + \frac{q^{10}}{a^6} + \frac{q^6}{a^6} + \frac{q^4}{a^6} + \frac{q^2}{a^6} + \frac{1}{a^6 q^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{[2,2]}^{T(2,3)}(q, a) &= \frac{1}{a^{16}} - \frac{q^6}{a^{14}} - \frac{1}{a^{14}q^6} - \frac{2q^4}{a^{14}} - \frac{2}{a^{14}q^4} - \frac{q^2}{a^{14}} - \frac{1}{a^{14}q^2} + \frac{2q^{10}}{a^{12}} \\
&+ \frac{2}{a^{12}q^{10}} + \frac{2q^8}{a^{12}} + \frac{2}{a^{12}q^8} + \frac{2q^6}{a^{12}} + \\
&+ \frac{2}{a^{12}q^6} + \frac{q^4}{a^{12}} + \frac{1}{a^{12}q^4} + \frac{3q^2}{a^{12}} + \frac{3}{a^{12}q^2} + \frac{4}{a^{12}} - \frac{q^{14}}{a^{10}} \\
&- \frac{1}{a^{10}q^{14}} - \frac{2q^{12}}{a^{10}} - \frac{2}{a^{10}q^{12}} - \frac{q^{10}}{a^{10}} - \\
&- \frac{1}{a^{10}q^{10}} - \frac{q^8}{a^{10}} - \frac{1}{a^{10}q^8} - \frac{3q^6}{a^{10}} - \frac{3}{a^{10}q^6} \\
&- \frac{4q^4}{a^{10}} - \frac{4}{a^{10}q^4} - \frac{3q^2}{a^{10}} - \frac{3}{a^{10}q^2} - \frac{2}{a^{10}} + \frac{q^{16}}{a^8} + \\
&+ \frac{1}{a^8q^{16}} + \frac{q^{10}}{a^8} + \frac{1}{a^8q^{10}} + \frac{2q^8}{a^8} + \frac{2}{a^8q^8} + \frac{q^6}{a^8} \\
&+ \frac{1}{a^8q^6} + \frac{q^4}{a^8} + \frac{1}{a^8q^4} + \frac{q^2}{a^8} + \frac{1}{a^8q^2} + \frac{2}{a^8}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{[2,2]}^{T(2,3)}(q, q) = \mathcal{H}_{[1,1,1]}^{T(2,3)}(q, q) = \frac{1}{q^{12}} + q^8 - \frac{1}{q^8} - \frac{1}{q^6} - q^4 - q^2 + \frac{2}{q^2} + 1$$

–  $R = [1^4]$ . Имеется два варианта. Рассматривая это как представление  $\mathfrak{sl}(3|1)$  с  $\varepsilon = 1$ , мы получаем:

$$\mathcal{H}_{[1^4]}^{\mathcal{K}}(q, q^2) = \mathcal{H}_{[2,2,2]}^{\mathcal{K}}(q, q^2) \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.75)$$

Взяв  $\mathfrak{sl}(2|1)$  с  $\varepsilon = 2$ :

$$\mathcal{H}_{[1^4]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) = \mathcal{H}_{[3,3]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.76)$$

– Наконец, мы приводим непрямоугольный случай. Возьмем  $R = [3,2]$  и рассмотрим его как  $[2 + 1, 2]$  для  $\mathfrak{sl}(2,1)$  и  $\varepsilon = 1$ . Тогда:

$$\mathcal{H}_{[3,2]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) = \mathcal{H}_{[2,1,1]}^{\mathcal{K}}(q, q^1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (1.77)$$

### 1.6.1 Пертурбативный анализ полинома Александра

Теперь мы хотели бы отдельно рассмотреть предел  $N = 0$ . С точки зрения теории Черна-Саймонса  $\mathfrak{sl}(N)$  это имеет смысл только как «аналитическое продолжение», тогда как в супергрупповом подходе это просто инвариант  $\mathfrak{sl}(K|K)$

(игнорируя сложности, возникающие в теории представлений  $\mathfrak{sl}(K|K)$ ). Многочлен ХОМФЛИ при  $a = 1$  – это так называемый многочлен Александера [192]:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = H_R^{\mathcal{K}}(q, a = 1) \quad (1.78)$$

Он назван по аналогии со стандартным топологическим многочленом Александера [53], который вычисляется в фундаментальном представлении. Многочлен Александера по-прежнему обладает симметрией «тяни-крюк» (1.70). Это оказывается очень ограничивающим в сочетании со свойством однокрюковости:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}), \text{ для } R = [r, 1^L] \quad (1.79)$$

Обширное исследование этого свойства однокрюковых диаграмм и его связи с интегрируемостью было проведено в [50; 204]. Аргументы, изложенные в этих статьях, объясняют, как такие «непертурбативные» свойства влияют на структуру разложения Васильева (интеграла Концевича) [46; 162].

А именно, рассмотрим разложение:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q = e^{\hbar}, a = e^{N\hbar}) = \sum_n \left( \sum_m v_{nm}^{\mathcal{K}} r_{nm}^R \right) \hbar^n \quad (1.80)$$

где  $v_{nm}^{\mathcal{K}}$  – инварианты Васильева, а  $r_{nm}^R$  – групповые факторы. Любое свойство  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, A)$  относительно представления  $R$  спускается до групповых факторов и становится условием на элементы  $Z(U(\mathfrak{sl}_N))$ . Таким образом, получаем:

$$r_{nm}^R \Big|_{N=0} = r_{nm}^{\mathbf{T}_\varepsilon(R)} \Big|_{N=0} \text{ – симметрия «тяни-крюк»,} \quad (1.81)$$

$$r_{nm}^{[r, 1^L]} = |R| r_{nm}^{[1]} \Big|_{N=0} \text{ – свойство однокрюковости.} \quad (1.82)$$

Являясь элементами  $Z(U(\mathfrak{sl}_N))$ , они разлагаются в базис сдвинутых симметричных функций (собственные значения инвариантов Казимира):

$$C_r(R) = \sum_{i=1} (R_i - i + 1/2)^r - (-i + 1/2)^r \quad (1.83)$$

$$C_\Delta = \prod_i C_{\Delta_i}, \quad \Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k] \quad (1.84)$$

Следовательно, мы можем поставить общую задачу поиска многочленов от инвариантов Казимира, которые удовлетворяют указанным выше соотношениям:

$$\sum_{|\Delta|=n} \alpha_{\Delta} C_{\Delta}(R) = 0, \text{ для } R = [r, 1^L] \quad (1.85)$$

$$\sum_{|\Delta|=n} \alpha_{\Delta} C_{\Delta}(R) = \sum_{|\Delta|=n} \alpha_{\Delta} C_{\Delta}(\mathbf{T}_{\varepsilon}()) \quad (1.86)$$

Это определит подпространство  $Z(U(\mathfrak{sl}_N))$ , где лежат групповые факторы. Мы можем надеяться, и так действительно оказывается, что эти симметрии являются достаточно ограничивающими, чтобы в значительной степени **зафиксировать общий возможный вид групповых факторов для  $N = 0$** .

Система (1.86) изучалась в [205], где дается способ построения явного решения и комбинаторного перечисления базиса в пространстве решений.

Следовательно, расширение симметрии до полинома ХОМФЛИ открывает проблему решения подобных уравнений для определения уже групповых факторов инварианта для общего  $N$ . Эта проблема будет подробно изучена в одной из следующих статей. Однако мы хотим прояснить общую идею, которую мы ожидаем извлечь из симметрии. Главным образом, мы надеемся **определить теоретико-групповую зависимость инварианта ХОМФЛИ в пертурбативном разложении для общих  $N$** .

Наше внимание к супергрупповой формулировке теории Черна-Саймонса и инвариантам узлов было также мотивировано серией статей, в которых обсуждался фундаментальный многочлен Александра как квантовый инвариант супергруппы из различных подходов:

- В группе кос/формализме  $\mathcal{R}$ -матриц для  $U_q(\mathfrak{sl}(N|M))$  и  $U_q(\mathfrak{sl}(1|1))$  [275; 283; 316], в частности, в [138], где также было замечено, что различные формулы для  $U_q(\mathfrak{sl}(N|M))$ , такие как значения инвариантов Казимира, скейн-соотношение и т.д. имеют вид как в  $U_q(\mathfrak{sl}(N - M))$ .
- В подходе через конформные блоки для  $SL(1|1)$  WZW-модели [282] и через ассоциаторы Дринфельда [169].
- В виде интеграла Концевича [89] и с помощью весовых систем супералгебры [73]

– Как вариант категоризации для  $U_q(\mathfrak{sl}(1|1))$  в [278].

## 1.7 Гипотеза о собственных значениях

Мы утверждали, что симметрия «тяни-крюк» может быть объяснена, если рассматривать полином ХОМФЛИ как инвариант супергруппы. Теперь мы хотели бы сосредоточиться на взаимосвязи симметрии и подхода Решетина-Тураева к квантовым инвариантам узлов [277].

Мы работаем с полиномом ХОМФЛИ как с инвариантом  $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ . Интересным наблюдением является то, что можно показать, что симметрия «тяни-крюк» имеет место при условии справедливости так называемой гипотезы **собственных значений** [71]. Эта гипотеза еще не доказана, но есть солидный набор аргументов в пользу ее справедливости. Таким образом, доказательство симметрии «тяни-крюк» добавляет новый пример в эту коллекцию. Мы дадим краткое изложение утверждения гипотезы.

Начнем с выражения для нормированного полинома ХОМФЛИ, полученного через  $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{H}_R^K = \sum_{Q \in R^{\otimes n}} \sigma_Q(\mathcal{R}) \frac{\text{qdim}(Q)}{\text{qdim}(R)} \quad (1.87)$$

Здесь  $\sigma_Q$  – это следы произведений  $\mathcal{R}$ -матриц в пространстве кратностей представления  $Q$ ,  $\text{qdim}(Q)$  – квантовая размерность этого представления, наконец, сумма берется по всем  $Q$ , входящим в разложение тензорного произведения  $R^{\otimes n}$  на неприводимые представления. Квантовая размерность задается хорошо известной  $q$ -деформацией формулы крюка:

$$\text{qdim}(Q) = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{[N - i + j]}{[h_{ij}]} \quad (1.88)$$

$$h_{ij} := Q_i - i + Q'_j - j + 1, \quad [n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Симметрия (1.65) действует на каждую часть выражения: неприводимые компоненты  $Q$ , квантовую размерность и  $\sigma_Q(\mathcal{R})$ . Чтобы установить роль, которую

наше утверждение играет в таком подходе, мы будем рассматривать каждую составляющую (1.87) отдельно.

В действительности квантовая размерность – это в точности значение полинома ХОМФЛИ тривиального узла:

$$H_R^\circ(q, A) = \text{qdim}(R) \quad (1.89)$$

таким образом, знаменатель в (1.87) находится в согласии с определением нормированного полинома ХОМФЛИ (1.58).

**Действие на неприводимых представлениях.** Главный вопрос, который следует задать, – это то, обладает ли разложение на представления  $Q$  каким-нибудь хорошим свойством в отношении применения нашей симметрии к  $R$ ? Напомним простой случай, соответствующий многочлену Александра  $N = 0$ , описанный в [205].

Сумма по  $Q$  в (1.87) определяется по правилу Литтлвуда-Ричардсона. Однако у нас также есть отношение квантовых размерностей, которое в некоторых случаях может быть равно нулю. Знаменатель (1.88) никогда не обращается в нуль, но как насчет числителя? Для  $N = 0$  формула принимает следующий вид:

$$\text{qdim}(R) \Big|_{N=0} = \prod_{i,j} \frac{[j-i]}{[h_{ij}]} \quad (1.90)$$

Ясно, что квантовые размеры имеют нули на диагональных элементах диаграммы Юнга. Следовательно, единственный способ, чтобы соотношение не равнялось нулю, нужно иметь одинаковое количество диагональных элементов, то есть одинаковое количество крюков в  $Q$  и в  $R$ . Следовательно, в формуле (1.87) то же самое правило распространяется на множество:

$$Q \in R^{\otimes n} : Q \vdash n|R, \quad h(Q) = h(R), \quad \text{где } h(R) = \{\text{число крюков на диаграмме}\} \quad (1.91)$$

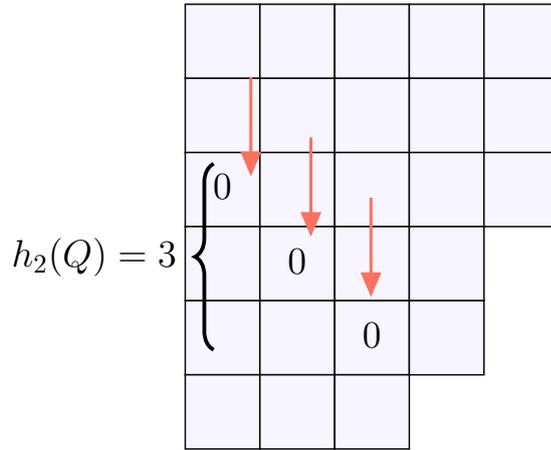
Симметрия сводится к преобразованию  $R \rightarrow \mathbf{T}_\varepsilon(R)$ , в то время как подпредставления  $Q$  просто преобразуются соответствующим образом:

$$\mathbf{T}_{n\varepsilon}(Q) \in (\mathbf{T}_\varepsilon R)^{\otimes n} : Q \vdash n|R, \quad h(Q) = h(R) \quad (1.92)$$

Поэтому мы наблюдаем хорошее действие симметрии на одну из частей формулы (1.87).

Случай  $N \neq 0$  немного сложнее, так как теперь симметрия меняет количество элементов. В формуле крюков для квантовой размерности знаменатель равен нулю в элементах, лежащих на диагонали, сдвинутых вниз на  $N$  строк. Например, для  $N = 2$ :

Пример  $Q = [5, 5, 5, 4, 4, 3]$



Обозначим через  $h_N(R)$  количество элементов на сдвинутой диагонали. Ссылаясь на обсуждение в предыдущих разделах, количество этих сдвинутых крюков в точности равно  $M$  в супералгебре  $\mathfrak{sl}(N, M)$ .

Чтобы представление  $Q$  давало ненулевой вклад в (1.87), оно должно иметь  $h_N(Q) = h_N(R)$ . Тогда для полинома ХОМФЛИ при  $A = q^N$  мы имеем следующие представления, вносящие вклад в (1.87):

$$Q \in R^{\otimes n} : Q \vdash n|R|, h_N(Q) = h_N(R) \quad (1.93)$$

После применения симметрии представления преобразуются простым способом, аналогично случаю  $N = 0$ :

$$\mathbf{T}_{n\varepsilon}^N(Q) \in (\mathbf{T}_\varepsilon^N R)^{\otimes n} : Q \vdash n|R|, h_N(Q) = h_N(R) \quad (1.94)$$

Теперь займемся квантовыми размерностями.

**Инвариантность квантовой размерности.** Оказывается, квантовые размерности инвариантны относительно действия симметрии на представление с

точностью до знака:

$$\frac{\text{qdim}(\mathbf{T}_\varepsilon^N(R))}{\text{qdim}(R)} = (-1)^{\varepsilon h_N(R)} \quad (1.95)$$

Напомним, что очень важно иметь дело с соотношением вида  $\frac{\text{qdim}(\mathbf{T}_\varepsilon^N(R))}{\text{qdim}(R)}$  как неделимым выражением. Поскольку формально обе квантовые размерности равны нулю в  $\mathfrak{sl}(N)$  для таких «длинных» диаграмм. Соотношение, тем не менее, конечно.

В качестве иллюстрации рассмотрим один из приведенных выше примеров (1.77):

$$\frac{\text{qdim}([3,2])}{\text{qdim}([2,1,1])} = \frac{[1] \cdot [2] \cdot [3] \cdot [0] \cdot [1]}{[4] \cdot [3] \cdot [1] \cdot [2] \cdot [1]} \cdot \frac{[4] \cdot [1] \cdot [2] \cdot [1]}{[1] \cdot [2] \cdot [0] \cdot [-1]} = -1. \quad (1.96)$$

Отметим, что он действительно инвариантен. Поскольку этот раздел носит качественный характер, мы не будем здесь приводить доказательства. Это простое комбинаторное вычисление, случай  $N = 0$  приведен в приложении к [205].

**$\mathcal{R}$ -матрицы.** Согласно общей теории,  $\sigma_Q(R)$  – это характеры представления группы кос, заданной  $\mathcal{R}$ -матрицами. Если обозначить через  $\pi(\beta^K)$  представление группы кос, соответствующей узлу  $\mathcal{K}$ , то:

$$\sigma_Q(\mathcal{R}) = \text{tr}_q(\pi(\beta^K)) \quad (1.97)$$

где квантовый след  $\text{tr}_q$  определён для элемента  $z$  как

$$\text{tr}_q(z) := \text{tr}(K_{2\rho}z) \quad (1.98)$$

где специальный оператор добавлен в обыкновенный след. Этот оператор определён через полусумму положительных корней  $\rho$  и простые корни  $\alpha_i$ :

$$2\rho = \sum_{i=1}^{N-1} n_i \alpha_i \quad K_{2\rho} := \prod_{i=1}^{N-1} K_i^{n_i} \quad K_i := q^{(\alpha_i, H)}. \quad (1.99)$$

Представление задается матрицами  $\mathcal{R}_i$ . Гипотеза о собственных значениях утверждает, что **квантовые  $\mathcal{R}_i$ -матрицы полностью определены собственными значениями универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы.**

Это означает, что достаточно доказать инвариантность полного набора собственных значений относительно действия симметрии. Собственные значения

универсальной  $\mathcal{R}$  - матрицы определяются тензорным квадратом двух представлений  $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ :

$$R \otimes R = \bigoplus_{W \subset R \otimes R} W \quad (1.100)$$

Собственные значения  $\lambda_W$  для каждой неприводимой компоненты задаются выражением:

$$\lambda_W = q^{\kappa(W) - 4\kappa(R) - N|R|}, \quad (1.101)$$

$$\kappa(R) = 2 \sum_{i,j \in R} (j - i) = C_2(R) \quad (1.102)$$

Когда мы применяем симметрию, новый набор собственных значений будет определяться разложением преобразованных представлений:

$$\mathbf{T}_\varepsilon^N(R) \otimes \mathbf{T}_\varepsilon^N(R) = \bigoplus_{W \subset R \otimes R} \mathbf{T}_{2\varepsilon}^N(W) \quad (1.103)$$

Тот факт, что неприводимые подпредставления хорошо преобразуются под действием симметрии «тяги-крюк», приводит к сохранению всего множества собственных значений в силу следующего равенства:

$$\begin{aligned} \kappa(W) - 4\kappa(R) - N|R| &= \kappa(\mathbf{T}_{2\varepsilon}^N(W)) - 4\kappa(\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)) - N|\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)| \\ &\text{для } h_N(R) = h_N(W) \end{aligned} \quad (1.104)$$

Это означает, что набор собственных значений сохраняется с точностью до знака, что схематично можно написать:

$$\{\lambda\}_R = \{\lambda\}_{\mathbf{T}_\varepsilon^N(R)} \quad (1.105)$$

Это также значит, что следы тоже сохраняются. Более внимательное рассмотрение показывает, что появляющийся знак в точности сокращает знак, появляющийся из квантовой размерности:

$$\sigma_{\mathbf{T}_\varepsilon^N(W)}(\mathcal{R}) = (-1)^{\varepsilon h_N(R)} \sigma_W(\mathcal{R}) \quad (1.106)$$

Отсюда мы видим, что благодаря свойствам множителей в выражении (1.87) относительно симметрии «тяги-крюк» мы можем доказать инвариантность полинома ХОМФЛИ.

## Глава 2. Крендельные узлы и $6j$ -символы

Несмотря на впечатляющий прогресс за последние годы, вычисление раскрашенных многочленов ХОМФЛИ для конкретных узлов и зацеплений остается нетривиальным упражнением. Оно использует множество передовых методов современной теоретической физики, однако они все еще остаются недостаточно мощными для этой задачи, что в свою очередь стимулирует развитие этих методов. Многочлены узлов зависят от множества параметров, и цель состоит в том, чтобы изучить и понять эти зависимости, про которые уже известно, что они удовлетворяют различным интересным уравнениям, обобщающим ранее известные в более простых (квантовых) теориях поля, [187].

Особенно интересны результаты, полученные для целого семейства узлов или зацеплений. Самый известный пример - двухпараметрический набор *торических* узлов и зацеплений, образованный непересекающимися прямыми, обертывающих тор по двум несжимаемым циклам соответственно  $m$  и  $n$  раз. Диаграммы зацеплений для торического узла/зацепления - это просто замыкание особой  $m$ -нитевой косы,

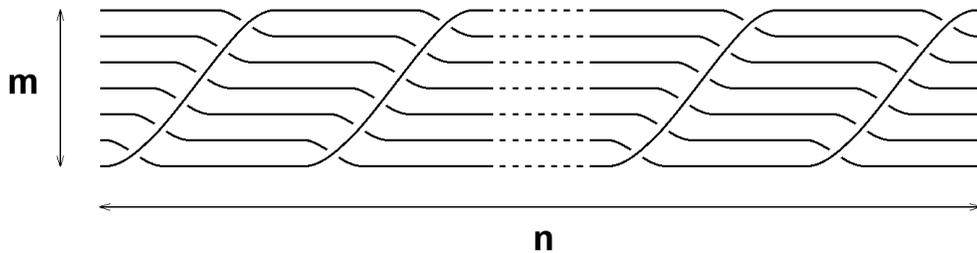


Рисунок 2.1 — Коса торического узла  $[m, n]$

В этом случае полином ХОМФЛИ в произвольном представлении  $R$  равен задается формулой Россо-Джонса [281],

$$H_R^{[m, n]}(q, A) = q^{2mn\kappa_R} A^{(m-1)n|R|} \sum_{Q \in R^{\otimes m}} C_{RQ} \lambda_Q^{2n/m} \chi_Q^*(q, A) \quad (2.1)$$

Здесь сумма идет по диаграммам Юнга  $Q$  размера  $|Q| = m|R|$ , квантовые размерности соответствующих представлений линейная группа  $GL(N)$  - значения функций Шура в «топологическом локусе» в пространстве переменных времени,  $\chi_Q^* = \chi_Q \left\{ p_k = \frac{\{A^k\}}{\{q^k\}} \right\}$  где  $A = q^N$  и  $\{x\} = x - x^{-1}$ , так что квантовое число

это  $[x] = \frac{\{q^x\}}{\{q\}}$  и "дифференциал DGR" [67] это  $D_i = \frac{\{Aq^i\}}{\{q\}}$ . Параметрам  $\lambda_Q$  соответствуют собственные значения квантового  $\mathcal{R}$  - матрица, составленная из собственных значений  $\varkappa_Q$  квадратичного оператора Казимира

$$\lambda_Q \sim q^{\varkappa_Q}, \quad \varkappa_Q = \sum_{(i,j) \in Q} (j - i) \quad (2.2)$$

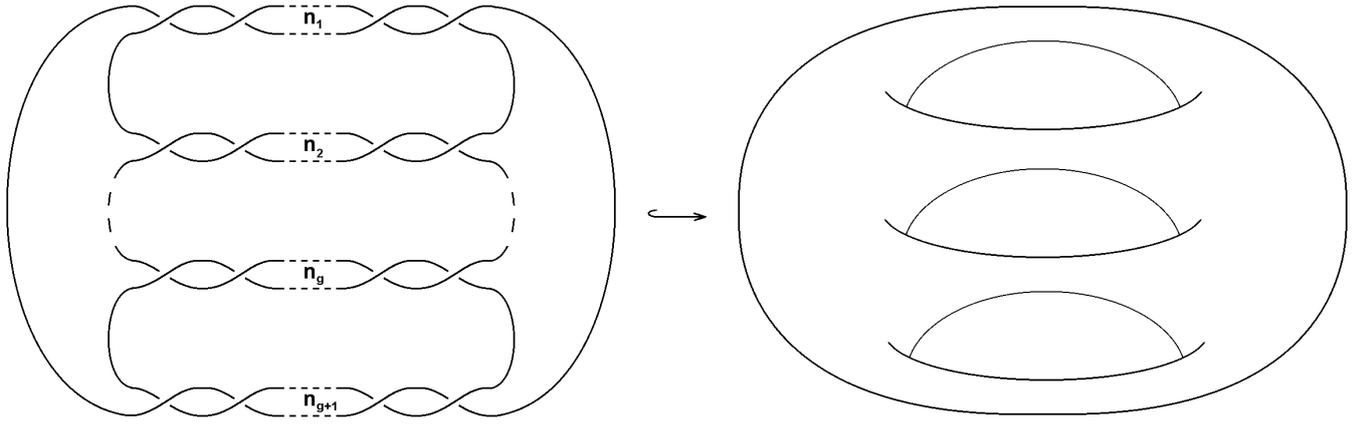
где есть произвольный множитель в  $\lambda_Q$ , который зависит от оснащения. Наконец, коэффициенты  $C_{RQ}$  определяются из разложения преобразование Адамса символов  $\chi_R$ :

$$\left( \chi_R \{p_{mk/l}\} \right)^l = \sum_{Q \in R^{\otimes m}} C_{RQ} \chi_Q \{p_k\} \quad (2.3)$$

где  $l =$  наибольший общий делитель  $(m, n)$  - количество компонентов в торическом зацеплении. Для взаимно простых  $n$  и  $m$  получается просто узел и  $l = 1$ .

Наша цель - распространить предыдущие вычисления на гораздо более богатое семейство, что в совокупности выглядит как простое обобщение торических узлов, и, таким образом, дает больше шансов угадать соответствующий путь для обобщения (2.1). Это узлы и зацепления, образованные обертыванием поверхности рода  $g$  без самопересечений, что может отличаться от  $g = 1$ . Самый простой случай этого типа имеет диаграмму узла (см. Рисунок 2.2), состоящую из  $g + 1$  двунитевой косы и, следовательно, имеет  $g + 1$  различных параметров эволюции  $n_1, \dots, n_{g+1}$  (для  $g = 1$  все зависит от суммы  $n = n_1 + n_2$ ). В литературе (см. [142]) это семейство известно как крендельные узлы и зацепления. Семейство фактически делится на подсемейства, различающиеся взаимной ориентацией нитей в косе. Для определенных ориентаций семейство обладает циклической симметрией  $n_k \rightarrow n_{k+1}$ . Фактически, если рассматривать только симметричные представления, симметрия фактически расширяется до произвольных перестановок  $n_k$ , узлы, связанные этими перестановками, на самом деле являются мутантами [216] и симметричные полиномы ХОМФЛИ для них одинаковы.

Важно подчеркнуть, что в данном случае род римановой поверхности, в которую вкладывается узел, *не имеет ничего общего* со стандартным определением рода узла [4]. Он определяется как наименьший род поверхности Зейферта для данного узла. Поверхность Зейферта - это ориентируемая поверхность, чьей границей является данный узел.

Рисунок 2.2 — Крендельный узел рода  $g = 3$ 

## 2.1 Подготовительные примеры

### 2.1.1 Род $g = 1$ , фундаментальное представление, две параллельные нити

Начнем с этого простейшего примера, что является простейшим возможным случаем формулы Росс-Джонса (2.1). В нашем семействе мы должны ограничить его двумя нитями,  $m = 2$ , чтобы

$$H_R^{(n_1, n_2)} = \sum_{Q \vdash 2|R} \lambda_Q^{n_1+n_2} \chi_Q \quad (2.4)$$

и в фундаментальном представлении

$$H_{[1]}^{(n_1, n_2)} = \lambda_{[2]}^{n_1+n_2} \chi_{[2]} + \lambda_{[11]}^{n_1+n_2} \chi_{[11]} \quad (2.5)$$

с  $\lambda_{[2]} = q/A$  и  $\lambda_{[11]} = -1/(qA)$  в топологическом оснащении.

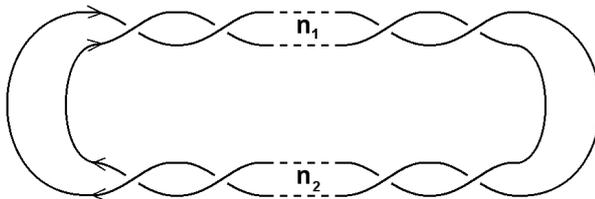


Рисунок 2.3 — Две параллельные нити: торические узлы и зацепления

Однако, если кто-то не знает ответа и смотрит на проблему с точки зрения метода эволюции, необходимо учитывать следующий анзац:

$$H_{[1]}^{(n_1, n_2)} = c_{11} \lambda_{[2]}^{n_1+n_2} + c_{10} \lambda_{[2]}^{n_1} \lambda_{[11]}^{n_2} + c_{01} \lambda_{[2]}^{n_2} \lambda_{[11]}^{n_1} + c_{00} \lambda_{[11]}^{n_1+n_2} \quad (2.6)$$

с четырьмя неизвестными коэффициентами. Очевидная симметрия между  $n_1$  и  $n_2$  подразумевает, что  $c_{10} = c_{01}$ , и, глядя на картинку, понимаешь, что ответ зависит только от  $n_1 + n_2$ , поэтому на самом деле  $c_{10} = c_{01} = 0$ . Два оставшихся параметра могут быть найдены из двух начальных условий: при  $n_1 + n_2 = \pm 1$  получается развязка, а полином ХОМФЛИ равен  $\chi_{[1]}$ , т.е.

$$c_{11}\lambda_{[2]}^{\pm 1} + c_{00}\lambda_{[11]}^{\pm 1} = \chi_{[1]} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\frac{1}{\lambda_{[11]}} - \lambda_{[11]}}{\frac{\lambda_{[2]}}{\lambda_{[11]}} - \frac{\lambda_{[11]}}{\lambda_{[2]}}} \cdot \chi_{[1]} = \frac{\{Aq\}}{\{q^2\}} \cdot \chi_{[1]} = \chi_{[2]} \\ c_{00} &= \frac{\lambda_{[2]} - \frac{1}{\lambda_{[2]}}}{\frac{\lambda_{[2]}}{\lambda_{[11]}} - \frac{\lambda_{[11]}}{\lambda_{[2]}}} \cdot \chi_{[1]} = \frac{\{A/q\}}{\{q^2\}} \cdot \chi_{[1]} = \chi_{[11]} \end{aligned} \quad (2.8)$$

что возвращает нас к

$$H_{[1]}^{(n_1, n_2)} = \lambda_{[2]}^{n_0+n_1} \chi_{[2]} + \lambda_{[11]}^{n_0+n_1} \chi_{[11]} \quad (2.9)$$

(легко проверить третье очевидное начальное условие: при  $n_0 + n_1 = 0$  получается пара несвязных узлов с многочленом ХОМФЛИ  $\chi_{[1]}^2 = \chi_{[2]} + \chi_{[11]}$ ). Т.к.  $\chi_{[2]} + \chi_{[11]} = \frac{\{Aq\} + \{A/q\}}{\{q^2\}} \cdot \chi_{[1]} = \chi_{[1]}^2$  (отношение действительно за пределами топологического локуса), это можно переписать в идентичной, но более сложной форме:

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{(n_1, n_2)} &= \frac{\chi_{[2]}^2 + \chi_{[2]}\chi_{[11]}}{\chi_{[1]}^2} \cdot \lambda_{[2]}^{n_1+n_2} + \frac{\chi_{[2]}\chi_{[11]} - \chi_{[2]}\chi_{[11]}}{\chi_{[1]}^2} \left( \lambda_{[2]}^{n_1}\lambda_{[11]}^{n_2} + \lambda_{[2]}^{n_2} \cdot \lambda_{[11]}^{n_1} \right) \\ &\quad + \frac{\chi_{[11]}^2 + \chi_{[2]}\chi_{[11]}}{\chi_{[1]}^2} \lambda_{[11]}^{n_1+n_2} = \\ &= \sum_{i=0}^2 C_{[1]}^i \cdot \left( \lambda_{[2]}^{n_1+n_i} \lambda_{[11]}^{n_{i+1}+n_2} + \text{перестановки}(n_1, n_2) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$C_{[1]}^i = \frac{1}{\chi_{[1]}^2} \left( \chi_{[2]}^{2-i} \chi_{[11]}^i + (-)^i \chi_{[2]}\chi_{[11]} \right) \quad (2.11)$$

и включены только перестановки из двух разных групп индексов.

### 2.1.2 Род $g = 1$ , фундаментальное представление, антипараллельные нити

Прежде чем перейти к более высоким представлениям и родам  $g$ , мы рассмотрим тот же пример рода один с двумя нитями, но теперь с антипараллельными нитками:

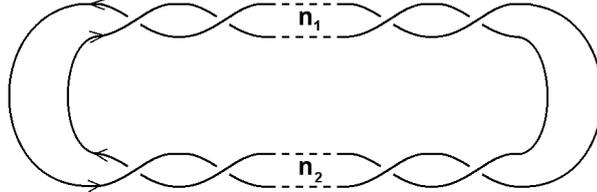


Рисунок 2.4 — Две антипараллельные нити: торические зацепления

Эта конфигурация возможна, только если  $n_1 + n_2$  четно, и это всегда зацепление, следовательно, в общем случае соответствующие многочлены ХОМФЛИ зависят от двух представлений,  $R_1 \otimes R_2$ . Две параллельные нити, рассмотренные в предыдущем разделе, соответствуют  $R_2 = R_1 = [1]$ , тогда как для антипараллельных нитей фундаментальный ХОМФЛИ подразумевает, что  $R_2$  скорее сопряжен с  $R_1$ ,  $R_2 = \overline{R_1} = \overline{[1]} = [q^{N-1}]$ . Это все еще частный случай формулы Россо-Джонса (2.1), поскольку она верна в любом представлении.

С точки зрения метода эволюции теперь есть  $[1] \otimes \overline{[1]} = \text{Adjoint} + \text{singlet}$ , а согласно [195] два соответствующих собственных значения:  $\lambda_0 = 1$  и  $\lambda_{adj} = -A$ . В качестве начального условия можно взять пару неузлов в  $n_1 + n_2 = 0$  и зацепление Хопфа в  $n_1 + n_2 = 2$ .

### 2.1.3 ХОМФЛИ в фундаментальном представлении произвольного рода

Теперь мы можем перейти к произвольному роду. Опять же, будут разные варианты выбора ориентации конкретных прядей. Если для звеньев свобода довольно велика, то для узлов ориентация зависит только от рода. Для нечетного  $g$  можно сделать все косы параллельными, а для четного  $g$  ровно одна должна быть антипараллельна. Более того, соответствующий параметр, который мы

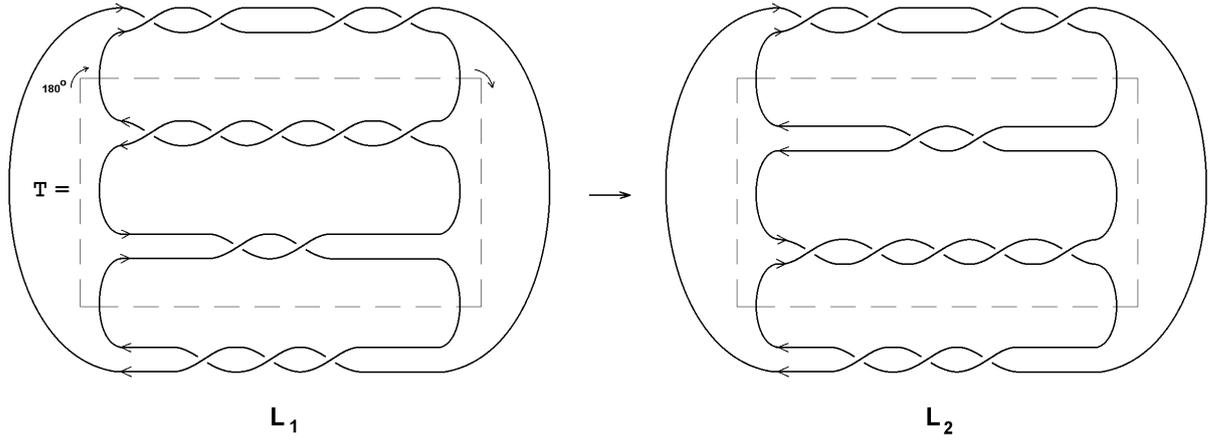


Рисунок 2.5 — Мутантные узлы среди кренделей

выбираем равным  $n_{g/2+1}$ , должен быть четным. Мы также рассматриваем случай, когда все косы антипараллельны.

Следующий вопрос: что происходит с симметрией  $n_1 \leftrightarrow n_2$ . При  $g > 1$  полиномы зависят от всех  $n_i$  независимо, и существует только циклическая симметрия, когда все  $n_k \rightarrow n_{k+1}$ . Однако, как мы увидим, ответ в фундаментальном представлении фактически симметричен во всех  $n_k$ . На самом деле это не должно вызывать удивления, потому что перестановка двух соседних  $n_k$  - это просто узловая мутация. В самом деле, (по определению, следующему за [53]) пусть у нас есть ориентированное зацепление  $L_1$ , которое содержит отмеченный клубок  $T$  (см. Рисунок 2.5). Удалите  $T$ , поверните его на  $180^\circ$  вокруг оси, пересекающей плоскость изображения, и приклейте его на место, чтобы сформировать новое зацепление  $L_2$ . Если  $L_1 \neq L_2$ , то они называются мутантами друг друга, и эта операция называется мутацией. Поскольку полиномы ХОМ-ФЛИ в симметричных представлениях не различают мутантные узлы [216], с помощью мутации можно переставить  $n_k \leftrightarrow n_{k+1}$ . Эта улучшенная симметрия уменьшает количество необходимых начальных условий, и, таким образом, можно получить больше формул и больше шансов обнаружить закономерности, что приведет к открытию общих выражений. Многие из них предоставляются, если положить один из параметров, скажем,  $n_g$ , равным нулю, тогда узел/зацепление сводится к составному узлу, который обладает свойством декомпозиции

$$\frac{H_R^{\text{составной}}}{\chi_R} = \prod_{\text{компоненты}} \frac{H_R^{\text{компонента}}}{\chi_R} \quad (2.12)$$

К этому можно добавить уже известные частные примеры, например, скрученные узлы.

Все это делает возможным явный расчет методом эволюции при родах  $g = 1, 2, 3, 4$ , по крайней мере, в фундаментальном представлении. И этого достаточно, чтобы раскрыть структуру и получить общие формулы полинома ХОМФЛИ в фундаментальном представлении:

$$H_{[1]}^{(n_1, \dots, n_{g+1})} = \sum_{i=0}^{g+1} C_{[1]}^i \cdot \left( \lambda_0^{n_1 + \dots + n_i} \lambda_1^{n_{i+1} + \dots + n_{g+1}} + \text{перестановки } n_i \right) \quad (2.13)$$

где снова включены только перестановки из двух разных групп индексов, а коэффициенты  $C_{[1]}^i$  равны:

- нечетные  $g$ , все косы с параллельными ориентациями:

$$C_{[1]}^i = \frac{1}{\chi_{[1]}^{g+1}} \left( \chi_{[2]}^i \chi_{[11]}^{g+1-i} + (-)^i \chi_{[2]} \chi_{[11]} z^{g-1} \right) \quad (2.14)$$

$$\lambda_0 = \lambda_{[11]}, \lambda_1 = \lambda_{[2]} \quad (2.15)$$

- четные  $g$ , все косы с антипараллельными ориентациями:

$$C_{[1]}^{\bar{i}} = \frac{1}{z^i \chi_{[1]}^{g+1}} \left( \chi_{[2]}^i \chi_{[11]} + (-)^i \chi_{[2]} \chi_{[11]}^i \right) \quad (2.16)$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_{adj} \quad (2.17)$$

• четные  $g$ , все косы с параллельными ориентациями, за исключением одной,  $n_{g/2+1}$  должны быть четными; в этом случае каждый член в сумме (2.13) является произведением  $g$  факторов  $\lambda_{[11]}^{n_i}$  и  $\lambda_{[2]}^{n_j}$  и один множитель либо  $\lambda_0^{n_k} = 1$ , либо  $\lambda_{adj}^{n_k}$ , в этих двух разных случаях коэффициенты  $C_{[1]}^i$  :

$$\begin{aligned} \text{с.з. } \lambda_0 = 1 : C_{[1]}^i &= \frac{1}{\chi_{[1]}^{g+1}} \left( \chi_{[2]}^i \chi_{[11]}^{g-i} + (-)^i \chi_{[2]} \chi_{[11]} z^{g-2} \right) \\ \text{с.з. } \lambda_{adj} = A : C_{[1]}^i &= \frac{\chi_{[2]} \chi_{[11]}}{z^2 \chi_{[1]}^{g+1}} \left( \chi_{[2]}^i \chi_{[11]}^{g-i} + (-)^{i+1} z^g \right) = \\ &= \frac{\{q\}^{g-1} \{Aq\} \{A/q\}}{\{A\}^{g+1}} \left( \chi_{[2]}^i \chi_{[11]}^{g-i} + (-)^{i+1} z^g \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь  $z = \frac{1}{[2]} \chi_{[1]}$ .

Общий множитель  $\{Aq\} \{A/q\}$  во второй формуле в (2.18) требуется по дифференциальному разложению.

Структура этих формул очень проста: есть «основной вклад», первые члены в каждой строке, который находится в четком взаимно однозначном соответствии с комбинацией  $\lambda$ -факторов, плюс «исправления» которые выглядят

немного менее универсальными. Фактически, та же самая структура сохраняется в более высоких представлениях, по крайней мере, симметричных.

**Формулы (2.15) - (2.18) дают исчерпывающее описание фундаментального ХОМФЛИ для всех узлов кренделя.**

Для  $N = 2$  нет ориентационной зависимости (за исключением простого оснащающего фактора <sup>1</sup>), И все четыре формулы превращаются в одну:

$$C_{[1]}^{(i)} \stackrel{A=q^2}{=} \frac{[3]}{[2]^{2g+2}} \left( [3]^{i-1} + (-)^i \right) \quad (2.19)$$

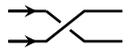
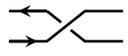
что дает  $1, 0, [3], \frac{[3][4]}{[2]} = [5] + 1, \dots$  для  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  соответственно. (Заметим, что при  $N = 2$  мы получаем  $z = 1$ ,  $\chi_{[2]} = [3]$  и  $\chi_{[11]} = 1$ .) Ур.(2.19) прекрасно согласуется с [48; 149], так же как и с [112].

## 2.2 Основной результат: произвольное симметрическое представление $[r]$

Наш основной результат - явная комбинаторная формула для нередуцированной ХОМФЛИ произвольного зацепления кренделя в симметричном представлении. Формула включает только *три* ингредиента и выглядит так:

$$H_R^{n_1, \dots, n_{g+1}} = \sum_X \dim_q X \prod_{i=1}^{g+1} \sum_Y \mathcal{A}_{XY} \lambda_Y^{n_i} \quad (2.20)$$

Теперь определим ингредиенты.

• **Собственные значения.** Поскольку мы строим связку кренделя только с помощью двухрядной косы, возможны только две ориентации такой косы:  parallel and  antiparallel. Параллельные нити соответствуют произведению двух симметричных представлений  $[r]$ :

$$[r] \otimes [r] = \bigoplus_{m=0}^r [r+m, r-m] \quad (2.21)$$

<sup>1</sup>Это потому, что ориентационная независимость обусловлена аргументом теории групп: для группы  $SU(2)$  представление совпадает с ее сопряженным. Однако это только вертикальное оснащение, которое уважает структуры теории групп, а в топологическом оснащении есть небольшая ориентационная зависимость, то есть дополнительные факторы.

Соответствующие эволюционные собственные значения  $\lambda$  в топологическом оснащении равны

$$\lambda_m = (-)^{m+1} \frac{q^{\chi_{[r+m, r-m]}}}{A^r \cdot q^{4\chi_{[r]}}} = (-)^{m+1} \frac{q^{-r^2+m^2+m}}{A^r} \quad (2.22)$$

Точно так же антипараллельные нити соответствуют произведению симметричного представления и его сопряженного:

$$[r] \otimes \overline{[r]} = \bigoplus_{m=0}^r [2m, m^{N-2}] \quad (2.23)$$

а соответствующие эволюционные собственные значения  $\bar{\lambda}$  в топологическом оснащении равны

$$\bar{\lambda}_m = (-q^{m-1}A)^m \quad (2.24)$$

• **Размерности.** Квантовые размерности  $\Delta_m$  представлений, возникающих в (2.21), равны

$$\Delta_m = \chi_{[r+m, r-m]} = \frac{[2m+1]}{[r+m+1]![r-m]!} \prod_{i=0}^{2r-1} D_j \prod_{j=0}^{r-m-1} \frac{D_{j-1}}{D_{r+m+j}}, \quad (2.25)$$

а квантовые размерности  $\bar{\Delta}_m$  представлений, возникающих в (2.23), равны

$$\bar{\Delta}_m = D_{2m-1} \cdot \left( \prod_{j=0}^{m-2} \frac{D_j}{[j+2]} \right)^2 \cdot D_{-1} \quad (2.26)$$

• **Универсальная матрица.** Третья составляющая - это универсальная матрица  $\mathcal{A}$  (мы обычно используем обозначение  $a_{ij}$  для ее матричных элементов), которая в конечном итоге оказывается связанной с матрицей квантовых коэффициентов Рака (или, в конечном итоге, множителю  $6j$ -символов). Фактически, чтобы описать все зацепления и узлы кренделя, нам понадобятся три разные универсальные матрицы  $\mathcal{A}$ . После утомительных вычислений мы нашли следующие явные формулы для  $\mathcal{A}$ :

$$a_{km} = \alpha_{km} \cdot \mathcal{G} \quad (2.27)$$

$$\bar{a}_{km} = \alpha_{km} \cdot \bar{\mathcal{G}} \quad (2.28)$$

$$\bar{\bar{a}}_{km} = \frac{\bar{\Delta}_m}{\Delta_k} a_{mk} \quad (2.29)$$

где  $\alpha_{km}$  - коэффициенты в случае  $SU_q(2)$  (т.е.  $A = q^2$ ), который не отличается для параллельной и антипараллельной ориентации:

$$\alpha_{km} = (-1)^{r+k+m} [2m+1] \cdot \frac{([k]![m]!)^2 [r-k]! [r-m]!}{[r+k+1]! [r+m+1]!} \times \\ \times \sum_{j=\max(r+m, r+k)}^{\min(r+k+m, 2r)} \frac{(-1)^j [j+1]!}{[2r-j]! ([j-r-k]! [j-r-m]! [r+k+m-j]!)^2} \quad (2.30)$$

и введем следующие специальные функции

$$\mathcal{G} = \frac{G(r-m) G(j+1)}{G(r+k+1) G(j-r-m)} \quad (2.31)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{D_{2m-1}}{[2m+1]} \cdot \frac{G(m)^2 G(j+1)}{G(r+k+1) G(r+m+1) G(r+k+m-j)} \quad (2.32)$$

$$G(n) = \frac{1}{[n]!} \prod_{i=-1}^{n-2} D_i = \frac{(A/q; q)_n}{(q; q)_n} \quad (2.33)$$

где мы использовали симметричный символ  $q$ -Поххаммера  $(A; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \{Aq^j\}$ . При  $A = q^N$ ,  $G(n)$  превращается в  $q$ -бином  $\binom{N+n-2}{n}_q$

Заметим, что  $\mathcal{G}$  и  $\bar{\mathcal{G}}$  равны 1, когда  $A = q^2$ , таким образом уменьшая (2.27) и (2.28) в (2.30). Конкретные примеры этих матриц приведены в Приложении В.

Матрица (2.27) удовлетворяет соотношению взвешенной ортогональности

$$\sum_{k=0}^r \bar{\Delta}_k \cdot a_{km} a_{km'} = \Delta_m \delta_{m, m'}. \quad (2.34)$$

Двойственное соотношение

$$\sum_{m=0}^r \frac{a_{km} a_{k'm}}{\Delta_m} = \frac{\delta_{k, k'}}{\bar{\Delta}_k}. \quad (2.35)$$

Матрица (2.28) также удовлетворяет соотношениям ортогональности:

$$\sum_{k=0}^r \bar{\Delta}_k \cdot \bar{a}_{km} \bar{a}_{km'} = \bar{\Delta}_m \cdot \delta_{m, m'}, \\ \sum_{m=0}^r \frac{\bar{a}_{km} \bar{a}_{k'm}}{\bar{\Delta}_m} = \frac{\delta_{k, k'}}{\bar{\Delta}_k} \quad (2.36)$$

и матрица (2.29) удовлетворяет соотношениям ортогональности:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \Delta_k \cdot \bar{a}_{km} \bar{a}_{km'} &= \bar{\Delta}_m \delta_{m,m'} \\ \sum_{m=0}^r \frac{\bar{a}_{km} \bar{a}_{k'm}}{\bar{\Delta}_m} &= \frac{\delta_{k,k'}}{\Delta_k} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Нулевые строки матриц (2.27) и (2.28) равны квантовым размерностям соответствующих представлений (2.21) и (2.23):

$$a_{0m} = \Delta_m \quad (2.38)$$

$$\bar{a}_{0m} = \bar{\Delta}_m \quad (2.39)$$

Теперь мы специализируем формулу (2.20) для трех возможных случаев узлов/зацеплений кренделя.

**Антипараллельный нечетный случай.** Рассмотрим случай, когда все параметры  $n_1, \dots, n_g$  нечетные, а все прядки в составляющие косы антипараллельны. Этот случай является автономным и не смешивается с другими, т.е. невозможно представить узел или звено с помощью  $n_1, \dots, n_i$  нечетных антипараллельных двухпрядных кос и  $n_i, \dots, n_g$  нечетных параллельных или ровные (анти) параллельные 2-х прядные косы. Поскольку для всех обозначений, стоящих за антипараллельным случаем, мы используем верхнюю черточку, мы обозначаем параметры в этом случае как  $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_g$ . Что касается топологической классификации этого случая, мы можем указать следующее: если род  $g$  нечетный, то результатом является двухкомпонентное зацепление, если род  $g$  четный, результатом является узел. Теперь давайте укажем (2.20) для этого конкретного случая:

$$\begin{aligned} \dim_q X &= \Delta_k \\ A_{XY} &= \bar{a}_{km} \\ \lambda_Y^{n_i} &= \bar{\lambda}_m^{\bar{n}_i} \end{aligned} \quad (2.40)$$

так что формула (2.20) принимает вид

$$\boxed{H_R^{\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{g+1}} = \sum_{k=0}^r \Delta_k \prod_{i=1}^{g+1} \sum_{m=0}^r \bar{a}_{km} \bar{\lambda}_m^{\bar{n}_i}} \quad (2.41)$$

**Прочие случаи.** Все другие возможные конфигурации звеньев кренделя могут быть объединены в одно семейство с помощью  $n_1, \dots, n_{2g_{||}}$  произвольных целых чисел, связанных с параллельными косами и  $\overline{n_{2g_{||}+1}}, \dots, \overline{n_{g+1}}$  **четные** целые числа, связанные с антипараллельными косами. Тогда составляющими (2.20) являются:

$$\left. \begin{aligned} \dim_q X &= \bar{\Delta}_k \\ A_{XY} &= a_{km} \\ \lambda_Y^{n_i} &= \lambda_m^{n_i} \end{aligned} \right\} \text{для } n_1, \dots, n_{2g_{||}} \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{XY} &= \bar{a}_{km} \\ \lambda_Y^{n_i} &= \bar{\lambda}_m^{\bar{n}_i} \end{aligned} \right\} \text{для } \overline{n_{2g_{||}+1}}, \dots, \overline{n_{g+1}},$$

так что ответ будет иметь вид:

$$= \sum_{k=0}^r \bar{\Delta}_k \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{2g_{||}} \left( \sum_{m=0}^r a_{km} \lambda_m^{n_i} \right) \cdot \prod_{j=2g_{||}+1}^{g+1} \left( \sum_{m=0}^r \bar{a}_{km} \bar{\lambda}_m^{\bar{n}_j} \right) \right\} \quad (2.43)$$

Таким образом, наши формулы (2.41) и (2.43) дают **явный ответ для произвольного крендельного зацепления в произвольном симметричном представлении**. Эти формулы (2.20) полностью согласуются с (и, фактически, частично вдохновлены) результатами произвольного рода [48] для многочленов Джонса.

Полиномы ХОМФЛИ в полностью антисимметричных представлениях получаются обычным правилом транспонирования [107; 302]:

$$H_{[1^r]}(A, q) = H_{[r]}(A, q^{-1}) \quad (2.44)$$

### 2.3 Комментарии к главному результату (2.20)

**Семейство кренделей.** Крендельные зацепления и узлы предоставляют нам обширный набор примеров полиномов ХОМФЛИ во всех (анти) симметричных представлениях. Единственными доступными на данный момент примерами были: зацепления колец Уайтхеда и Борромео [171], двухнитевой тор [81; 195] и

твистованные узлы [1; 301], параметризованные каждым целым числом и двойная коса, объединяющая эти два семейства и параметризованная двумя целыми числами [195]. Эти семейства - крошечная часть всего семейства кренделей (см. Г. 2.5). Одним из важных моментов является то, что семейство кренделей включает в себя как тонкие, так и толстые [67] узлы, в то время как двухнитевые торические и скрученные узлы все тонкие. Самый простой пример толстого узла кренделя -  $10_{139} = (4, -1, 3, 3)$  (см. [67, ур. (49)]) в соответствии с таблицами Рольфсена [28]. Этот узел также может быть получен из узла  $5_2$  с помощью тройной косы (подробности см. В [302]). В г. 2.5 мы перечисляем другие образцы из семейства кренделей.

**Тор в t-канале** =  $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \dots)$ . Ключ к пониманию структуры уравнения (2.41) состоит в том, чтобы заметить, что в частном случае, когда все  $n_i = 1$ , мы фактически получаем "в канале  $t$ " обычный двухнитевый торический узел:  $\text{Pretzel}(\bar{1}, \dots, \bar{1}) = \text{Torus}[2, g + 1]$ , i.e.

$$H_{[r]}^{(\bar{1}, \dots, \bar{1})} = c_r^{g+1} H_{[r]}^{[2, g+1]} = c_r^{g+1} \sum_{k=0}^r \Delta_k \lambda_k^{-g-1} \quad (2.45)$$

где  $c_r$  - коэффициент оснащения, учитывающий разницу между вертикальным и топологическим оснащением. Формула разложения "s-каналов" в этом случае имеет вид

$$H_{[r]}^{(\bar{1}, \dots, \bar{1})} = \sum_{k=0}^r \Delta_k \prod_{j=1}^{g+1} \left( \sum_{m=0}^r \bar{a}_{km} \mu_m \right) \quad (2.46)$$

которая подразумевает

$$\sum_{m=0}^r \bar{a}_{km} \mu_m = c_r \lambda_k^{-1} \quad (2.47)$$

Это действительно так:

$$\begin{aligned} \frac{1 + D_1 \mu_1}{D_0} \Big|_{\mu=-A} &= -Aq = c_1, \\ \frac{1 - D_{-1} \mu_1}{D_0} \Big|_{\mu=-A} &= \frac{1}{Aq} = c_1 \cdot (-q^{-2}) = c_1 \lambda_1^{-1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Фактически, наряду с условиями ортогональности (2.29), это требование позволяет в этом случае восстановить всю матрицу  $\mathcal{A}$ .

В следующем абзаце мы рассматриваем зависящие от времени величины, таким образом, восстанавливается метка  $*$ , относящаяся к ограничению топологического локуса, которое было опущено в основном тексте.

**Обобщение формулы Россо-Джонса.** Вернемся к формуле Россо-Джонса (2.1). В случае симметричных представлений  $R = [r]$  его можно записать в виде

$$\mathcal{H}_{[r]}^{[m,n]} \{p\} = q^{\frac{2n}{m} \hat{W}_{[2]}} \hat{\pi} \chi_{[r]} \{p\}^m \quad (2.49)$$

с оператором  $\hat{\pi}$ , меняющим знак нечетного символа  $\chi_m$

$$\hat{\pi} \chi_m \{p\} = (-)^m \chi_m \{p\} \quad (2.50)$$

где  $m$  обозначает представления  $Q_m$ , возникающие в двух разложениях

$$[r] \otimes [r] = \bigoplus_{m=0}^r [r+m, r-m] \quad (2.51)$$

и

$$[r] \otimes \overline{[r]} = \bigoplus_{m=0}^r [2m, m^{N-2}] \quad (2.52)$$

Ясно, что наше (2.43) влечет расширение (2.49) к произвольным крендельным узлам:

$$\begin{aligned} H_{[r]}^{n_1, \dots, n_{2g_{||}}, \overline{n_{2g_{||}+1}}, \dots, \overline{n_{g+1}}} \{p\} &= \left( \bigotimes_{I=1}^{g+1} q^{n_I \hat{W}_{[2]}(p^{(I)})} \right) \circ \\ \circ \sum_{k=0}^r \bar{\Delta}_k \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{2g_{||}} \left( \sum_{m=0}^r \frac{a_{km}}{\chi_m^*} \chi_m(p^{(i)}) \right) \cdot \prod_{j=2g_{||}+1}^{g+1} \left( \sum_{m=0}^r \frac{\bar{a}_{km}}{\bar{\chi}_m^*} \bar{\chi}_m(p^{(j+2g_{||})}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Аналогичное расширение существует для (2.41).

Существенное отличие от (2.49) состоит в том, что матрицы вращения  $a_{km}$  и  $\bar{a}_{km}$  зависят от представления  $[r]$ , и кодирование этой зависимости является сложной задачей, в действие некоторого оператора. Также обратите внимание, что за пределами топологического локуса

$$\mathcal{H}^{(n_1, n_2)} \{p^{(1)}, p^{(2)}\} \neq \mathcal{H}^{(n_1+n_2)} \{p\} \quad (2.54)$$

– обе стороны даже зависят от разных наборов временных переменных.

## 2.4 Матрицы $a_{km}$ и $\bar{a}_{km}$ как универсальные матрицы Рака

В случае полиномов Джонса (т.е. при  $A = q^2$ ) простейшая матрица  $\mathcal{A}$  превращается в

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & [3] \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

и сразу возникает желание сравнить его со знаменитой матрицей слияния (смешения)

$$S = \frac{1}{[2]} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]} \\ \sqrt{[3]} & -1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

которые недавно появились во многих местах, от модульного преобразования простейшего конформного блока Вирасоро в [84] до вычисления элементарных трехнитевых узлов в [193]. Это сходство оказалось не простым совпадением, а проявлением общего факта: в полной общности, матрицы  $\mathcal{A}$  в наших формулах для полиномы узлов рода  $g$  являются не чем иным, как простым перескалированием матриц Рака из теории представлений квантовых групп, в которой  $S$  является лишь простейшим примером. Этот факт, который пришел к нам в результате утомительных вычислений и был анонсирован в отдельной статье [48]. Хотя это почти очевидно после того, как было обнаружено, и наглядно подтверждается выводом формул (2.27) - (2.29), в этом разделе мы приводим немного больше деталей и комментариев.

Прежде всего, в отличие от случая Джонса, где соответствующая группа - это  $SU_q(2)$ , а матрицы Рака давно известны из [145], в случае ХОМФЛИ нужны общие матрицы  $SU_q(N)$   $\mathcal{A}$ , которые зависят от  $A$ . Следовательно, они являются *универсальными* объектами, интерполирующими между матрицами Рака для конкретного  $SU_q(N)$  при  $A = q^N$ . До недавнего времени о таких количествах было мало что известно, к счастью, совсем недавно [225; 227] предоставляет необходимую информацию. Во-вторых, в случае ХОМФЛИ набор разрешенных представлений шире, чем в случае Джонса: даже если ограничить рассмотрение симметричными представлениями, их сопряженные элементы неизбежно вступят в игру, и они уже не такие, как для  $SU_q(2)$ .

Сказав это, давайте вернемся к нашей основной формуле (2.20), которая была выдвинута в [48].

$$H_R^{n_1, \dots, n_{g+1}} = \sum_{\mathcal{X}} \dim_q \mathcal{X} \prod_{i=1}^{g+1} \sum_{\mathcal{Y}} \mathcal{A}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \lambda_{\mathcal{Y}}^{n_i} \quad (2.57)$$

и прокомментируем это чуть подробнее. Фактически, эта формула естественным образом обобщается на  $l$  различных представлений в случае  $l$ -компонентного зацепления [48] (см. Рисунок 6).

1. В этой формуле под каллиграфическим индексом можно понимать либо  $X$ , либо  $\bar{X}$ , и аналогично для  $\mathcal{Y}$ , так что  $\bar{\Delta}_X \equiv \Delta_{\bar{X}}$ ,  $\bar{\lambda}_X \equiv \lambda_{\bar{X}}$  и т. д. Тогда есть три возможности: когда в (2.57) введете  $X$  и  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}$  и  $Y$ . Соответственно, есть три разные матрицы  $\mathcal{A}_{X\bar{Y}}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{X}\bar{Y}}$  и  $\mathcal{A}_{\bar{X}Y}$ , которые соответствуют (2.27), (2.28) и (2.29).
2. Три условия ортогональности (2.34) - (2.37), которым удовлетворяют матрицы  $\mathcal{A}$ , можно переписать в этих терминах как одно уравнение

$$\sum_{\mathcal{X}} \dim_q \mathcal{X} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}'} = \dim_q \mathcal{Y} \delta_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'} \quad (2.58)$$

и аналогично для двойственного (2.35). Это означает, что отношение к ортонормированной матрице Рака  $S$  имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \sqrt{\frac{\dim_q \mathcal{Y}}{\dim_q \mathcal{X}}} S_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \quad (2.59)$$

После такого изменения масштаба наши формулы (2.27) и (2.28), похоже, полностью согласуются с предположениями [225; 227], таким образом оправдывая / поддерживая предложенную нами идентификацию  $\mathcal{A}$  как масштабированные матрицы Рака.

3. Обратите внимание, что существует ровно три возможных матрицы Рака, когда все представления либо  $R$ , либо  $\bar{R}$ :  $S \begin{pmatrix} R & \bar{R} \\ R & \bar{R} \end{pmatrix}$ ,  $S \begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{R} \\ R & R \end{pmatrix}$  и  $S \begin{pmatrix} \bar{R} & R \\ R & \bar{R} \end{pmatrix}$ .

Эти три случая соответствуют трем типам матриц  $\mathcal{A}$ , обсужденных выше:  $\mathcal{A}_{X\bar{Y}}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{X}Y}$  и  $\mathcal{A}_{\bar{X}\bar{Y}}$ . Первые две транспонированы друг к другу (по общим свойствам матриц Рака), а третья симметрична. Это также объясняет, почему множитель  $\bar{\mathcal{G}}$  в (2.33) симметричен по  $k$  и  $m$ , а  $\mathcal{G}$  нет: в

последнем случае  $k$  и  $m$  маркируют разные представления,  $k \in [r] \otimes \overline{[r]}$ ,  $m \in [r] \otimes [r]$ , тогда как в первом случае оба  $k, m \in [r] \otimes \overline{[r]}$ .

4. Можно использовать дополнительный факт, что первая строка матриц  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ , связанная с синглетным представлением  $X = \overline{\emptyset}$ , состоит только из квантовых измерений  $\chi_{\mathcal{Y}} = \dim_q \mathcal{Y}$ , (2.38), (2.39) и перепишем (2.57) через ортонормированную матрицу Рака  $S$  в другой форме:

$$H_R^{n_1, \dots, n_{g+1}} = \sum_{\mathcal{X}} (\dim_q \mathcal{X})^{\frac{1-g}{2}} \prod_{i=1}^{g+1} \left( \sum_{\mathcal{Y}} S_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} S_{\overline{\emptyset}\mathcal{Y}} \lambda_{\mathcal{Y}}^{n_i} \right) \quad (2.60)$$

В результате вклады параллельных, четных антипараллельных и нечетных антипараллельных кос соответственно  $S_{\overline{X}Y} S_{\overline{\emptyset}Y}$ ,  $S_{\overline{X}Y} S_{\overline{\emptyset}Y}$  and  $S_{X\overline{Y}} S_{\overline{\emptyset}\overline{Y}}$ . В случае  $g = 1$  (торические узлы / звенья) множитель  $\dim_q \mathcal{X}$  отсутствует, и можно просуммировать по  $\mathcal{X}$ , используя условие ортонормированности  $\sum_{\mathcal{X}} S_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} S_{\mathcal{X}\mathcal{Y}'} = \delta_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}'}$ , чтобы получить формулу Россо-Джонса в виде [149]

$$H^{(n_1, n_2)} = \sum_{\mathcal{Y}} S_{\overline{\emptyset}\mathcal{Y}}^2 \lambda_{\mathcal{Y}}^{n_1 + n_2} \quad (2.61)$$

Структура (2.60), включающая сумму с весом, который представляет собой степень  $2 - 2g$  (эйлерова характеристика римановой поверхности рода  $g$ ) величины, зависящей от представления, напоминает формулу Фробениуса [58], типичный для топологических (когомологических) моделей.

5. На более глубоком уровне связь (2.60) с конформным блочным исчислением [139–141; 266; 267] и [149] остается загадкой. Это может быть схематично реализовано с помощью изображения торического конформного блока, см. Рисунок 6. Появление *торических* блоков может показаться естественным для семейства кренделей, но точный вид и сама возможность вывести (2.60) из рассмотрения *сферических* блоков, как это сделано в [149], подразумевает некоторую взаимосвязь в стиле формул Верлинде, которую необходимо изложить в более точной форме.
6. Для общих представлений:  $R_1 \otimes R_2 = \oplus \mathcal{X} \otimes V_{\mathcal{X}}$ . Когда кратности всех  $X$  являются единицами, как в случае произведения двух симметричных

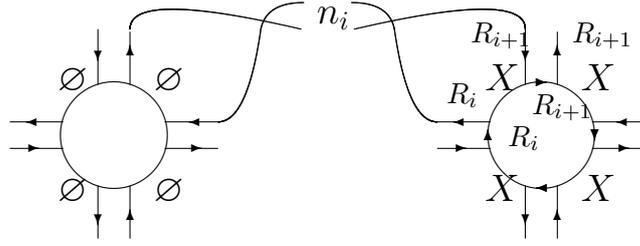


Рисунок 2.6 — Конформное блочное представление формулы (2.60). Здесь нарисован общий случай различных представлений  $R_i$  (в случае ссылки), он соответствует  $\sum_{\bar{X} \in \cap_i R_i \otimes \bar{R}_i} \dim_q \bar{X} \cdot \prod_{i=0}^g \left( \sum_{\bar{Y}_i \in R_i \otimes \bar{R}_{i+1}} \mathcal{A}_{\bar{X}\bar{Y}_i} \begin{pmatrix} \bar{R}_i & R_{i+1} \\ R_i & \bar{R}_{i+1} \end{pmatrix} \cdot \lambda_{\bar{Y}_i}^{n_i} \right)$ , или две другие матрицы  $\mathcal{A}$  в зависимости от направления стрелок на картинке

представлений и / или их сопряженных,  $\dim_q X$  - это просто число, размерность представления  $X$ . В этом случае (2.60) симметричен относительно произвольных перестановок  $n_i$  (если все  $R_i$  одинаковы), т.е. имеется усиленная симметрия. Однако, когда кратность  $X$  нетривиальна, т.е.  $V_X$  является векторным пространством неединичной размерности, тогда матрица  $\mathcal{A}_{X\bar{Y}}$  является вектором в  $V_X$  и  $\dim_q X$  in (2.60) - это, скорее, полилинейная операция  $V_X^{\otimes(g+1)} \rightarrow 1$ , которая не обязательно должна быть полностью симметричной. : нужна только циклическая симметрия. Это согласуется с тем фактом, что нециклическая перестановка  $n_i$  преобразует узел / ссылку в *мутант*, неотличимый симметрично окрашенными многочленами узлов, но разделяемый полиномами в не (анти) симметричных представлениях.

## 2.5 Какие узлы и зацепления принадлежат семейству рода $g$

Пока было всего два *семейств* с явно известными (анти) симметричными полиномами ХОМФЛИ: торические узлы [281; 302] и двойные косы [195]. Это второе семейство, которое мы чрезвычайно расширили в данной работе. Двойные косы: Pretzel :  $(-1, \overline{2k}, n) = (\bar{n}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_{2k})$  и содержат скрученные узлы ( $n = -1$ ), в частности узел в форме восьмерки  $4_1$ , который был первым примером помимо торических узлов, изученных в [116]. Наши формулы, конечно, согласуются с результатами [281; 302] и [195], но [195] и [21] содержат еще:

дифференциальные разложения, которые все еще необходимо изучить в общих чертах. чехол для кренделя.

Ниже мы перечисляем некоторые тесты, которые мы сделали для проверки нашей основной гипотезы (2.20). Также мы заносим в таблицу некоторые узлы и зацепления, которые принадлежат семейству двухнитевых узлов рода  $g$ .

**1.** На некоторых конкретных примерах мы проверили, что наша формула (2.20) воспроизводит многочлены ХОМФЛИ в симметричных представлениях для:

- твистованные узлы [1; 116; 195; 301]:  $T^{(k)} = (\bar{1}, \bar{1}, \overline{2k-1}) = (-1, -1, \overline{2k})$  (напомним что  $T^{(-k)} = (2k+2)_1$  для  $k > 0$ ,  $T^0 =$  не узел,  $T^{(1)} = 3_1$ ,  $T^{(k)} = (2k+1)_2$  для  $k > 1$ );
- торические узлы и зацепления [1; 195]:  $[2, n] = (n, 0) = (1, n-1)$ ,  $[3, 4] = 8_{19} = (3, 3, \overline{-2})$ ,  $[3, 5] = (5, 3, \overline{-2})$ , все другие *не являются* крендельными узлами;
- двойная коса [195]:  $(-1, \overline{2k}, n) = (\bar{n}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_{2k})$ .
- зацепление Уайтхеда [171] (в этом случае разрешены два *разных* представления на двух разных компонентах зацепления):  $L_5 a_1 = (2, \bar{2}, 1)$ .

**2.** Специальные многочлены  $H_R^{\mathcal{K}}(A, q = 1)$  предоставили очень хороший тест благодаря свойству факторизации [302]:

$$\sigma_R(A) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{H_R(q, A)}{\chi_R(q, A)} = \left( \sigma_{[1]}(A) \right)^{|R|} \quad (2.62)$$

**3.** Многочлены Александра  $H_R^{\mathcal{K}}(A = 1, q)$  также имеют простую зависимость представления для диаграмм крюков, которые включают симметричные представления [116]

$$\frac{H_R}{\chi_R}(A = 1, q) = \frac{H_{[1]}}{\chi_{[1]}}(A = 1, q^{|R|}) \quad (2.63)$$

и также предоставили очень хороший тест для наших результатов.

**4.** Еще один мощный инструмент для проверки полиномов ХОМФЛИ в любом представлении, который мы использовали здесь, - это разложение с помощью

инвариантов Васильева и трехвалентных диаграмм. Мы не будем здесь объяснять это разложение и отсылаем наших читателей к литературе [68; 159; 162]. Инварианты Васильева для первых 6 порядках включительно для всех претельных узлов посчитаны в работе [294].

### 5. Табулирование: Rolfsen и Thislethwaite против кренделей [28].

Понимание того, принадлежит ли данный узел/зацепление к семейству кренделей, - не совсем тривиальное занятие. Однако, поскольку теперь у нас есть общее выражение для симметричной ХОМФЛИ кренделя, это можно делать систематически, сравнивая наши результаты с многочленами в [28] (обратите внимание, что есть только одно совпадение между фундаментальными ХОМФЛИ для до десяти-узлы пересечения - за  $5_1$  и  $10_{132}$ ). Результатом этого анализа является следующий список. Мы используем сокращенные обозначения типа  $1^5 \equiv 1,1,1,1,1$ , а также не делаем различия между узлами и их зеркалами, когда знаки на всех перекрестках меняются местами. Символ « $\leftrightarrow$ » означает мутацию узла.

**Узлы, #пересечений = 3 ... 8**

<b>3<sub>1</sub></b>	(3,0)	<b>7<sub>1</sub></b>	(7, 0)	<b>8<sub>1</sub></b>	(1, $\bar{6}$ , 1)	<b>8<sub>8</sub></b>	(2, -3, 1, 1, 1, 1)	<b>8<sub>15</sub></b>	(2,3,3, -1, -1, -1)
<b>4<sub>1</sub></b>	(1, $\bar{2}$ , 1)	<b>7<sub>2</sub></b>	( $\bar{5}$ , $\bar{1}$ , $\bar{1}$ )	<b>8<sub>2</sub></b>	(5, $\bar{2}$ , 1)	<b>8<sub>9</sub></b>	(4, -3, -1, -1)	<b>8<sub>16</sub></b>	
<b>5<sub>1</sub></b>	(5,0)	<b>7<sub>3</sub></b>	(4,1,1,1)	<b>8<sub>3</sub></b>	(1,1, $\bar{4}$ , 1, 1)	<b>8<sub>10</sub></b>	(2, -3, 1, 3)	<b>8<sub>17</sub></b>	
<b>5<sub>2</sub></b>	( $\bar{3}$ , $\bar{1}$ , $\bar{1}$ )	<b>7<sub>4</sub></b>	( $\bar{3}$ , $\bar{3}$ , $\bar{1}$ )	<b>8<sub>4</sub></b>	(3, $\bar{4}$ , 1)	<b>8<sub>11</sub></b>	(- $\bar{3}$ , $\bar{1}$ , $\bar{1}$ , $\bar{3}$ , $\bar{1}$ )	<b>8<sub>18</sub></b>	
<b>6<sub>1</sub></b>	( $\bar{5}$ , - $\bar{1}$ , - $\bar{1}$ )	<b>7<sub>5</sub></b>	(3,2,1,1)	<b>8<sub>5</sub></b>	(3, $\bar{2}$ , 3)	<b>8<sub>12</sub></b>		<b>8<sub>19</sub></b>	(3, - $\bar{2}$ , 3)
<b>6<sub>2</sub></b>	(3, $\bar{2}$ , 1)	<b>7<sub>6</sub></b>	(-3, 1, $\bar{2}$ , 1, 1)	<b>8<sub>6</sub></b>	(1, 3, $\bar{2}$ , 1, 1)	<b>8<sub>13</sub></b>	(- $\bar{4}$ , -3, 1, 1, 1)	<b>8<sub>20</sub></b>	(3, $\bar{2}$ , -3)
<b>6<sub>3</sub></b>	(2, -3, 1, 1)	<b>7<sub>7</sub></b>	(- $\bar{3}$ , $\bar{1}$ , - $\bar{3}$ , $\bar{1}$ , $\bar{1}$ )	<b>8<sub>7</sub></b>	(4, -3, 1, 1)	<b>8<sub>14</sub></b>		<b>8<sub>21</sub></b>	(2, -3, 1, -3)
<b>Links</b>									
<b>L<sub>2a1</sub></b>	(2,0)	<b>L<sub>6a1</sub></b>	(2,1,1,2)	<b>L<sub>6a4</sub></b>	?				
<b>L<sub>4a1</sub></b>	(4,0)	<b>L<sub>6a2</sub></b>	(3,1,1,1)	<b>L<sub>6a5</sub></b>	(2, $\bar{2}$ , 2)				
<b>L<sub>5a1</sub></b>	(2, $\bar{2}$ , 1)	<b>L<sub>6a3</sub></b>	(6,0)	<b>L<sub>6n1</sub></b>	(-2, - $\bar{2}$ , 2)				

Узлы, #пересечений = 9

$\mathfrak{9}_1$	$(9,0)$	$\mathfrak{9}_{11}$	$(-5, -2, 1^4)$	$\mathfrak{9}_{21}$		$\mathfrak{9}_{31}$		$\mathfrak{9}_{41}$	
$\mathfrak{9}_2$	$(\bar{1}, \bar{7}, \bar{1})$	$\mathfrak{9}_{12}$	$(-3, 1, 1, 1, \bar{4})$	$\mathfrak{9}_{22}$		$\mathfrak{9}_{32}$		$\mathfrak{9}_{42}$	
$\mathfrak{9}_3$	$(6, 1, 1, 1)$	$\mathfrak{9}_{13}$	$(1, 3, 1, 1, -\bar{4})$	$\mathfrak{9}_{23}$		$\mathfrak{9}_{33}$		$\mathfrak{9}_{43}$	
$\mathfrak{9}_4$	$(4, 1^5)$	$\mathfrak{9}_{14}$	$(-\bar{5}, -\bar{3}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$	$\mathfrak{9}_{24}$	$(-2, -3, 3, 1^3)$	$\mathfrak{9}_{34}$		$\mathfrak{9}_{44}$	
$\mathfrak{9}_5$	$(-\bar{1}, -\bar{3}, -\bar{5})$	$\mathfrak{9}_{15}$		$\mathfrak{9}_{25}$		$\mathfrak{9}_{35}$	$(\bar{3}, \bar{3}, \bar{3})$	$\mathfrak{9}_{45}$	
$\mathfrak{9}_6$	$(2, 1, 5, 1)$	$\mathfrak{9}_{16}$	$(\bar{2}, 1, 3, 3)$	$\mathfrak{9}_{26}$		$\mathfrak{9}_{36}$		$\mathfrak{9}_{46}$	$(\bar{3}, -\bar{3}, \bar{3})$
$\mathfrak{9}_7$	$(2, 3, 1^4)$	$\mathfrak{9}_{17}$	$(\bar{3}, \bar{3}, -\bar{1}^5)$	$\mathfrak{9}_{27}$		$\mathfrak{9}_{37}$	$(-\bar{3}, -\bar{3}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{1})$	$\mathfrak{9}_{47}$	
$\mathfrak{9}_8$	$(-2, -3, 1^6)$	$\mathfrak{9}_{18}$		$\mathfrak{9}_{28}$	$(2, -3, -3, 1^3)$	$\mathfrak{9}_{38}$		$\mathfrak{9}_{48}$	$(-\bar{3}, -\bar{3}, -\bar{3}, \bar{1}, \bar{1})$
$\mathfrak{9}_9$	$(-4, 1, -5, 1)$	$\mathfrak{9}_{19}$		$\mathfrak{9}_{29}$		$\mathfrak{9}_{39}$		$\mathfrak{9}_{49}$	
$\mathfrak{9}_{10}$	$(\bar{3}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$	$\mathfrak{9}_{20}$	$(4, 3, -1^4)$	$\mathfrak{9}_{30}$		$\mathfrak{9}_{40}$			

**Узлы, #пересечений = 10**

<b>10<sub>1</sub></b>	$(\bar{1}, \bar{7}, -\bar{3})$	<b>10<sub>16</sub></b>	$(\bar{3}, \bar{1}, -\bar{5}, \bar{1}, \bar{1})$	<b>10<sub>61</sub></b>	$(3, 3, \bar{4})$	<b>10<sub>126</sub></b>	$(\bar{2}, -5, 3) \vee (-2, 3, -5, 1)$
<b>10<sub>2</sub></b>	$(2, -7, -1, -1)$	<b>10<sub>17</sub></b>	$(4, -5, 1, 1)$	<b>10<sub>62</sub></b>	$(4, -3, 1, 3)$	<b>10<sub>127</sub></b>	$(\bar{2}, 5, 3) \vee (2, -5, -3, 1)$
<b>10<sub>3</sub></b>	$(\bar{1}, \bar{5}, -\bar{5})$	<b>10<sub>19</sub></b>	$(\bar{4}, 5, -1, -1, -1)$	<b>10<sub>63</sub></b>	$(\bar{4}, -3, -3, 1, 1)$	<b>10<sub>129</sub></b>	$(2, 1, 1, -3, 1, 1)$
<b>10<sub>4</sub></b>	$(-\bar{7}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$	<b>10<sub>20</sub></b>	$(-2, 1, 3, 1^5)$	<b>10<sub>64</sub></b>	$(-4, 3, 3, 1)$	<b>10<sub>139</sub></b>	$(4, -1, 3, 3)$
<b>10<sub>5</sub></b>	$(-2, 7, -1, -1)$	<b>10<sub>21</sub></b>	$(-\bar{3}, \bar{3}, \bar{1}^5)$	<b>10<sub>65</sub></b>	$(\bar{4}, 3, -3, -1, -1)$	<b>10<sub>140</sub></b>	$(-3, 3, \bar{4})$
<b>10<sub>6</sub></b>	$(-\bar{2}, -5, -1^3)$	<b>10<sub>22</sub></b>	$(-4, 1, 1, 3, 1, 1)$	<b>10<sub>69</sub></b>	$(4, 3, 3, -1, -1, -1)$	<b>10<sub>141</sub></b>	$(4, -3, -3, 1)$
<b>10<sub>7</sub></b>	$(-\bar{3}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{1}, \bar{1})$	<b>10<sub>28</sub></b>	$(\bar{4}, 3, -1^5)$	<b>10<sub>74</sub></b>	$(-\bar{3}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{3}, \bar{1})$	<b>10<sub>142</sub></b>	$(3, 3, -\bar{4})$
<b>10<sub>8</sub></b>	$(-6, 1^5)$	<b>10<sub>34</sub></b>	$(2, -3, 1^6)$	<b>10<sub>76</sub></b>	$(1, 3, 3, 1, \bar{2})$	<b>10<sub>143</sub></b>	$(-4, 3, 1, -3)$
<b>10<sub>9</sub></b>	$(6, -3, -1, -1)$	<b>10<sub>46</sub></b>	$(-2, 3, 5, 1)$	<b>10<sub>77</sub></b>	$(2, -3, 1, 3, 1, 1)$	<b>10<sub>144</sub></b>	$(\bar{4}, 3, 3, -1, -1)$
<b>10<sub>11</sub></b>	$(3, 1, 1, 1, \bar{4})$	<b>10<sub>47</sub></b>	$(2, -3, 5, 1)$	<b>10<sub>78</sub></b>	$(\bar{2}, -3, -3, 1, 1, 1, 1)$		
<b>10<sub>12</sub></b>	$(4, -3, 1, 1, 1, 1)$	<b>10<sub>48</sub></b>	$(2, -5, 1, 3)$	<b>10<sub>124</sub></b>	$(\bar{2}, -5, -3) \vee (2, -1, 5, 3)$		
<b>10<sub>15</sub></b>	$(-2, -1, 5, -1^3)$	<b>10<sub>49</sub></b>	$(\bar{2}, -5, -3, 1, 1)$	<b>10<sub>125</sub></b>	$(\bar{2}, 5, -3) \vee (2, -5, -1, 3)$		

Мутанты, #пересечений = 11				
$11_{44}^a$	$(-3, 3, 2, 1, 1, -3)$	$\leftrightarrow$	$11_{47}^a$	$(3, -3, 2, 1, 1, -3)$
$11_{57}^a$	$(\bar{2}, 1, 3, 3, -3)$	$\leftrightarrow$	$11_{231}^a$	$(\bar{2}, 1, 3, -3, 3)$
$11_{71}^n$	$(\bar{2}, -3, 3, -3, 1)$	$\leftrightarrow$	$11_{75}^n$	$(\bar{2}, 3, -3, -3, 1)$
$11_{73}^n$	$(2, 3, -3, -3)$	$\leftrightarrow$	$11_{74}^n$	$(2, -3, 3, -3)$
$11_{76}^n$	$(2, 3, 3, -3)$	$\leftrightarrow$	$11_{78}^n$	$(2, 3, -3, 3)$

## Глава 3. Пертурбативный анализ, инварианты Васильева и связь с интегрируемыми иерархиями

### 3.1 Введение

Вильсоновские петли являются важными наблюдаемыми в квантовых калибровочных теориях, например, из-за их возможной роли в четырехмерном конфайнменте [249]. В трехмерных топологических теориях, таких как теория Черна-Саймонса, есть возможность тщательно изучить свойства вильсоновских петель. В этом случае они задают инварианты узлов. Среди важных свойств наблюдаемых в КТП – соотношения, которым они удовлетворяют. Одними из наиболее изученных являются тождества Уорда, которые отражают независимость интеграла по путям от замены переменных интегрирования. В данном разделе мы фокусируемся на теоретико-представленческих свойствах вильсоновских петель. Так как теория Черна-Саймонса является топологической, то для заданного узла наблюдаемая зависит нетривиальным образом только от представления. Нашей глобальной задачей является полноценное описание теоретико-групповой зависимости в пертурбативном разложении вильсоновских петель, поиск теоретико-представленческих свойств, которые зафиксируют возможные структуры, возникающие в коэффициентах пертурбативного разложения. На деле такой вопрос не уникален для теории Черна-Саймонса, анализ теоретико-групповых структур важен для любой неабелевой теории [314], например, в недавней статье велась похожая дискуссия на тему Вильсоновских петель в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга-Миллса [74]. Выбор конкретной теории Черна-Саймонса обусловлен ее топологической природой, которая делает ее изучение проще и устанавливает связь с различными задачами теории узлов. Кроме того, мы можем использовать результаты из теории квантовых инвариантов узлов, для которых разработано множество методов точных вычислений.

Тот факт, что инварианты узлов, такие как полиномы ХОМФЛИ, являются *точно* вычислимыми позволяет искать интегрируемость среди их свойств. Очевидную связь с квантовыми интегрируемыми системами задает форму-

лировка инвариантов узлов через  $R$ -матрицу/косу. Она связывает инварианты узлов с моделями статистической физики и вершинными моделями. Мы обсуждаем дополнительную идею классической КП интегрируемости, которая была отмечена в наших работах [50; 204]. Примечательно, что возникновение иерархии КП также связано со специальной зависимостью от представления. Так как интегрируемая иерархия КП тесно связана с теорией представлений алгебры  $gl(\infty)$ , наше исследование позволяет нам надеяться получить полноценный ответ для Вильсоновской петли в терминах интегрируемости.

Интегрируемая иерархия Кадомцева-Петвиашвили (КП иерархия) нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных возникла из уравнения Кадомцева-Петвиашвили, которое, в свою очередь, обобщает уравнение Кортевега-де Фриза на 2 пространственных измерения. Изначально данное уравнение описывало нелинейные волны (солитоны) в различных средах, например, на воде или в ферромагнитной среде. Однако, за последние 30 лет было обнаружено, что многие статсуммы в теоретической физике также удовлетворяют этой иерархии. Среди наиболее известных примеров матричная модель Концевича [158; 312], описывающая двумерную топологическую гравитацию и совпадающая со статсуммой физической двумерной квантовой гравитации, согласно гипотезе Виттена [324]; матричная модель Брезана-Гросса-Виттена, задающая статсумму решеточной КХД с Вильсоновским действием [39; 100]; статсумма двумерной теории Янга-Миллса с калибровочной группой  $U(N)$  [285]; эрмитова матричная модель, дуальная гравитации Джакива-Тейтельбома в определенном режиме [286], которая описывает двумерную дилатонную гравитацию; конформные блоки двумерной конформной теории поля Лиувилля и инстантонные статсуммы Некрасова в силу АГТ соответствия [191].

Еще одной давней задачей в теории узлов является описание так называемых инвариантов Васильева [46] (или инварианты конечного типа). Это рациональные инварианты, градуированные натуральным числом – порядком, которые, как считается, описывают полный набор инвариантов узла. Известно, что они поддаются комбинаторному описанию в терминах хордовых диаграмм, и на этот счет доказано множество теорем. Однако, гораздо хуже известны их конкретные значения. Более того, неизвестно даже число независимых инвариантов на заданном уровне. В математической литературе известно множество

асимптотических ограничений. Физически, они возникают при пертурбативном разложении Вильсоновских петель, описывая их конкретное вложение (с точностью до накрывающей изотопии) в данное трехмерное многообразие, и задаются невычислимыми интегралами [15; 68; 162]. Единственный практический способ нахождения инвариантов Васильева состоит в использовании точных результатов для полиномов ХОМФЛИ через вычисления при помощи  $R$ -матрицы. На этом пути возникают две проблемы. Первая, более очевидная, состоит в сложности вычислений полиномов ХОМФЛИ для старших представлений. Однако, даже имея ответ для заданного представления, необходимо знать независимые теоретико-групповые структуры структуры для того, чтобы различать независимые инварианты Васильева.

**Инварианты узлов** Как было сказано выше, полиномы ХОМФЛИ являются средними от Вильсоновских петель для конкретной теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU(N)$ , задающиеся узлом и представлением  $R$ :

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \left\langle \text{tr}_R P \exp \left( \oint A_{\mu}^a(x) T^a dx^{\mu} \right) \right\rangle \quad (3.1)$$

Это полином от двух переменных:

$$q = e^{\hbar}, \quad a = e^{N\hbar}, \quad \hbar := \frac{2\pi i}{\kappa + N}.$$

где  $\kappa$  – уровень Черна-Саймонса. Пертурбативное разложение восстанавливается, используя данную параметризацию, разложением по  $\hbar$ . Можно рассматривать два естественных предела:

$$q \text{ фикс.}, \quad A = 1 \quad \text{или} \quad q = 1, \quad A \text{ фикс.} \quad (3.2)$$

Второй предел соответствует планарному пределу 'т Хоофта  $\hbar \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ , так что  $N\hbar = \text{const}$  и воспроизводит так называемые специальные полиномы  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(1, a) = \sigma_R^{\mathcal{K}}(a)$ . Их зависимость от представления  $R$  имеет простой вид [116; 200; 302; 328]:

$$\sigma_R^{\mathcal{K}}(a) = \left( \sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}(a) \right)^{|R|}. \quad (3.3)$$

В дальнейшем мы отождествляем представление  $R$  с соответствующей диаграммой Юнга:  $R = \{R_i\}$ ,  $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_{l(R)}$ ,  $|R| := \sum_i R_i$ . Данный предел наделен КП интегрируемостью [194], а именно, можно построить тау-функцию.

Действительно, рассмотрим статсумму Оогури-Вафы [200], описывающую разложение теории Черна-Саймонса вокруг тривиальной плоской связности:

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|a,q) = \sum_R \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(a,q) D_R \chi_R\{\bar{p}\}. \quad (3.4)$$

В данной формуле  $\chi_R\{p\}$  – полином Шура в представлении  $R$ ,  $D_R = \chi_R\{p^*\}$ , где  $p_k^* = \frac{a^k - a^{-k}}{q^k - q^{-k}}$  является квантовой разморностью. Если положить  $q = 1$  в данной формуле, то полином ХОМФЛИ превращается в специальный полином. Оказывается [200], что коэффициенты перед полиномами Шура в формуле (3.4) удовлетворяют билинейным соотношениям Плюккера *в частности, из-за их особой зависимости от представления (3.3)*.

В данном разделе мы фокусируем внимание на первом пределе полиномов ХОМФЛИ, который дает так называемый полином Александера:

$$H_R^{\mathcal{K}}(q,1) = \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) \quad (3.5)$$

Как было замечено в [50], этот предел можно называть дуальным к пределу 'т Хоофта, так как он требует  $N \rightarrow 0$  и обладает свойством "дуальности" [116; 187]<sup>1</sup>:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}) , \quad \text{for } R = [r, 1^L]. \quad (3.6)$$

Важным отличием, в частности, является тот факт, что свойство (3.3) выполняется для всех представлений, в то время как (3.6) выполняется только для однокрюковых диаграмм Юнга. На языке квантовой теории поля это соотношения между Вильсоновскими петлями в различных представлениях (пусть и в специальном пределе), упомянутых выше. Целью данной работы является объяснение важности данных соотношений, ограничений, которые они накладывают на структуру коэффициентов в петлевом разложении, и их связи с КП интегрируемостью. В нашей предыдущей работе [50] мы обнаружили "феноменологическое" соответствие между данными коэффициентами и уравнениями иерархии КП.

Мы изучаем структуру петлевого разложения полиномов ХОМФЛИ. В математической литературе это называется "интеграл Концевича" [15; 45], который

<sup>1</sup>Отметим, что наше определение цветного полинома Александера существенно отличается от аналогичного в [6; 220].

схематически может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \sum_n \left( \sum_j v_{n,j}^{\mathcal{K}} r_{n,j}^R \right) \hbar^n. \quad (3.7)$$

Отличительной чертой является то, что зависимость от узла и от представления явно разделяется. Группа представлена так называемыми групповыми факторами  $r_{n,j}^R$ . Они возникают в интеграле по путям как следы от генераторов  $SU(N)$

$$r_{n,j}^R \sim \text{tr}_R(T^{a_1} \dots T^{a_n}). \quad (3.8)$$

Зависимость от узла входит через инварианты Васильева  $v_{n,j}^{\mathcal{K}}$ , которые являются рациональными инвариантами узла [15; 46].

Групповые факторы  $r_{n,j}^R$  широко изучаются в терминах алгебр диаграмм Якоби или хордовых диаграмм со специальными весами. Физически [15], данные диаграммы являются диаграммами Фейнмана, возникающими в пертурбативном разложении Вильсоновской петли. Подробное обсуждение можно найти в [46] (см. разделы 5,6). Диаграммы Якоби и хордовые диаграммы являются алгебрами относительно тензорного произведения, удовлетворяющими некоторым соотношениям. Чтобы построить инварианты узла, необходимо сопоставить весовую систему алгебры Ли произвольной диаграмме Якоби так, как показано на следующем примере:

$$D_2 = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \oplus \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}, \quad \varphi_{\mathfrak{g}}(D_2) = \sum_{a,b,c=1}^{\dim \mathfrak{g}} T^a T^b T^c T^{a*} T^{b*} T^{c*}$$

$$D_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}, \quad \varphi_{\mathfrak{g}}(D_1) = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} T^a T^{a*};$$

где  $T^a$  являются генераторами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Данная конструкция естественным образом обобщается на тривалентные диаграммы, которые также известны как диаграммы Якоби. Теорема 6.1.2 из [46] задает гомоморфизм  $\varphi$  в центр универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ . Групповые факторы строятся похожим образом для произвольного представления при помощи гомоморфизма  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  и взятия следа. Так как они являются элементами центра  $ZU(\mathfrak{g})$ , они могут быть разложены по базису инвариантов Казимира алгебры [15]. Очевидно, то же выполняется и для групповых факторов полинома Александра. Для хордовой

диаграммы  $D$ :

$$r_D^R = \sum_{\Delta} \alpha_{\Delta, D} C_{\Delta}(R) \quad (3.9)$$

Отметим, что точная размерность алгебры хордовых диаграмм для произвольного  $n$  неизвестна, так как соотношения в алгебре становятся слишком сложными. Явный базис известен до 9-го уровня, получен методами линейной алгебры в [26], в то время как точная размерность известна до 12-го уровня [148]. Таким образом, для того, чтобы посчитать, например, 10-й уровень, необходимо сперва найти базис на этом уровне (размерность алгебры на этом уровне равна 27). После этого, для каждой диаграммы необходимо посчитать соответствующую ей весовую функцию для произвольного ранга  $N$  и произвольного конечномерного представления, соответствующего диаграмме Юнга  $R$ . Эта процедура выглядит выполнимой, но достаточно трудоемкой и утомительной. Однако, таким способом все еще невозможно продвинуться выше 12-го уровня. В данном разделе мы предлагаем совершенно другой подход к вычислению весовых систем  $sl_N$ , основанный на симметриях Вильсоновских средних. Вместо громадной алгебры хордовых диаграмм со сложными соотношениями мы строим банальное кольцо многочленов, которые будут занумерованы простыми комбинаторными величинами (конкретным подмножеством диаграмм Юнга) и представляем явные формулы для их вычисления.

### 3.2 Основные результаты

Прежде чем переходить к деталям, мы сделаем основные утверждения и обсудим результаты. Подробности представлены в последующих разделах.

Рассмотрим зависимость полинома Александера от представления (3.6) как (одно из) его определяющих свойств. Что тогда можно сказать о групповых факторах  $r_{n,j}^R$ ? Данное определяющее свойство задаёт систему нетривиальных уравнений, которым должны удовлетворять групповые факторы. Нашими результатами являются два свойства решений этих уравнений.

**Описание групповых факторов.** Получить групповые факторы прямым вычислением достаточно сложно. Например, в [15] они приведены до 6-го порядка для фундаментального представления  $SU(N)$  и для представлений  $SU(2)$  с произвольным спином. Однако, вычисление групповых факторов необходимо, так как хотя бы их перечисление задаст перечисление независимых инвариантов Васильева. Как обсуждалось выше, в наблюдаемых Вильсоновских петлях нет динамических данных — только топологические и теоретико-групповые. Таким образом, перечисление всех групповых факторов для произвольной группы Ли сведёт задачу об инвариантах узла к инвариантам Васильева, которые являются чисто топологическими данными.

Первым результатом раздела является шаг в данном направлении, а именно, мы доказываем, что **независимые решения (3.6) генерируются полиномами, занумерованными двукрюковыми диаграммами Юнга с двумя строками  $\mathcal{Y}_2$ :**

$$X_{[y_1, y_2]}(R) = \frac{1}{y_1 y_2} C_{y_1}(R) C_{y_2}(R) + \dots, \quad y_1 \geq y_2 \geq 2, \quad [y_1, y_2] \in \mathcal{Y}_2 \quad (3.10)$$

где  $C_k$  являются Казимирами  $SU(N)$  (см. ниже). У нас нет замкнутой формулы для данных решений, однако, они строятся преобразованием явного базиса и, в частности, содержат член, выделенный в (3.10). **Базис  $X_\lambda$  векторного пространства решений занумерован диаграммами Юнга, содержащими более одного крюка -  $\mathcal{Y}$ .** То, каким образом базис  $X_\lambda$  строится из  $X_{[y_1, y_2]}$ , следует из основной теоремы раздела.

Как результат, запишем следующую производящую функцию:

$$\mathcal{X}(\hbar) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} X_\lambda v_\lambda(\hbar) \quad (3.11)$$

где  $v_\lambda(\hbar)$  являются производящими функциями целых чисел  $v_{\lambda, n}$ . Теперь приведём два ключевых утверждения:

- Экспериментально можно увидеть, что набор независимых групповых факторов полиномов Александера «меньше», чем описанное множество диаграмм Юнга:

$$\text{span} \langle r_{n, j}^R \rangle \subsetneq \text{span} \langle X_\lambda(R) \rangle \quad (3.12)$$

Чтобы восстановить полином Александера для заданного узла из (3.11), необходимо выбрать специальную точку для  $v_{\lambda, n}$ , где некоторые из них

зануляются или независимы:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q = e^{\hbar}) = \mathcal{X}(\hbar)|_{v_{\lambda,n}=v_{\lambda,n}^{\mathcal{K}}} \quad (3.13)$$

Это также означает, что другие, ранее неизвестные, симметрии существуют для полиномов Александера (и даже добавление двойственности ранг-уровень, обсуждаемой ниже, недостаточно). Мы оставляем вопрос нахождения этих симметрий для дальнейшей работы.

- Важным свойством является то, что громоздкую задачу явного вычисления групповых факторов через следы от генераторов удаётся свести к простой комбинаторике. В терминах хордовых диаграмм/диаграмм Фейнмана мы можем переписать (3.11) как:

$$\mathcal{X} = \sum_{D \in \mathcal{D}} X_D v_D(\hbar) \quad (3.14)$$

где теперь  $\mathcal{D}$  обозначают независимые хордовые диаграммы. Алгебра хордовых диграмм достаточно сложна именно из-за нетривиальных соотношений. Фактически, неизвестна даже размерность (количество независимых групповых факторов) этой алгебры, существуют только некоторые асимптотические ограничения.

Наш результат означает, что существует явное решение для независимых групповых факторов, выраженных простым образом через диаграммы Юнга с более чем одним крюком. Кроме того, как было сказано выше, данное множество даже проще, так как оно сгенерировано мультипликативным образом из (3.10).

**Интегрируемость.** Что интересно, мы получили упомянутые результаты, изучая связь между решениями  $X_{\lambda}$  и уравнениями иерархии КП, которую мы обнаружили в [50]. Схожесть между полиномами от собственных значений Казимира и операторами Хироты недостаточна, так как операторы Хироты не образуют замкнутую алгебру относительно умножения. При дальнейшем изучении мы обнаружили, что связь точным образом формулируется через солитонные тау-функции. Здесь мы приводим доказательство того, что **независимые решения уравнений (3.6) в каждом порядке по  $\hbar^n$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с дисперсионными соотношениями односолитонной тау-функции иерархии КП.**

Это явные соотношения на конкретную тау-функцию. Они описываются следующим равенством:

$$\text{KP}(z_i)\tau_{\text{soliton}} \cdot \tau_{\text{soliton}} = \mathcal{X}(\hbar) \tau_{\text{soliton}} \quad (3.15)$$

где через  $\text{KP}(z_i)$  обозначена производящая функция *всех* уравнений КП, и где уравнения Хироты возникают как коэффициенты разложения по  $z_i$  (см. (3.73) ниже), и  $\tau_{\text{soliton}}$  — солитонная тау-функция. Отождествление будет объяснено ниже, пока мы лишь уточним, что солитонные импульсы отождествлены с собственными значениями Казимиров:

$$k_i = C_i(R) \quad (3.16)$$

при решении дисперсионных соотношений, соответствующих однокрюковым представлениям  $R = [r, 1^L]$ .

Фактически, для того, чтобы установить соответствие с полиномом Александера, необходимо учитывать ограничение (3.13). В терминах иерархии КП оно должно быть выражено, как некоторые ограничения или модификации солитонной тау-функции. В любом случае, так как (3.11) возникает как решение уравнений на конкретные свойства предела  $N = 0$  Вильсоновской петли, мы хотим сказать, что по построению (3.15) мы явно показываем возникновение КП интегрируемости Вильсоновских петель в теории Черна-Саймонса.

### 3.3 Полином Александера

Пусть  $K$  — узел в  $S^3$  и  $X_\infty$  — бесконечное циклическое накрытие дополнения к узлу. Группа гомологий  $H_1(X_\infty)$  является модулем над  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , который называется модулем Александера. Полином Александера  $\mathcal{A}^K(q)$  обычно определяется как генератор определенного идеала в этом модуле [255]. Обратите внимание, что полином Александера получается в специальной точке фундаментального полинома ХОМФЛИ:

$$\mathcal{A}^K(q) = \mathcal{H}^K(q, 1). \quad (3.17)$$

Полиномы ХОМФЛИ могут быть определены для старших представлений калибровочной группы, следовательно, это задаёт следующее обобщение:

**Определение 1.** Цветной полином Александера определяется как значение полинома ХОМФЛИ в специальной точке:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q,1) \quad \text{or} \quad \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(e^{\hbar}) = \lim_{N \rightarrow 0} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(e^{\hbar}, e^{N\hbar}). \quad (3.18)$$

Представления  $SU(N)$  занумерованы диаграммами Юнга. Мы отождествляем представление  $R$  с соответствующей ему диаграммой  $[R_1, R_2, \dots]$ .

**Определение 2.** Однокрюковой диаграммой называется диаграмма вида:

$$R = [r, \underbrace{1, \dots, 1}_L] \quad (3.19)$$

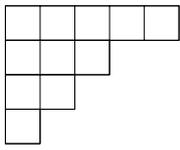
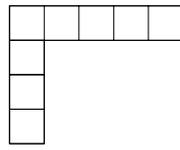


диаграмма  $[5,3,2,1]$ ,



Однокрюковая диаграмма  $[5,1,1,1]$

**Гипотеза 1.** Для произвольного узла  $\mathcal{K}$  и для произвольной однокрюковой диаграммы  $R = [r, 1^L]$ :

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}), \quad (3.20)$$

где  $|R| = r + L$  и  $[1]$  обозначает фундаментальное представление.

Данная гипотеза доказана для торических узлов в [328]. Она также подтверждается явными вычислениями полиномов ХОМФЛИ, раскрашенных представлениями  $[2,1]$  и  $[3,1]$  для трех-нитевых узлов [49; 117], и раскрашенных представлением  $[2,1]$  арборесцентных узлов [102]. Стоит упомянуть, что данная гипотеза является следствием гипотезы о собственных значениях, которая существенно упрощает полиномы Александера, раскрашенные однокрюковыми диаграммами. Основанная на этой идее схема доказательства (3.20) представлена в [187].

Другим важным свойством является симметрия полиномов ХОМФЛИ (и, в частности, полиномов Александера) относительно транспонирования диаграммы Юнга представления. Данное свойство выполняется для произвольных диаграмм  $R$  и приходит из соответствующего свойства квантовых групп И ВЗВ теорий, в случае последних, оно называется дуальностью ранг-уровень (см. (1.60)):

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q,a) = \mathcal{H}_{R^T}^{\mathcal{K}}(q^{-1},a). \quad (3.21)$$

Данное свойство немедленно наследуется полиномами Александера,

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{A}_{R^T}^{\mathcal{K}}(q^{-1}). \quad (3.22)$$

### 3.4 Уравнения Александера

#### 3.4.1 Уравнения

Как было сказано, полином ХОМФЛИ можно представить как разложение в ряд по формальной переменной  $\hbar$ :

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \sum_n \left( \sum_j v_{n,j}^{\mathcal{K}} r_{n,j}^R \right) \hbar^n. \quad (3.23)$$

В соответствии с определением (3.18) полином Александера является значением последнего в специальной точке, следовательно, он наследует структуру разложения. Подставим (3.23) в (3.78), положим  $N = 0$  и обозначим получившиеся групповые факторы через  $A_{i,j}^R$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) - \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}) &= \sum_n \hbar^n \sum_m v_{n,m}^{\mathcal{K}} \left( r_{n,m}^R - |R| \cdot r_{n,m}^{[1]} \right) \Big|_{N=0} =: \\ &=: \sum_n \hbar^n \sum_m v_{n,m}^{\mathcal{K}} A_{n,m}^R \stackrel{R=[r,1^L]}{=} 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Так как  $\hbar$  является формальной переменной, и данное равенство должно выполняться для всех  $\hbar$ , мы видим, что:

$$\boxed{A_{n,m}^{[r,1^L]} = 0.} \quad (3.25)$$

Как было описано выше, групповые факторы раскладываются по собственным значениям Казимиров алгебры Ли.

$$A_{n,m}^R = \sum_{|\Delta| \leq n} \alpha_{\Delta,m} C_{\Delta}(R), \quad (3.26)$$

где мы обозначили мономы по  $C_k$  от диаграмм Юнга в соответствии с

$$C_{\Delta} = \prod_{i=1}^{l(\Delta)} C_{\Delta_i}. \quad (3.27)$$

Тогда,  $A_{n,m}^R$  можно рассматривать как функцию только от инвариантов Казимира, вся зависимость от представления входит через последние:

$$A_{n,m}^R = A_{n,m}(C) \quad (3.28)$$

Заметим, что можно переразложить разность

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) - \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}) &= \sum_n \hbar^n \sum_{|\Delta| \leq n} C_{\Delta}(R) \sum_m v_{n,m}^{\mathcal{K}} \alpha_{\Delta,m} = \\ &= \sum_n \hbar^n \sum_{|\Delta| \leq n} \alpha_{\Delta}^{\mathcal{K}} C_{\Delta}(R), \text{ where} \\ \alpha_{\Delta}^{\mathcal{K}} &:= \sum_m v_{n,m}^{\mathcal{K}} \alpha_{\Delta,m} = (v_n^{\mathcal{K}}, \alpha_{\Delta}) \end{aligned}$$

По инвариантам Казимира вместо групповых факторов.

Равенство (3.25) выражает свойство групповых факторов полинома Александра. Будем искать произвольный полином от операторов Казимира, удовлетворяющий данному свойству.

**Определение 3.** Система уравнений Александра – система линейных уравнений на коэффициенты  $\xi_{\Delta}^{(m)}$  заданная через

$$\boxed{X_{n,m}(C) := \sum_{|\Delta|=n} \xi_{\Delta}^{(m)} C_{\Delta}(R) = 0} \quad (3.29)$$

для произвольного  $n$  и произвольной однокрюковой диаграммы с  $|R| = n$ .

Очевидно, что групповые факторы  $A_{m,n}$  полинома Александра являются линейной комбинацией базисных решений этих уравнений:

$$A_{n,m}(C) \in \text{Span} \left( \bigoplus_{k \leq n} X_{k,m}(C) \right) \quad (3.30)$$

Следовательно, мы рассматриваем (3.29) как уравнения, определяющие общую структуру полинома. Обозначим через  $\mathcal{A}_n$  векторное пространство решений уравнений Александра (3.29) на уровне  $n$ , где под решением мы понимаем полином по инвариантам Казимира, удовлетворяющий (3.29). Назовём решение четным, если это четный полином по  $C_k(R)$ , и нечетным иначе. Пространство всех решений — следующее градуированное пространство:

$$\mathcal{A}l = \bigoplus_n \mathcal{A}l_n \quad (3.31)$$

Обсуждаемые выше тривалентные графы позволяют сформулировать задачу в других терминах. Мы изучаем диаграммы Якоби, взвешенные с весовой системой  $\mathfrak{sl}_N$ , в которой  $N$  положен равным нулю. Следовательно, уравнения Александра описывают идеал в алгебре диаграмм Якоби с весами, зануляющимися на однокрюковых представлениях  $\mathfrak{sl}_N$ . Оставим более детальный анализ этой стороны задачи для дальнейшего исследования.

### 3.4.2 Свойства уравнений Александра

Теперь исследуем некоторые свойства определённой выше системы (3.29).

**Предложение 1.** *Инварианты Казимира, как функции от диаграммы Юнга  $R$  могут быть представлены, как следующие сдвинутые симметрические функции [91; 235; 239; 327]:*

$$C_k(R) = \sum_{i=1} \left[ (R_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k \right]. \quad (3.32)$$

При ограничении на однокрюковые диаграммы  $R = [r, \underbrace{1, \dots, 1}_L]$ , данная формула редуцируется в:

$$C_k(R) = (r - 1/2)^k - (-L - 1/2)^k, \quad (3.33)$$

или, в более симметричном виде, с обозначением длины разбиения через  $l = l(R) = L + 1$ :

$$C_k(R) = (r - 1/2)^k + (-1)^{k+1}(l - 1/2)^k. \quad (3.34)$$

**Следствие 1.** *Как следствие явного определения (3.34), симметрия по отношению к транспонированию диаграммы выглядит как*

$$C_{\Delta}(R^T) = (-1)^{|\Delta|+l(\Delta)} C_{\Delta}(R). \quad R = [r, 1^L] \quad (3.35)$$

*Доказательство.* Заметим, что транспонирование однокрюковой диаграммы меняет местами  $r$  и  $l$ , добавляя фактор  $(-1)^{\Delta_i+1}$  в  $i$ 'й множитель  $\square$

В общем виде можно думать, что решения уравнений Александра могут содержать как чётные, так и нечётные полиномы. Однако, оказывается, что решения всегда распадаются на четную и нечетную части, которые зануляются независимо.

**Лемма 1.** *Градуированное пространство  $\mathcal{A}l$  решений уравнений Александра распадается в прямую сумму градуированных пространств чётных и нечётных решений:*

$$\mathcal{A}l = \mathcal{A}l^e \oplus \mathcal{A}l^o \quad (3.36)$$

*Доказательство.* Уравнение (3.29) должно выполняться для всех однокрюковых диаграмм  $R$ , следовательно, должно быть инвариантно относительно транспонирования диаграмм. Предположим теперь, что у нас есть некоторое решение  $X_n(C)$  уравнений (3.29), это означает, что для произвольной однокрюковой диаграммы Юнга  $R$ :

$$X_n = \sum_{|\Delta|=n} \beta_{\Delta} C_{\Delta}(R) = 0 \quad (3.37)$$

где некоторые  $\beta_{\Delta}$  могут зануляться. При транспонировании диаграммы  $R$  каждый моном ведёт себя в соответствии с (3.35). Так как  $|\Delta|$  не меняется при транспонировании, мы получаем:

$$\sum_{|\Delta|=n} \beta_{\Delta} C_{\Delta}(R^T) = \sum_{|\Delta|=n} (-1)^{l(\Delta)} \beta_{\Delta} C_{\Delta}(R) = 0 \quad (3.38)$$

Так как  $l(\Delta)$  может быть либо четным, либо нечетным, обозначим чётные через  $\Delta_1$  и нечетные через  $\Delta_2$ , и разделим сумму:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|\Delta_1|=n} \beta_{\Delta_1} C_{\Delta_1}(R) + \sum_{|\Delta_2|=n} \beta_{\Delta_2} C_{\Delta_2}(R) \\ &= \sum_{|\Delta_1|=n} \beta_{\Delta_1} C_{\Delta_1}(R) - \sum_{|\Delta_2|=n} \beta_{\Delta_2} C_{\Delta_2}(R) \Rightarrow \\ \Rightarrow X_n^o &= \sum_{|\Delta_2|=n} \beta_{\Delta_2} C_{\Delta_2}(R) = 0 \quad , \quad X_n^e = \sum_{|\Delta_1|=n} \beta_{\Delta_1} C_{\Delta_1}(R) = 0 \end{aligned}$$

Это означает, что произвольное решение  $X_n \in \mathcal{A}l$  разделяется на сумму  $X_n^e \in \mathcal{A}l^e$  и  $X_n^o \in \mathcal{A}l^o$ , которые зануляются независимо, следовательно, зануляются и решения (3.29).  $\square$

Приведём некоторые примеры решений системы:

$$\begin{aligned}
\hbar^4 : X_{4,1}^e(C) &= C_1^4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2; \\
\hbar^5 : X_{5,1}^e(C) &= C_2C_1^3 - 3C_4C_1 + 2C_2C_3, \\
\hbar^5 : X_{5,1}^o(C) &= C_1(C_1^4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2); \\
\hbar^6 : X_{6,1}^e(C) &= 4C_1^2(C_1^4 - 4C_3C_1 + 3C_2^2), \\
X_{6,2}^e(C) &= 2C_3C_1^3 - 3C_2^2C_1^2 - 8C_3^2 + 9C_2C_4, \\
X_{6,3}^e(C) &= C_3C_1^3 + 3C_2^2C_1^2 - 9C_5C_1 + 5C_3^2; \\
X_{6,1}^o(C) &= C_1^2C_4 - 2C_1C_2C_3 + C_2^3 \\
X_{6,2}^o(C) &= C_2(C_1^4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

**Теорема 1.** *Размерности однородных компонент  $\mathcal{A}l$  задаются через:*

$$\dim \mathcal{A}l_n^e = p_e(n) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad l(\Delta) \in 2\mathbb{Z} \tag{3.40}$$

$$\dim \mathcal{A}l_n^o = p_o(n) - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad l(\Delta) \in 2\mathbb{Z} + 1, \tag{3.41}$$

где  $p_e(n)$  и  $p_o(n)$  обозначают количество разбиений  $n$  на чётное и нечётное число целых чисел соответственно.

*Доказательство.* Введём обозначения  $x = r - 1/2, y = -L - 1/2$ , тогда инварианты Казимира (3.34) принимают вид:

$$C_k(R) = x^k - y^k \tag{3.42}$$

Уравнение (3.29) должно выполняться для всех  $r, L$ , следовательно, оно должно также выполняться для всех  $x, y$ . Следовательно, оно должно быть эквивалентно занулению коэффициентов перед степенями  $x, y$ . Так может оказаться, что не все из этих коэффициентов независимы. Следовательно, нашей целью является нахождение числа независимых коэффициентов, которые дадут число уравнений на исходные переменные  $\xi_\Delta$ .

Рассмотрим сперва случай чётных решений. Количество переменных в этом случае равно количеству разбиений чётной длины,  $p_e(n)$ . Следовательно, мономы  $C_\Delta$  всегда содержат хотя бы два Казимира. Произведение двух Казимиров выглядит как:

$$C_{k_1}C_{k_2} = (x^{k_1} - y^{k_1})(x^{k_2} - y^{k_2}) \tag{3.43}$$

Это означает, что все выражение делится на  $(x - y)^2$ , следовательно, остаётся полином по  $x, y$  порядка  $n - 2$ . Теперь, заметим, что пусть  $C_k(R)$  и антисимметричны по  $x, y$ , чётное решение, тем не менее, является симметричным.

Следовательно, имеем:

$$X_{n,m}(C) = (x - y)^2 \hat{X}_{n,m} \quad (3.44)$$

$\hat{X}_{n,m}$  также является симметричным, Следовательно, принадлежит кольцу симметрических полиномов порядка  $n - 2$  от двух переменных  $\Lambda(x, y)$ . Более того, лежит в однородной компоненте  $\Lambda_{n-2}(x, y)$ . Чтобы найти независимые уравнения на  $\xi_\Delta$ , найдем вначале базис в данном кольце. Например, для построения базиса в кольце симметрических функций можно использовать полностью симметрические полиномы:

$$h_k(x, y) = \sum_{\substack{l_1+l_2=k \\ l_i \geq 0}} x^{l_1} y^{l_2}. \quad (3.45)$$

Тогда базис в  $\Lambda_{n-2}(x, y)$  задается полиномами:

$$h_\lambda(x, y) = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = n - 2 \quad (3.46)$$

Коэффициенты перед каждым  $h_\lambda(x, y)$  дают независимые уравнения на  $\xi_\Delta$ . Значит, искомая размерность пространства равна

$$\dim \mathcal{A}_n = p_e - \dim \Lambda_{n-2}(x, y), \quad (3.47)$$

где

$$\dim \Lambda_{n-2}(x, y) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (3.48)$$

Аналогичные рассуждения проходят и для случая нечетных решений. В этом случае самый короткий моном длины 1, значит, уравнение делится на  $(x - y)$ . Разделив антисимметричное по  $x, y$  выражение на другое антисимметричное выражение, получим опять симметричный полином по  $x, y$ , на этот раз степени  $n - 1$ . Аналогичные рассуждения позволяют получить размерность пространства нечетных решений:

$$\dim \mathcal{A}_n = p_o - \dim \Lambda_{n-1}(x, y), \quad (3.49)$$

где

$$\dim \Lambda_{n-1}(x, y) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad (3.50)$$

□

**Замечание 1.** Производящие функции  $p_e(n)$  and  $p_o(n)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \vartheta_4(0, q)}{2(q; q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_e(n) q^n \\ \frac{1 - \vartheta_4(0, q)}{2(q; q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_o(n) q^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

**Лемма 2.** Групповые факторы в разложении уравнения Александера лежат в конкретном подпространстве  $\mathcal{Al}$ :

$$A_{2n, m}(C) \in \bigoplus_{k=2}^n (\mathcal{Al}_{2k}^e \oplus \mathcal{Al}_{2k-1}^o) \subset \mathcal{Al} \quad (3.52)$$

$$A_{2n+1, m}(C) \in \bigoplus_{k=2}^{n+1} (\mathcal{Al}_{2k}^o \oplus \mathcal{Al}_{2k-1}^e) \subset \mathcal{Al} \quad (3.53)$$

Иными словами, в каждом порядке  $n$  по  $\hbar$ , члены порядка  $k = n \bmod 2$  состоят из четных мономов  $C_\Delta$ , и члены порядка  $k = n + 1 \bmod 2$  состоят из нечетных мономов.

*Доказательство.* Применим дуальность ранг-уровень к разложению компонент. Так как разложение соответствует замене переменных  $q = e^{\hbar}$ , для групповых факторов свойство переписывается как:

$$A_{n, m}(C(R^T)) = (-1)^n A_{n, m}(C(R)). \quad (3.54)$$

В то же время, из-за (3.35), мы получаем фактор  $(-1)^{|\Delta|+l(\Delta)}$  для каждого слагаемого порядка  $|\Delta| = k$ . Для того, чтобы два свойства были согласованы между собой, должно выполняться:

$$(-1)^n = (-1)^{k+l(\Delta)}. \quad (3.55)$$

□

Укажем еще одно свойство, которое мотивирует дальнейшую дискуссию:

**Лемма 3.** *Нечетные решения могут быть сгенерированы умножением полиномов из  $\mathcal{A}^e$  на подходящие нечетные мономы  $C_\Delta$  с нечетным  $l(\Delta)$ .*

Вернемся к доказательству леммы после доказательства основной теоремы из следующих разделов. Однако, будем помнить об этом утверждении, так как оно объясняет концентрацию на четных решениях  $\mathcal{A}^e$  в последующих разделах. Например:

$$\begin{aligned} X_{5,1}^o(C) &= C_1 X_{4,1}^e(C) \\ X_{6,1}^o(C) &= \frac{1}{3} C_2 X_{4,1}^e(C) - \frac{1}{3} C_1 X_{5,1}^e(C) \\ X_{6,2}^o(C) &= C_2 X_{4,1}^e(C) \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.4.3 Групповые факторы полинома Александра

Проиллюстрируем, как все эти леммы работают для групповых факторов полинома Александра:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^\mathcal{K}(q) - \mathcal{A}_{[1]}^\mathcal{K}(q^{|R|}) &= \hbar^4 v_{4,1}^\mathcal{K} A_{4,1}(C) + \\ &+ \hbar^6 \left( v_{6,1}^\mathcal{K} A_{6,1}(C) + v_{6,2}^\mathcal{K} A_{6,2}(C) \right) + \\ &+ \hbar^7 v_{7,1}^\mathcal{K} A_{7,1}(C) + \\ &+ \hbar^8 \left( A_{8,1}(C) v_{8,1}^\mathcal{K} + A_{8,2}(C) v_{8,2}^\mathcal{K} + A_{8,3}(C) v_{8,3}^\mathcal{K} + A_{8,4}(C) v_{8,4}^\mathcal{K} \right) + \\ &+ O(\hbar^9) \end{aligned}$$

где  $A_{n,m}$  являются конкретными комбинациями базисных решений, которые мы перечислили выше.

$$\begin{aligned} A_{4,1}(C) &= X_{4,1}^e(C) \\ A_{5,m}(C) &= 0 \\ A_{6,1}(C) &= X_{4,1}^e(C), \quad A_{6,3}(C) = -X_{6,1}^e(C) - \frac{5}{3} X_{6,2}^e(C) - \frac{2}{3} X_{6,3}^e(C), \\ A_{7,1}(C) &= X_{6,1}^o(C) \\ A_{8,1}(C) &= X_{4,1}^e(C), \quad A_{8,2}(C) = A_{6,3}(C) \\ A_{8,3}(C) &= C_1^4 X_{4,1}^e(C) + 7X_{8,6}^e(C) - 7X_{8,7}^e(C) + X_{8,8}^e(C), \quad A_{8,4}(C) = C_1^2 X_{4,1}^e(C) \end{aligned} \quad (3.57)$$

вместе с решениями уравнений Александера на уровне 8:

$$\begin{aligned}
X_{8,1}^e &= -C_2^2 (C_1^4 - 4C_3C_1 + 3C_2^2), \\
X_{8,2}^e &= -(C_1^4 - 4C_3C_1 + 3C_2^2) (3C_2^2 + 4C_1C_3), \\
X_{8,3}^e &= -C_2 (C_2C_1^4 - 2C_4C_1^2 + C_2^3), \\
X_{8,4}^e &= -4C_3C_1^5 - 7C_2^2C_1^4 + 16C_5C_1^3 - 5C_2^4, \\
X_{8,5}^e &= 5C_1^4 (C_1^4 - 4C_3C_1 + 3C_2^2), \\
X_{8,6}^e &= (4C_3C_1^5 - 5C_2^2C_1^4 + 5C_2^4 + 60C_4^2 - 64C_3C_5), \\
X_{8,7}^e &= (C_2^4 - 4C_6C_2 + 3C_4^2), \\
X_{8,8}^e &= 4C_3C_1^5 + 11C_2^2C_1^4 - 64C_7C_1 + 21C_2^4 + 28C_4^2
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Обратим внимание, что независимых групповых факторов на каждом уровне меньше, чем решений уравнений Александера. Действительно, мы имеем ограничение из леммы 2. Однако, совершенно точно есть еще ограничения: например, компоненты  $\mathcal{A}l_{2k-1}^o$  и  $\mathcal{A}l_{2k-1}^e$  из (3.52), (3.53) отсутствуют. Более того, даже из того, что осталось, не все решения являются независимыми. Это намекает на то, что существуют и другие симметрии полинома Александера, которые зафиксируют его групповые факторы.

### 3.4.4 Суперсимметричные полиномы

Формула (3.42) может быть расширена на произвольные диаграммы Юнга, если параметризовать их в терминах крюков, т.е. при помощи диагональных клеток. Аналогичным образом можно ввести переменные  $x_i = r_i - 1/2$ ,  $y_i = -L_i - 1/2$  для  $i$ -го крюка. Тогда инварианты Казимира выглядят как:

$$C_k(x_1, \dots, y_1, \dots) = \sum_{i=1}^n (x_i^k - y_i^k) \tag{3.59}$$

Это выражение симметрично по сдвинутым переменным  $x_i, y_i$  независимым образом. Формально это означает, что инварианты Казимира суперсимметричны по переменным  $x, y$ .

**Определение 4.** *Полином  $P(x, y)$  называется суперсимметричным, если он инвариантен относительно независимых перестановок  $x$  и  $y$ , и при  $x_i = y_i = z$  не зависит от  $z$ .*

Как и в обычном случае, можно определить кольцо суперсимметричных полиномов и искать в нем различные базисы. Один из них задается суперсимметричным обобщением степенных сумм [299]:

$$\mathfrak{P}(x_1, \dots, y_1, \dots) = \sum_{i=1}^n x_i^k - \sum_{j=1}^m y_j^k \quad (3.60)$$

Следовательно, инварианты Казимира являются специальным случаем таких суперсимметричных степенных сумм. В таких терминах мы можем переформулировать задачу:  $\mathcal{A}_n$  является идеалом в кольце суперсимметричных функций, которые зануляются, когда все кроме одной пары переменных положены одинаковыми. Данная связь суперсимметричных полиномов и иерархии КП исследовалась в [229].

**Замечание 2.** *Суперсимметричные полиномы обычно обсуждаются в контексте супералгебр Ли, а именно, пространство инвариантов Казимира  $gl_{n|m}$  изоморфно пространству суперсимметричных  $(n, m)$  полиномов [287].*

### 3.5 Иерархия КП

Теперь нам понадобятся несколько стандартных результатов об иерархии КП [125; 207].

**Определение 5.** *Оператор*

$$D_x^n : (f, g) \rightarrow (D_x^n f \cdot g) \quad (3.61)$$

*определенный через*

$$f(x + y)g(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (D_x^n f \cdot g) y^n \quad (3.62)$$

*называется производной Хироты.*

Производная Хироты по нескольким переменным определяется похожим образом через разложение в ряд Тейлора от нескольких переменных:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{i_1, \dots, i_m} \left( D_1^{i_1} \dots D_m^{i_m} f \cdot g \right) y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_m^{i_m} \quad (3.63)$$

Отметим важный факт. Если  $g = f$ , то нечетные степени производной Хироты действуют тривиально на произвольную функцию  $f$ .

Иерархия КП определяется через следующее билинейное соотношение:

$$\oint \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{2\sum_i \zeta^i z_i} e^{\sum_i -\frac{1}{i\zeta^i} D_{T_i}} e^{\sum_j z_j D_{T_j}} \tau \cdot \tau = 0, \quad (3.64)$$

где  $D_{T_i}$  — производные Хироты,  $\tilde{D} \equiv (D_{T_1}, \frac{1}{2}D_{T_2}, \dots)$ , и  $z = \{z_1, z_2, \dots\}$  — формальные параметры. Далее, можно показать, что иерархия КП может быть определена через следующую производящую функцию:

$$\text{KP}(z_i) \tau \cdot \tau = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i(-2z) \chi_{i+1}(\tilde{D}_T) e^{[\sum_j t_j D_{T_j}]} \tau \cdot \tau = 0, \quad (3.65)$$

где  $\chi_i$  — функции Шура в симметрических представлениях. Уравнения КП в форме Хироты возникают как коэффициенты в (3.65) перед функциями Шура  $\chi(z_i)$  в полиномиальном виде  $P_n(D_1, D_2, \dots, D_{n-1})$ . Приведем первые несколько уравнений:

- Уравнение 4-го порядка, которое является исходным уравнением КП:

$$(4D_1 D_3 - 3D_2^2 - D_1^4) \tau \cdot \tau = 0 \quad (3.66)$$

- Старшие уравнения КП:

$$\begin{aligned} P_5 &= 3D_1 D_4 - 2D_2 D_3 - D_1^3 D_2; \\ P_{6,1} &= D_1^2 (D_1^4 - 4D_3 D_1 + 3D_2^2), \\ P_{6,2} &= D_1^6 - 20D_3 D_1^3 - 45D_2^2 D_1^2 + 144D_5 D_1 - 80D_3^2, \\ P_{6,3} &= D_1^6 + 10D_3 D_1^3 - 36D_5 D_1 - 20D_3^2 + 45D_2 D_4; \end{aligned} \quad (3.67)$$

Уравнения иерархии следуют из разложения полиномов. Оказывается, что не все из этих уравнений являются независимыми. Более того, некоторые из них отличаются на члены, нечетные по степеням операторов Хироты. Следовательно, мы предлагаем рассматривать только определенный набор уравнений, генерирующих иерархию, и не содержащих тривиально действующих операторов. Обозначим кольцо четных полиномов с целыми коэффициентами по переменным  $x_1, x_2, \dots$  через  $P^e(x)$ . Оно естественным образом градуировано степенями полиномов  $P^e(x) = \bigoplus_n P_n^e(x)$ .

Мы хотим установить связь между групповыми факторами и солитонными тау-функциями. Напомним, как строятся солитонные тау-функции иерархии КП. Рассмотрим уравнение Хироты:

$$P(D_1, D_2, \dots) \tau \cdot \tau = 0 \quad (3.68)$$

и будем искать решение в виде формального ряда:

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (3.69)$$

В первом порядке будут получаться следующие дисперсионные соотношения на  $f_1 = e^{\sum_j k_j T_j}$ :

$$\frac{1}{2}(P(k_1, k_2, \dots) + P(-k_1, -k_2, \dots)) = 0 \quad (3.70)$$

где симметризация возникает как следствие тривиального действия нечетных производных Хироты. Действие иерархии КП на солитонную тау-функцию дает набор дисперсионных соотношений. Так как они являются полиномами по импульсным переменным, при помощи этих дисперсионных соотношений можно сгенерировать идеал в кольце четных полиномов.

**Определение 6.** Определим идеал Хироты  $\widehat{\mathcal{KP}} \subset P^e(k)$  как кольцо полиномов, сгенерированных дисперсионными соотношениями иерархии КП

$$\widehat{\mathcal{KP}} = \text{span} \langle \text{Дисперсионные соотношения солитонной тау-функции} \rangle \quad (3.71)$$

Уравнения КП разного порядка воспроизводят дисперсионные соотношения разного порядка, значит, идеал Хироты градуирован естественным образом:  $\widehat{\mathcal{KP}} = \bigoplus_n \widehat{\mathcal{KP}}_n$ . Как было указано, (3.64) генерирует все уравнения Хироты, значит, и все дисперсионные соотношения для случая  $\tau$  вида (3.69). Следовательно, производящая функция дисперсионных соотношений имеет вид:

$$\oint \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{2\sum_i \zeta^i z_i} e^{\sum_i -\frac{1}{i\zeta^i} k_i} e^{\sum_i z_i k_i} + \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{2\sum_i \zeta^i z_i} e^{\sum_i \frac{1}{i\zeta^i} k_i} e^{-\sum_i z_i k_i}. \quad (3.72)$$

В данной производящей функции нет удобного способа перечисления всех дисперсионных соотношений, так чтобы была очевидна их линейная независимость. Однако, имеется подмножество с таким свойством.

Для  $Y = [i, j]$ ,  $|Y| = i + j$ ,  $i \geq j \geq 2$  определим полиномы:

$$h_Y(k) = \begin{vmatrix} \chi_i(-\tilde{k}/2) & \chi_i(\tilde{k}/2) & \chi_{i+1}(\tilde{k}/2) \\ \chi_{j-1}(-\tilde{k}/2) & \chi_{j-1}(\tilde{k}/2) & \chi_j(\tilde{k}/2) \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}k_1 \end{vmatrix} + (k \rightarrow -k). \quad (3.73)$$

$$\text{где } \tilde{k} = \left\{ \begin{array}{l} k_i \\ i \end{array} \right\}$$

**Предложение 2.** Полиномы (3.73) являются некоторыми дисперсионными соотношениями иерархии КП и линейно независимы.

*Доказательство.* Из [64] мы знаем, что уравнения:

$$\begin{vmatrix} \chi_i(-\tilde{D}/2) & \chi_i(\tilde{D}/2) & \chi_{i+1}(\tilde{D}/2) \\ \chi_{j-1}(-\tilde{D}/2) & \chi_{j-1}(\tilde{D}/2) & \chi_j(\tilde{D}/2) \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}D_1 \end{vmatrix} \tau \cdot \tau = 0 \quad (3.74)$$

являются подмножеством уравнений иерархии. Следовательно, также как и в (3.70) полиномы (3.73) задают дисперсионные соотношения. Чтобы увидеть их линейную независимость, необходимо разложить первые члены полиномов Шура и посчитать детерминант. Оказывается:

$$h_Y(k) = \frac{k_i k_j}{ij} - \frac{k_{i+1} k_{j-1}}{(i+1)(j-1)} + \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{r_1+\dots+r_{2q}=|Y|} P_{r_1 \dots r_{2q}}^{ij} k_{r_1} \dots k_{r_{2q}} \quad (3.75)$$

эти полиномы однозначно определяются членом второго порядка и линейно независимы.  $\square$

Обозначим идеал, сгенерированный полиномами (3.73), через  $\mathcal{KP} = \bigoplus_n \mathcal{KP}_n$ . Тогда имеем очевидное вложение:

$$\mathcal{KP} \subset \widehat{\mathcal{KP}} \quad (3.76)$$

### 3.6 Иерархия КП и решения уравнений Александра

Этот раздел посвящен доказательству утверждений из раздела 3, в частности, уточнение результата [50]. Доказательство состоит из двух частей, сформулированных как отдельные леммы: первая повторяет простые вычисления из [50], переформулированные правильным образом в терминах дисперсионных соотношений. Вторая лемма является комбинаторной конструкцией, завершающей доказательство связи КП-Александр, а также задающая независимые полиномы (3.10). Кроме того, мы объясняем, как задается линейный базис через диаграммы  $\mathcal{U}_e$ , и как  $X_\lambda, \lambda \in \mathcal{U}_e$  мультипликативно генерируются при помощи  $X_{[y_1, y_2]}$ .

**Теорема 2.** *Идеал Хироты и четная часть кольца решений уравнений Александра являются одним и тем же градуированным идеалом, выраженном в разных переменных.*

**Замечание 3.** *Однокрюковое свойство полинома Александра эквивалентно системе дисперсионных соотношений для односолитонной тау-функции КП.*

**Замечание 4.** *Как было упомянуто в лемме 3, нечетная часть кольца решений уравнений Александра генерируется четной частью (см. Следствие 2)*

*Доказательство.*

**Лемма 4.** *Произвольный генератор  $\widehat{\mathcal{KP}}$  удовлетворяет одному из уравнений Александра. Иными словами, идеал Хироты является идеалом кольца четных решений системы Александра:*

$$\widehat{\mathcal{KP}} \subset \mathcal{A}l^e \quad (3.77)$$

*Доказательство леммы 4.* Уравнения Хироты полностью задаются билинейным тождеством (напомним, что оно задает производящую функцию). Чтобы показать, что каждый полином в идеале Хироты является четным решением

уравнений Александера, подставим  $C_k(R)$  вместо  $D_k$  в симметризованное билинейное тождество (3.64). Получившийся интеграл:

$$\oint \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{2\sum_i \zeta^i z_i} e^{\sum_i -\frac{1}{i\zeta^i} C_i} e^{\sum_i z_i C_i} + \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{2\sum_i \zeta^i z_i} e^{\sum_i \frac{1}{i\zeta^i} C_i} e^{-\sum_i z_i C_i}. \quad (3.78)$$

зануляется, когда  $R$  является однокрюковой диаграммой. Действительно, значение инварианта Казимира на однокрюковых диаграммах дается формулой (3.42). Упростим одну из экспонент в подынтегральном выражении:

$$e^{-\sum_i \frac{1}{i\zeta^i} C_i} = e^{-\sum_i \frac{1}{i\zeta^i} (x)^i} e^{\sum_i \frac{1}{i\eta^i} (y)^i} = \frac{\zeta - x}{\zeta - y}, \quad (3.79)$$

в то время как та же самая экспонента под вторым интегралом является обратной величиной этого выражения. Это позволяет вычислить интеграл, посчитав вычеты в  $\zeta_1 = x$ ,  $\zeta_2 = y$ . Следовательно, при ограничении на однокрюковые диаграммы (3.78) зануляется:

$$(y - x)e^{-\sum z_i(x^i+y^i)} + (x - y)e^{-\sum z_i(x^i+y^i)} = 0. \quad (3.80)$$

Мы видим, что произвольный полином, возникающий из билинейного тождества, зануляется при замене производных Хироты на однокрюковые инварианты Казимира (3.32). Это доказывает лемму.

Заметим, что данное вычисление воспроизводит общее доказательство билинейного тождества [207]. Конкретнее,  $k_j = C_j(R)$  для любой однокрюковой диаграммы  $R$  решают дисперсионные соотношения. Следовательно, значения операторов Казимира на однокрюковых диаграммах являются импульсными переменными в солитонной тау-функции иерархии КП. Для получения  $n$ -солитонной тау-функции необходимо взять  $n$  независимых решений дисперсионных соотношений, что в терминах инвариантов Казимира означает взять  $n$  разных крюковых диаграмм:

$$\tau(t_1, t_2, \dots) = \sum_{H' \subset H_n} c_{H'} \exp\left(\sum_{R \in H'} \xi(R)\right) \quad (3.81)$$

где  $H_n$  является множеством, состоящим из ровно  $n$  однокрюковых диаграмм,  $c_{H'}$  — постоянные коэффициенты, сумма берется по всем подмножествам  $H'$  и

$$\xi(R) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(R) t_k \quad (3.82)$$

**Замечание 5.** В этих терминах редукция к тау-функции КдВ выглядит естественно, а именно, необходимо взять крюковые диаграммы, симметричные относительно транспонирования.

Теперь, каждый полином (дисперсионное соотношение) из идеала Хироты удовлетворяет системе уравнений Александера. Докажем, что они эквивалентны, сравнив размерности. Лемма (4), очевидно, гарантирует, что каждая однородная компонента  $\widehat{\mathcal{KP}}_n \subset \mathcal{Al}^e$ .

**Лемма 5.** Размерности векторных пространств однородных компонент  $\mathcal{KP}$  задаются формулой (3.40).

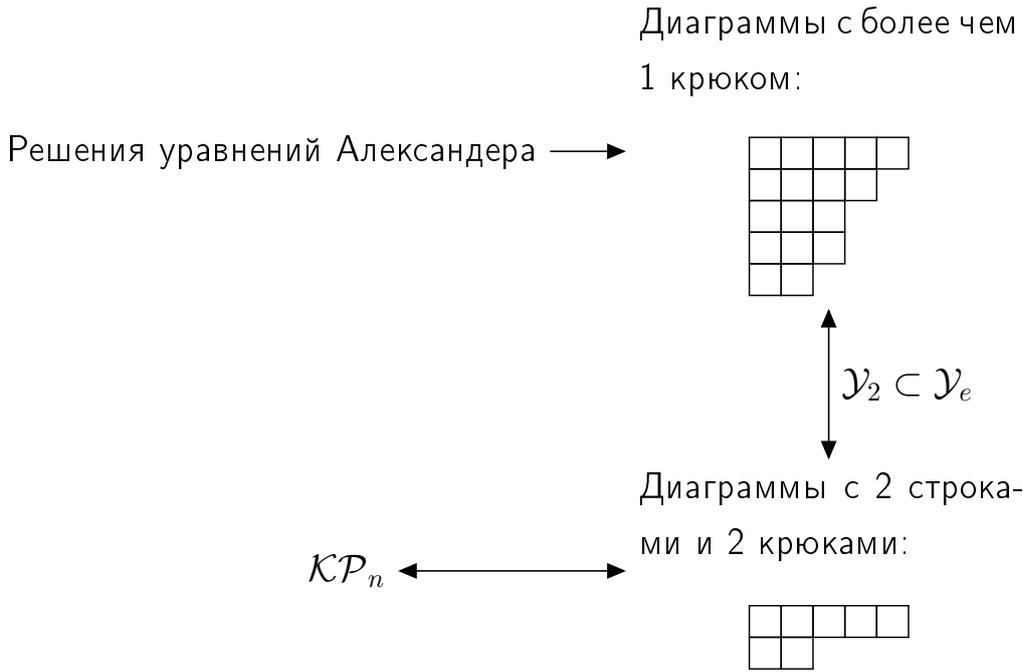
Следовательно, из данной леммы мы будем иметь следующую цепочку включений:

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{\mathcal{KP}} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{KP} & & \mathcal{Al}^e \\ & \searrow & \\ & & \end{array}$$

Мы видим, что на деле все включения являются равенствами.

*Доказательство леммы 5.* Вначале рассмотрим величины (3.40). Назовем все диаграммы Юнга, имеющие  $n$  диагональных клеток,  $n$ -крюковыми диаграммами, по аналогии с однокрюковыми. Тогда, (3.40) — число диаграмм Юнга с более чем одним крюком и четной длины. Обозначим это множество диаграмм через  $\mathcal{U}_e$

Теперь, заметим, что полиномы, генерирующие идеал Хироты (3.73), естественным образом нумеруются двукрюковыми диаграммами с двумя строками  $\mathcal{U}_2$  и являются подмножеством  $\mathcal{U}_e$ .



Сперва, выполним треугольное преобразование в  $\mathcal{KP}$ , чтобы получить полиномы, соответствующие  $Y = [y_1, y_2]$ :

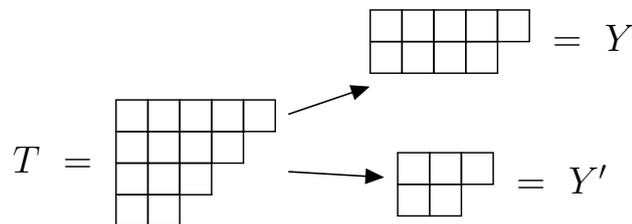
$$h_Y(k) = \frac{1}{y_1 y_2} k_{y_1} k_{y_2} - \frac{1}{|Y| - 1} k_{|Y| - 1} k_1 + \dots \quad (3.83)$$

Мы используем обозначение  $h$  для этих новых полиномов. Теперь, первый член отражает диаграмму Юнга, ассоциированную с полиномом, в то время как второй зависит лишь от порядка. С данного момента мы опускаем коэффициенты, так как они однозначно соответствуют мономам. Символьно обозначим эти полиномы через:

$$h_Y(k) = [y_1, y_2] - [|Y| - 1, 1] \quad (3.84)$$

Произвольный элемент из  $\mathcal{Al}_n^e$  представлен диаграммой Юнга. Однако, в отличие от  $\mathcal{KP}_n$ , для него еще отсутствует явное выражение, а именно, мы не можем ничего сказать о структуре полинома, представленного диаграммой  $T$ . Возьмем произвольный элемент из  $\mathcal{Al}_n^e$ , соответствующую диаграмму  $T$ , и разделим ее на две части: первые две строки и все остальное.

$$T = [Y, Y'], \quad T \in \mathcal{Y}_e, \quad Y \in \mathcal{Y}_2 \quad (3.85)$$



Так как  $T$  является по крайней мере двукрюковой диаграммой,  $Y$  также является двукрюковой. Следовательно, через  $Y$  мы можем нумеровать полином  $h_Y(k)$  и через  $Y'$  — моном  $k_{Y'}$ . Обратно, каждая  $T$  может быть сконструирована из двух разбиений  $Y$  и  $Y'$  при выполнении некоторых условий. Таким образом, можно нумеровать полиномы получившейся диаграммой  $T$ :

$$\hat{h}_T(k) = h_Y(k)k_{Y'} \quad (3.86)$$

Проиллюстрируем данную процедуру. Возьмем  $Y$  — разбиение  $n - 2$ , скажем,  $Y = [n - 4, 2]$ , тогда, единственная возможность сделать разбиение из  $n$  четных частей — добавить  $Y' = [1, 1]$ . Таким образом можно построить:

$$\hat{h}_{[n-4,2,1,1]} = h_{[n-4,2]}k_1^2 \quad (3.87)$$

По индукции будем строить полиномы, соответствующие диаграммам, следуя шагам выше. Нашей заботой является линейная независимость получающихся полиномов, так как исходной целью было получение размерности идеала Хироты. Так как мы знаем производящее множество  $KP$ , начнем с двукрюковых разбиений  $Y$  с двумя строками. Первый нетривиальный случай —  $|Y| = n - 2$ , который описан выше. Случай  $|Y| = n - 3$  прорабатывается точно таким же образом, однако, приведем его для ясности. Разбиения  $Y$  имеют вид:

$$\begin{aligned} [n - 5, 2] - [n - 4, 1] \\ \vdots \\ [n - 5 - i, 2 + i] - [n - 4, 1] \end{aligned}$$

Мы можем лишь умножать на моном  $k_2k_1$ , обозначенный через  $[2, 1]$ . Следовательно, сравнивая эти разбиения, получаем общий вид:

$$\hat{h}_{[n-5-i,2+i,2,1]} = [n - 5 - i, 2 + i, 2, 1] - [n - 4, 2, 1, 1] \quad (3.88)$$

Для следующего шага необходимы дополнительные действия. Произвольный полином в  $\mathcal{Y}_e$  для  $|Y| = n - 4$  имеет следующий вид:

$$[n - 6 - i, 2 + i] - [n - 5, 1] \quad (3.89)$$

Тут мы можем присоединить снизу две диаграммы:

$$Y' = [3, 1] \leftrightarrow k_3k_1, \quad Y' = [1, 1, 1, 1] \leftrightarrow k_1^4. \quad (3.90)$$

Следуя нашему построению, рассмотрим полином:

$$[n - 6, 3, 2, 1] - [n - 5, 3, 1, 1], \quad (3.91)$$

который получается после присоединения  $[3, 1]$  к  $[n - 6, 2] - [n - 5, 1]$ . Заметим, что первое слагаемое уже возникало в (3.88), при  $i = 1$ . Пусть даже следующие слагаемые отличны, это все равно намекает на то, что полиномы на этом шаге могут не быть линейно независимы от полиномов из первого шага.

Мы хотим построить набор полиномов, которые **явно являются независимыми**.

Для этого заметим, что можно найти полином  $\hat{h}_T$  для  $|Y| = n - 2$ , первый член которого будет  $[n - 4, 2, 1, 1]$ , точно также для  $[n - 5, 3, 1, 1]$ . Это будут полиномы  $\hat{h}_{[n-4,2,1,1]}$  и  $\hat{h}_{[n-5,3,1,1]}$ , что приводит к линейному преобразованию и переопределению:

Для  $|Y| = n - 3$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}_{[n-5-i,2+i,2,1]} &\longrightarrow \hat{h}_{[n-5-i,2+i,2,1]} + \hat{h}_{[n-4,2,1,1]} = \\ &= [n - 5 - i, 2 + i, 2, 1] - [n - 3, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (3.92)$$

Для  $|Y| = n - 4$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}_{[n-6-i,2+i,2,1]} &\longrightarrow \hat{h}_{[n-6-i,2+i,2,1]} + \hat{h}_{[n-5,3,1,1]} = \\ &= [n - 6 - i, 2 + i, 2, 1] - [n - 3, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (3.93)$$

Данное преобразование делает построенные полиномы явно независимыми, так как они все имеют в качестве первого члена разный моном.

Докажем общее утверждение.

**Предложение 3.** *Для всех  $T$  -  $k$ -крюковых диаграмм Юнга, таких что  $|T| = n$ , с четной длиной  $l(T)$  и  $k > 1$ , существует такое преобразование  $\hat{h}_T$ , что:*

$$\hat{h}_T = h_Y k_{Y'}, \quad T = [Y, Y'] \quad (3.94)$$

*линейно независимы.*

*Доказательство.* Следуя логике приведенных выше примеров примеров, мы хотим показать, что для любых заданных  $Y \vdash n - k$  и  $Y' \vdash k$ , таких что  $T = [Y, Y']$  тоже является разбиением, соответствующий полином  $\hat{h}_T = h_Y k_{Y'}$  определен только первым слагаемым, которое в точности равно  $k_T$ .

Начнем с того, что если различные  $Y'$  имеют различную длину, то итоговые полиномы точно будут линейно независимы. Следовательно, мы можем рассматривать случаи  $l(T) = 4, 6, 8, \dots$  независимо.

1) Сперва рассмотрим случай  $l(T) = 4 \Leftrightarrow l(Y') = 2$ . Обозначим  $Y' = [b_1, b_2]$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq 1$ , then

$$\hat{h}_T = [n - k - 2 - i, 2 + i, b_1, b_2] - [n - k - 1, b_1, b_2, 1], \quad \text{if } 2 + i \geq b_1 \quad (3.95)$$

Выше мы привели примеры для  $k = 2, k = 3$ . Теперь предположим, что все полиномы для всех  $k < k_0$  приведены к виду:

$$\hat{h}_T = [T] - [n - 3, 1, 1, 1] \quad (3.96)$$

Тогда, для того, чтобы сделать то же самое для  $k = k_0$  необходимо найти член вида  $Y = [n - k_0 - 1, b_1, b_2, 1]$ , решив простое уравнение

$$n - k - 2 - i = n - k_0 - 1, \quad b_1 = 2 + i. \quad (3.97)$$

Тогда мы найдем искомый член для  $i = b_1 - 2 \geq 0$  и  $k = k_0 - b_1 + 1$ , где  $k_0 > k \geq 2$ , так как  $b_1 \leq k_0 - 1$ . Наконец, положим соответствующие  $b'_1 = b_2, b'_2 = 1$ . Таким образом, по индукции, мы находим все полиномы в желаемом виде и их независимость становится явной. Неравенства гарантируют существование таких членов.

Проиллюстрируем последний шаг еще одним примером. Возьмем, например,  $k_0 = 5$  и  $Y' = [3, 2]$ , и предположим, что для  $k < 5$  все приведено к правильному виду. Начнем с:

$$\hat{h}_T = [T] - [n - 6, 3, 2, 1] \quad (3.98)$$

Имеем:  $i = 1, k = 3, b'_1 = 2, b'_2 = 1$ . Это означает, что нам нужно искать полином вида:

$$\hat{h}_T = [n - 3 - 2 - 1, 2 + 1, 2, 1] - [n - 3, 1, 1, 1] = [n - 6, 3, 2, 1] - [n - 3, 1, 1, 1], \quad (3.99)$$

который должен быть построен на предыдущем шаге индукции.

2) Случаи  $l(Y') > 2$  рассматриваются похожим образом. Для каждого случая  $l(Y') = l$  имеем минимальное  $k = l$ , где такая  $|Y'| = k$  возможна. Соответствующий моном будет  $k_{Y'} = k_1^l$ .

Полином общего вида имеет вид:

$$h_T = [n - k - 2 - i, 2 + i, b_1, \dots, b_l] - [n - k - 1, b_1, \dots, b_l, 1] \quad (3.100)$$

Мы хотим привести их все к виду:

$$\hat{h}_T = [n - k - 2 - i, 2 + i, b_1, \dots, b_l] - [n - k' - 1, 1^l, 1] = [T] - [n - k - 1, 1^l, 1] \quad (3.101)$$

Опять, на каждом уровне  $k_0$  мы хотим занулить второй член при помощи первого члена некоторого полинома, для которого  $k < k_0$ . Тогда, по индукции можно привести все полиномы к желаемому виду. Это реализовано следующим образом.

На уровне  $k_0$  мы хотим занулить слагаемое:

$$[n - k_0 - 1, b_1, \dots, b_l, 1] \text{ by } [n - k - 2 - i, 2 + i, b'_1, \dots, b'_l] \quad (3.102)$$

Видно, что необходимо решать уравнения, аналогичные (3.97), чтобы увидеть, что такое зануление действительно возможно.

□

Как было сказано, лемма (3) является следствием данной теоремы.

**Следствие 2.** *Пространство нечетных решений  $\mathcal{A}_n^o$  генерируется четными решениями низших порядков.*

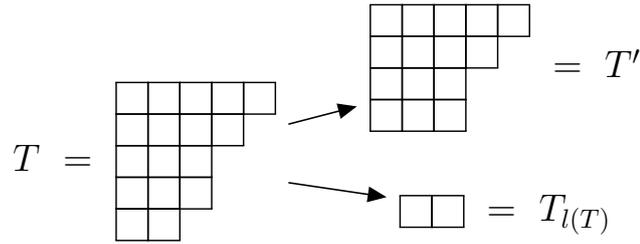
*Доказательство.* Мы естественным образом занумеровали все четные решения уравнений Александра при помощи диаграмм Юнга четной длины, имеющих более одного крюка –  $\mathcal{Y}_e$ . Решение, занумерованное  $T \in \mathcal{Y}_e$  содержит единственный член  $S_T$ . Теперь, покажем, чем является величина (3.40) для нечетного случая. Опять, это снова количество диаграмм нечетной длины, имеющих более одного крюка –  $\mathcal{Y}_o$ .

Это означает, что мы можем использовать ту же идею. Возьмем произвольную диаграмму  $T \in \mathcal{Y}_o$  и отрежем последнюю строку  $T_{l(T)}$ , получим диаграмму  $T'$

из  $\mathcal{Y}_e$ . Это означает, что  $h_T(C)$  – четное решение уравнений Александра. Следовательно, произведение:

$$h_T(C) = h_{T'}(C)C_{T_l(T)} \quad (3.103)$$

является нечетным решением системы Александра. Конечно, так можно сделать для любой диаграммы из  $\mathcal{Y}_o$ . Более того, эти нечетные решения также являются линейно независимыми, так как они содержат уникальный член, соответствующий диаграмме, которой они занумерованы.



□

Тот факт, что необходимо изучать только четную часть решений согласуется с тривиальностью нечетных уравнений Хироты. Следовательно, в реальности имеем соответствие между полным пространством  $\mathcal{A}l$  и дисперсионными соотношениями солитонных тау-функций. Другим очевидным, однако, не менее важным следствием является следующее утверждение.

**Следствие 3.** *Пространство всех решений уравнений Александра генерируется множеством, занумерованным двустрочечными двукрюковыми диаграммами  $\mathcal{Y}_2$ :*

$$X_{[y_1, y_2]}(R) = \frac{1}{y_1 y_2} C_{y_1}(R) C_{y_2}(R) + \dots, \quad y_1 \geq y_2 \geq 2 \quad (3.104)$$

В то время как линейно независимые решения занумерованы диаграммами с более чем одним крюком  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e \oplus \mathcal{Y}_o$ :

$$X_\lambda = X_{[\lambda_1, \lambda_2]} C_{\lambda'} \quad (3.105)$$

где  $\lambda' = [\lambda_3, \dots, \lambda_{l(\lambda)}]$ .

## Глава 4. Приложение к вычислению инвариантов ЛМОВ

### 4.1 Введение

Гипотезы о топологической струнной дуальности, выдвинутые Гопакумаром-Вафой [94] и Оогури-Вафой [238], связывают теорию Черна-Саймонса на  $S^3$  с калибровочной группой  $U(N)$  с топологической теорией струн на разрешенном конифолде. С помощью этого можно переписать некоторые подходящие комбинации полиномов узлов в теории Черна-Саймонса как перерформулированные инварианты, обладающие структурой целочисленности [160; 161; 164; 179; 268], более известной как условие ЛМОВ. Эти целочисленные инварианты перечисляют БПС-состояния (спектры М2-бран, оканчивающихся на М5-бранах в М-теории, компактифицированные на конифолде [94]). Эти целые числа определяют амплитуды ориентированной топологической струны. Для получения чисел ЛМОВ требуется явный вид ненормированных цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ для любого узла и зацепления. Недавние продвижения, о которых мы уже несколько раз писали выше, позволяют вычислить цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ для этих целей. Полученные нами результаты размещены на сайте [150], который периодически обновляется. Таким образом, мы можем косвенно определить числа БПС для узлов и проверить структуры целочисленности в контексте топологической струнной дуальности.

Условие целочисленности ЛМОВ [179; 238] является гораздо более сильным условием чем условие целочисленности цветных полиномов Кауффмана и ХОМФЛИ-ПТ. А именно, в терминах подходящих переменных ( $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+N}\right)$  и  $A = q^N$ ), вакуумные средние операторов петель Вильсона

$$P_R^{\mathcal{L}}(A, q) = \left\langle \text{Tr}_R T \exp \left( \oint_{\mathcal{L}} \mathcal{A} \right) \right\rangle \quad (4.1)$$

в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU(N)$  (цветные ХОМФЛИ-ПТ) или  $SO(N+1)$  (цветной полином Кауффмана) являются полиномами Лорана с целочисленными коэффициентами. На данный момент нет топологического объяснения целочисленности этих коэффициентов. В рамках программы категорификации Хованова-Рожанского [143; 144] эти числа представляются как размерности некоторых дважды градуированных векторных пространств.

До сих пор открытым остается вопрос о связи данной категорификационной программы с более традиционным формализмом Решетихина-Тураева (РТ). В работах [325] коэффициенты полинома Джонса интерпретируются как количество решений уравнения Хитчина в четырехмерной калибровочной теории с фиксированным инстантонным числом.

Существует элегантный способ записи вакуумного среднего от скалярного оператора Оогури-Вафа для узлов в теории топологических струн [238] с использованием плетистической экспоненты производящей функции спектра (ПФС), более известной как индекс.

Точнее, если Гильбертово пространство имеет ПФС,

$$Ind_H(t) = \sum_i \tilde{N}_i t^i, \quad (4.2)$$

тогда пространство Фока имеет единственное состояние (вакуум) на нулевом уровне,  $M_1 = \tilde{N}_1$  состояний на первом уровне,  $M_2 = \tilde{N}_2 + \frac{1}{2}\tilde{N}_1(\tilde{N}_1 + 1)$  состояний на втором уровне,  $M_3 = \tilde{N}_3 + \tilde{N}_2\tilde{N}_1 + \frac{1}{6}\tilde{N}_1(\tilde{N}_1 + 1)(\tilde{N}_1 + 1)$  на третьем, и так далее. В общем случае, ПФС в пространстве Фока выражается как плетистическая экспонента от ПФС в Гильбертовом пространстве:

$$Ind_F(t) = \sum_I M_I t^I = \prod_i \frac{1}{(1 - t^i)^{\tilde{N}_i}} = \exp \sum_{d=1} \frac{Ind_H(t^d)}{d} \quad (4.3)$$

Таким образом, если предполагается, что некоторая величина интерпретируется как ПФС некоторого пространства Фока, его плетистический логарифм также должен структуру ПФС: обладать свойством целочисленности. Первоначальная гипотеза Оогури-Гопакумара-Вафа [94; 238] для полиномов узлов отражала старую веру что они на самом деле являются *характерами*, в то же время, хорошо известно, что операция плетизма естественным образом действует на характеры [174] (с физической точки зрения операция плетизма в гипотезе ОГП связана с механизмом Швингера создания бран [94]). Например, производящая функция квантовых размерностей (в теории узлов это *ненормированные* полиномы ХОМФЛИ для тривиального узла)

$$Z_{OV}^{unknot} \{A, q | \bar{p}\} = \sum_R \dim_R(A, q) \cdot \chi_R\{\bar{p}\} = \sum_R \chi_R(p^*) \chi_R(p) = \quad (4.4)$$

$$= \exp \left( \sum_d \frac{p_d^* \bar{p}_d}{d} \right) = \exp \left( \sum_d \frac{1}{d} \widehat{A}d_d(p_1^*) \widehat{A}d_d(\bar{p}_1) \right) = \exp \left( \sum_d \frac{p_1^*(A^d, q^d)}{d} \widehat{A}d_d(\bar{p}_1) \right),$$

где сумма пробегает все диаграммы Юнга  $R$  ("цвета"),  $\chi_R$  - функции Шура от временных переменных  $\bar{p}_k$  и операция Адамса (плетизм)  $\widehat{Ad}_d : p_k \longrightarrow p_{kd}$  действует в *топологическом локусе* [302], увеличивая степень параметров:

$$\widehat{Ad}_d(p_k^*) = p_{kd}^* = \frac{A^{kd} - A^{-kd}}{q^{kd} - q^{-kd}} = p_k^*(A^d, q^d). \quad (4.5)$$

Следовательно, плетистический логарифм от  $Z_{OV}^{unknot}$  равен  $p_1^* = \frac{A-A^{-1}}{q-q^{-1}}$  и обладает свойством целочисленности:

$$(q - q^{-1}) \cdot p_1^* = A - A^{-1} \quad (4.6)$$

т.е. является многочленом Лорана от переменных  $A$  и  $q$  с целыми коэффициентами. В случае тривиального узла он фактически не зависит от  $q$ . Утверждение гипотезы состоит в том, что свойство целочисленности верно для плетистических логарифмов от производящих функции Оогури-Вафа цветных полиномов ХОМФЛИ для *любых* узлов. В частности, это означает, что свободные энергии имеют полюсы только *первого порядка* по постоянной Планка  $\hbar = \log q$ , что ожидаемо для статистической суммы, но не столь очевидна для *ненормированных* полиномов узлов ( $P_R \sim \hbar^{-|R|}$ ).

Как следует из работы (4.4), плетистическое преобразование в точности компенсирует отклонение, размерности  $d_R$  от  $\frac{d_1^{|R|}}{|R|!}$  (как классической, так и квантовой размерности). Далее, отклонение полинома ХОМФЛИ для нетривиальных узлов от квантовой размерности, то есть неклассическая природа *каблирования*, измеряется полиномами Оогури-Вафа  $f_R$  (переформулированные инварианты). По сути, это однородные полилинейные комбинации (где  $\sum_i n_i |R_i| = |R|$  и  $|R_i| < |R|$  для любого  $i$ ),

$$f_R = H_R + \sum_I c_I \prod_{i \in I} \widehat{Ad}_{n_i}(H_{R_i}) \quad (4.7)$$

которые обращаются в нуль, если все полиномы ХОМФЛИ заменить размерностями,  $H_R \longrightarrow d_R$ , например  $f_{[2]} = H_{[2]} - \frac{1}{2}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}\widehat{Ad}_2(H_1)$ . Это свойство определяет их с точностью до треугольных преобразований, и они автоматически имеют только полюсы первого порядка в  $\{q\} (= q - q^{-1})$ .

Основываясь на *разложении по родам* в пределе Т'Хоофта для больших  $N$  (статсумма закрытой струны) свободной энергии в калибровочных теориях поля, мы ожидаем разложение по родам по параметру  $\hbar$  при фиксированной

константе Г'Хоофта (что соответствует фиксированной переменной  $A$ ) для логарифма цветных полиномов ХОМФЛИ  $\ln H_R^{\mathcal{K}}(A, q)$ . Существует альтернативное разложение по родам [200; 201], известное как преобразование Гурвица-Фурье для переменной  $\mathfrak{h}$ :

$$H_R^{\mathcal{K}}(A, q) = \dim_R(A, q) \cdot \left( \sigma_{\square}^{\mathcal{K}}(A) \right)^{|R|} \cdot \exp \left( \sum_{\Delta} \mathfrak{h}^{|\Delta|+l(\Delta)-2} s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A, \mathfrak{h}^2) \varphi_R(\Delta) \right), \quad (4.8)$$

$$\mathfrak{h} = \frac{\hbar}{\left( \sigma_{\square}^{\mathcal{K}}(A) \right)^2}$$

где  $\sigma_{\square}^{\mathcal{K}}(A) = H_{\square}^{\mathcal{K}}(q = 1, A)$  называются специальными полиномами. При такой подстановке статистическая сумма Оогури-Вафа  $Z_{LMOV_2}^{\mathcal{K}}(A, q, \bar{p})$  [120; 198; 199] становится  $\tau$ -функцией Гурвица. Здесь сумма идет по диаграммам Юнга  $\Delta$  с  $l(\Delta)$  строками длины  $\delta_i$  и общим количеством ящиков  $|\Delta| = \sum_i^{l(\Delta)} \delta_i$ , а  $\varphi_R(\Delta)$  пропорциональны характерам симметрических групп  $\psi_R(\Delta)$  при  $|R| = |\Delta|$ ;  $\psi_R(\Delta) = z_{\Delta} d_R \varphi_R(\Delta)$ , и аналитически продолжены при  $|R| > |\Delta|$ , как в работе [198; 199]. Здесь  $d_R$  - размерность представления  $R$  симметрической группы  $S_{|R|}$ , деленная на  $|R|!$ , а  $z_{\Delta}$  - стандартный симметричный фактор диаграммы Юнга (порядок автоморфизма) [82]. Согласно этому определению сумма в (4.9) проходит по всем  $\Delta$  таким, что  $|\Delta| \leq |R|$ , а во всех суммах ниже мы используем  $\psi_R(\Delta)$  что оставляет в сумме только члены с  $|R| = |\Delta|$ . Преимущество использования разложения (4.9) заключается в возможности поднять  $\varphi_R(\Delta)$  до кольца операторов разрезания и склейки  $W_{\Delta}$  [198; 199], в то время как использование базиса  $\psi_R(\Delta)$  лучше подходит для изучения гипотезы о целочисленности.

Эта версия Гурвица преобразования Фурье по цветовому индексу  $R$ , (4.9) преобразует множество цветных полиномов ХОМФЛИ в набор *обобщенных специальных полиномов*  $\sigma_{g|\Delta}^{\mathcal{K}}(A)$ . Они входят в (4.9) через

$$s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A, \mathfrak{h}^2) = \sum_{g \geq 0} \mathfrak{h}^{2g} \sigma_{g|\Delta}^{\mathcal{K}}(A) \quad (4.9)$$

Заметим, что свободная энергия ведет себя как  $\hbar^{-2}$ , что естественно для  $\tau$ -функции.

Данные свойства рассмотренного выше разложения Гурвица/по родам индивидуальных полиномов узлов еще не получили достаточного внимания. Однако, уравнение (4.9) мотивирует изучение разложения по родам для статсуммы Оогури-Вафа и подразумевает, что его естественная форма должна включать

плетистическую экспоненту:

$$\begin{aligned} Z_{LMOV_2}^{\mathcal{K}}\{A, q | \bar{p}\} &= \sum H_R^{\mathcal{K}}(A, q) \chi_R\{\bar{p}\} = \\ &= \exp \left( \sum_{d \geq 1} \sum_{\Delta} \frac{\prod_{i=1}^{l(\Delta)} (q^{d\delta_i} - q^{-d\delta_i})}{d} S_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A^d, q^d) \widehat{Ad}_d(\bar{p}_{\Delta}) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $\bar{p}_{\Delta} = \prod_i \bar{p}_i^{\mu_i}$  и  $\widehat{Ad}_d(\bar{p}_{\Delta}) = \prod_i \bar{p}_{di}^{\mu_i}$ , а  $\mu_i$  равно количеству строк длины  $i$  в диаграмме Юнга  $\Delta$ . В этих терминах  $z_{\Delta} = \prod_i i^{\mu_i} \mu_i!$ .

Связь между (4.11) и (4.9) нетривиальна, поскольку сумма логарифмов не равна логарифму суммы или сумма разложений по родам не совпадает с разложением по родам суммы. Эта связь включает в себя обобщения формулы Коши (4.4) на производящую функцию обобщенных чисел Гурвица [58; 198; 199; 234]

$$Z_{LMOV_2}^{\mathcal{K}}\{A, q | \bar{p}\} \equiv Z_{Hurw} = \sum_R \dim_R(A, q) \cdot \chi_R\{\bar{p}\} \cdot e^{\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \varphi_R(\Delta)} \quad (4.11)$$

где  $\beta_{\Delta}$  кодирует информацию об узле  $\mathcal{K}$ . Функции  $\varphi_R(\Delta)$  появляются в "многоточечных корреляторах" обобщенных характеров симметрической группы следующим образом:

$$\text{Hurw}_q(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) = \sum_{|R|=q} d_R^2 \varphi_R(\Delta_1) \varphi_R(\Delta_2) \dots \varphi_R(\Delta_m) \quad (4.12)$$

Заметим, что (4.11) использует еще одну версию разложения по родам, то есть разложения по параметру  $q - q^{-1}$ , а не  $\hbar$ . Произведение можно переписать следующим образом

$$\prod_{i=1}^{l(\Delta)} (q^{d\delta_i} - q^{-d\delta_i}) = \prod_{j=1} (q^{jd} - q^{-jd})^{\mu_j} \quad (4.13)$$

что напоминает меру для  $\beta$ -ансамбля [256]:  $(x_1 - x_2)^{\beta} \rightarrow \prod_{i=0}^{\beta-1} (x_1 - q^{2i} x_2)$ . На это также можно смотреть как на произведение  $q$ -чисел  $[\delta_i]_{q^d}$  или  $[j]_{q^d}^{\mu_j}$ , которое порождает дополнительный множитель  $(q^d - q^{-d})^{l(\Delta)}$ . Следовательно, дополнительный подавляющий множитель  $\hbar^{|\Delta|}$  в (4.9) исчезает из (4.11).

Гипотеза целочисленности ЛМОВ утверждает, что после еще одного преобразования Гурвица для  $S_{\Delta}(q, A)$  в (4.11),

$$S_{\Delta}(q, A) = \sum_Q \psi_Q(\Delta) \cdot G_Q(A, q) \quad (4.14)$$

соответствующее разложение по родам

$$G_Q(A, q) = \sum_{g \geq 0, k} N_{Q, g, k} A^k (q - q^{-1})^{2g-2} \quad (4.15)$$

имеет целочисленные коэффициенты. Более того, целые числа  $N_{Q, g, k}$  при фиксированных  $Q$  и  $k$  фактически обращаются в нуль при достаточно высоком роде  $g$ , что является преимуществом упомянутой выше инвариантной версии этого разложения. Эта ЛМОВ-целочисленность каждого члена разложения по родам, конечно, намного сильнее, чем просто целочисленность всей свободной энергии.

Замечательным фактом является то, что отношение (4.14) можно сразу же инвертировать:

$$G_Q(A, q) = \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_Q(\Delta) S_{\Delta}(q, A) \quad (4.16)$$

согласно следующим условиям ортогональности

$$\sum_R \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_R(\Delta') = \delta_{\Delta \Delta'}, \quad \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_{R'}(\Delta) = \delta_{RR'} \quad (4.17)$$

Важным следствием подхода Гурвица является то, что статсумма  $Z_{LMOV_2}\{\bar{p}\}$  должна удовлетворять топологической рекурсии АММ/ОЕ по роду  $g$ , и это наблюдение фактически использовалось при изучении доказательств соотношений ЛМОВ в работе [175]. Данный подход еще не был применен для доказательств гипотез Мариньо о целочисленности в случае полиномов Кауффмана, что мы надеемся сделать в будущем.

Уместно отметить, что гипотезы Мариньо были проверены для несколько торических узлов и зацеплений [181; 242; 300] и узла-восьмерки [228]. Таким образом, основное внимание в этом разделе уделяется проверке гипотез Лабастиды-Мариньо-Оогури-Вафы о целочисленности различных древесных узлов вплоть до 8 пересечений с использованием цветных полиномов Кауффмана (группа  $SO(N)$  и представления размером до двух ящиков в диаграмме Юнга) и цветных полиномов ХОМФЛИ для разных представлений  $SU(N)$ . Последние вычисляются с использованием универсальных матриц Рака [190], которые известны только для древесных узлов.

Неформально древесные узлы - это те, которые выглядят как деревья с двухмостовыми ветвями, то есть путем склеивания фрагментов 4-х нитевых

антипараллельных кос. Это то, что делает их узловые полиномы выражаемыми через две простейшие матрицы Рака  $\mathcal{S}$  и  $\bar{\mathcal{S}}$  (см. Раздел 3.5 ниже). Они также хорошо известны в формальной теории узлов, см. [35; 41] для абстрактного определения и других деталей. Список древесных узлов включает, в частности, все твистованные, двухмостовые и претцельные узлы. Это означает, что все простые узлы, вплоть до 7 пересечений, являются арборисцентными поскольку все они двухмостовые. Среди узлов с 8 пересечениями единственный простой узел, не являющийся арборисцентным, - это  $8_{18}$ . Далее по таблице Рольфсена, среди узлов с 9 пересечениями только  $9_{34}$ ,  $9_{39}$ ,  $9_{40}$ ,  $9_{41}$ ,  $9_{47}$ ,  $9_{49}$  не древесные. Наконец, среди узлов с 10 пересечениями  $10_{100}$  -  $10_{123}$  и  $10_{155}$  -  $10_{165}$  не являются арборисцентными (многогранными).

Мы также демонстрируем целочисленные структуры ЛМОВ для группы  $SU(N)$  и представлений вплоть до четырех ящиков в диаграмме Юнга. Это позволяет выявить яркую особенность чисел ЛМОВ: оказывается, что с очень высокой точностью числа ЛМОВ оказались распределенными по закону Гаусса как функции рода  $g$ ! Пока что это просто наблюдение, которое было проверено для различных узлов<sup>1</sup>, и до сих пор не было найдено никаких исключений.

## 4.2 Гипотеза ЛМОВ: условия целочисленности

### 4.2.1 Гипотеза целочисленности в случае полиномов ХОМФЛИ

Как мы объяснили во введении, разложение по родам в теории узлов определяется с помощью калибровочно-струнной дуальности [94; 238]. То есть  $U(N)$  теория Черна-Саймонса на трехмерном многообразии  $S^3$  эквивалентна топологической теории струн на многообразии Калаби-Яу, которое является разрешением конифолда. Математическое ожидание скалярного оператора Оогури-

---

<sup>1</sup>Мы проверили его для всех древесных узлов, которые имеют представление трехнитевой косы:  $3_1$ ,  $4_1$ ,  $5_1$ ,  $5_2$ ,  $6_2$ ,  $6_3$ ,  $7_1$ ,  $7_3$ ,  $7_5$ ,  $8_2$ ,  $8_5$ ,  $8_7$ ,  $8_9$ ,  $8_{10}$ ,  $8_{16}$ ,  $8_{17}$ ,  $8_{18}$ ,  $8_{19}$ ,  $8_{20}$ ,  $8_{21}$  (см. Раздел 3.9) для  $T[2, 2k + 1]$  и серии торических узлов  $T[3, 3k + 1]$ , а также для пары мутантов  $11n41$  и  $11n47$ .

Вафа связанные с узлами в  $S^3$ ,

$$\mathcal{Z}_{SU(N)}^{\mathcal{K}}\{A, q | \bar{p}\} = \sum_R H_R^{\mathcal{K}}(A, q) \cdot \chi_R\{\bar{p}\} \quad (4.18)$$

которая является производящей функцией ненормированных полиномов ХОМФЛИ  $H_R^{\mathcal{K}}(A, q)$ , приводит к статсумме открытой топологической струны в  $A$ -модели. Фактически, логарифм оператора можно интерпретировать как "связанные" корреляторы  $f_R(q, A)$  следующим образом:

$$\log \mathcal{Z}_{SU}^{\mathcal{K}}\{A, q | \bar{p}\} = \sum_R \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} f_R^{\mathcal{K}}(A^d, q^d) \cdot \widehat{A}d_d \chi_R\{\bar{p}\} \quad (4.19)$$

Мы называем новые величины  $f_R$  *плетистическими преобразованиями сопряженных полиномов ХОМФЛИ* по причинам, изложенным во введении. Обратите внимание, что соотношение (4.14) может быть обращено, что приведет к построению обратного преобразования плетизма, как это выполнено в [164]:

$$\begin{aligned} f_R^{\mathcal{K}}(A, q) &= \\ &= \sum_{d, m=1} (-1)^{m-1} \frac{\mu(d)}{md} \sum_{\Delta_1, \dots, \Delta_m} \widehat{A}d_d \psi_R\left(\sum_{i=1}^m \Delta_i\right) \cdot \sum_{R_1, \dots, R_m} \prod_{j=1}^m \frac{\psi_{R_j}(\Delta_j)}{z_{\Delta_j}} H_{R_j}^{\mathcal{K}}(A^d, q^d), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где сумма двух диаграмм Юнга  $\Delta$  и  $\Delta'$  - это диаграмма Юнга со строками  $\{\delta_i, \delta'_i\}$  с правильным переупорядочением,  $\widehat{A}d_d \Delta = \widehat{A}d_d \{\delta_i\} = \{d\delta_i\}$  и  $\mu(d)$  - функция Мебиуса, определяемая следующим образом: если разложение на простые числа для числа  $d$  состоит из  $m$  множителей и содержит неединичные кратности,  $\mu(d) = 0$ , в противном случае  $\mu(d) = (-1)^m$ . Для представлений до четырех ящиков в диаграмме Юнга явная форма приведенного выше уравнения будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
f_{[1]} &= H_{[1]}(q, A) \\
f_{[2]} &= H_{[2]}(q, A) - \frac{1}{2} \left( H_{[1]}(q, A)^2 + H_{[1]}(q^2, A^2) \right) \\
f_{[1^2]} &= H_{[1^2]}(q, A) - \frac{1}{2} \left( H_{[1]}(q, A)^2 - H_{[1]}(q^2, A^2) \right) \\
f_{[3]} &= H_{[3]} - H_{[2]}H_{[1]} + \frac{1}{3}H_{[1]}^3 - \frac{1}{3}H_{[1]}(A^3, q^3) \\
f_{[2,1]} &= H_{[2,1]} - H_{[2]}H_{[1]} - H_{[1^2]}H_{[1]} + \frac{2}{3}H_{[1]}^3 - \frac{1}{3}H_{[1]}(A^3, q^3) \\
f_{[1^3]} &= H_{[1^3]} - H_{[1^2]}H_{[1]} + \frac{1}{3}H_{[1]}^3 - \frac{1}{3}H_{[1]}(A^3, q^3) \\
f_{[4]} &= H_{[4]} - H_{[3]}H_{[1]} + H_{[2]}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}H_{[2]}^2 - \frac{1}{4}H_{[1]}^4 - \frac{1}{2}H_{[2]}(A^2, q^2) + \frac{1}{4}H_{[1]}^2(A^2, q^2) \\
f_{[3,1]} &= H_{[3,1]} - H_{[3]}H_{[1]} - H_{[2,1]}H_{[1]} - H_{[2]}H_{[1^2]} + 2H_{[2]}H_{[1]}^2 + H_{[1^2]}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}H_{[2]}^2 - \frac{3}{4}H_{[1]}^4 + \\
&\quad + \frac{1}{2}H_{[2]}(A^2, q^2) - \frac{1}{4}H_{[1]}^2(A^2, q^2) \\
f_{[2^2]} &= H_{[2^2]} - H_{[2,1]}H_{[1]} + H_{[2]}H_{[1]}^2 + H_{[1^2]}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}H_{[2]}^2 - \frac{1}{2}H_{[1^2]}^2 - \frac{1}{2}H_{[1]}^4 - \frac{1}{2}H_{[2]}(A^2, q^2) - \\
&\quad - \frac{1}{2}H_{[1^2]}(A^2, q^2) + \frac{1}{2}H_{[1]}^2(A^2, q^2) \\
f_{[2,1^2]} &= H_{[2,1^2]} - H_{[1^3]}H_{[1]} - H_{[2,1]}H_{[1]} - H_{[2]}H_{[1^2]} + 2H_{[1^2]}H_{[1]}^2 + H_{[2]}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}H_{[2]}^2 - \frac{3}{4}H_{[1]}^4 + \\
&\quad + \frac{1}{2}H_{[1^2]}(A^2, q^2) - \frac{1}{4}H_{[1]}^2(A^2, q^2) \\
f_{[1^4]} &= H_{[1^4]} - H_{[1^3]}H_{[1]} + H_{[1^2]}H_{[1]}^2 - \frac{1}{2}H_{[1^2]}^2 - \frac{1}{4}H_{[1]}^4 - \frac{1}{2}H_{[2]}(A^2, q^2) + \frac{1}{4}H_{[1]}^2(A^2, q^2)
\end{aligned}$$

Теперь разложение полинома ХОМФЛИ переводится в аналогичное разложение плетистического полинома:

$$f_R(q, A) = \sum_{n,k} \tilde{\mathbf{N}}_{R,n,k} \frac{A^n q^k}{q - q^{-1}} \quad (4.21)$$

Несмотря на то, что ХОМФЛИ-ПТ ведет себя как  $1/(q - q^{-1})^{|R|}$ , переформулированный инвариант  $f_R(q, A)$  имеет только особенность  $1/(q - q^{-1})$ .

Фактически, единственный способ проверить эту дуальность между теориями Черна-Саймонса и топологической теорией струн - это установить условие целочисленности: коэффициенты  $\tilde{\mathbf{N}}_{R,n,k}$  должны быть целыми числами в соответствии с гипотезой Оогури-Вафа [238]. Более того, как мы объяснили во введении, можно построить более тонкие целые числа (4.14) [161]:

$$f_R(q, A) = \sum_{n,k \geq 0, Q} C_{RQ} \mathbf{N}_{Q,n,k} A^n (q - q^{-1})^{2k-1} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} C_{RQ} &= \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_Q(\Delta) \frac{\prod_{i=1}^{l(\Delta)} (q^{\delta_i} - q^{-\delta_i})}{q - q^{-1}} = \\ &= \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_Q(\Delta) {}^*p_{\Delta} \end{aligned} \quad (4.23)$$

а новые величины определены следующим образом  ${}^*p_k \equiv q^k - q^{-k}$ . Чтобы сравнить эту формулу с (4.14), нужно использовать соотношение

$$\sum_R \psi_R(\Delta) \chi_R(p) = p_{\Delta}$$

Вышеупомянутая матрица может быть обращена, используя формулу (4.95):

$$\left(C^{-1}\right)_{QR} = \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_Q(\Delta) \frac{q - q^{-1}}{{}^*p_{\Delta}} \quad (4.24)$$

Отметим, что имеет место следующая иерархия : слабейшим является утверждение, что полиномы ХОМФЛИ целочисленные. Следующий уровень - это целочисленность  $\tilde{\mathbf{N}}_{R,n,k}$ , что подразумевает целочисленность полиномов ХОМФЛИ, но не наоборот. Однако величины  $\tilde{\mathbf{N}}_{R,n,k}$  не являются независимыми: они удовлетворяют некоторым соотношениям [160], а более тонкие инварианты  $\mathbf{N}_{R,n,k}$  - являются независимыми и их целочисленность влечет за собой целочисленность  $\tilde{\mathbf{N}}_{R,n,k}$ , но не наоборот. Это означает, что  $\mathbf{N}_{R,n,k}$  в некотором смысле являются элементарными строительными блоками. Их целочисленность с точки зрения теории узлов совсем не очевидна. Замечательный факт, что инварианты БПС  $\mathbf{N}_{R,n,k}$  линейно зависимы с инвариантами Гопакумара-Вафы  $\mathbf{n}_{\Delta,n,k}$  [94]:

$$\mathbf{n}_{\Delta,n,k} = \sum_R \psi_R(\Delta) \mathbf{N}_{R,n,k}, \quad \mathbf{N}_{R,n,k} = \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \mathbf{n}_{\Delta,n,k} \quad (4.25)$$

а целочисленность  $\mathbf{n}_{\Delta,n,k}$  следует из целочисленности  $\mathbf{N}_{R,n,k}$ , но не наоборот. Целочисленность коэффициентов  $\mathbf{N}_{Q,n,k}$  проверялась в [37; 268; 269], а также в общем случае доказывалась в [175]. Однако в качестве иллюстрации мы вычислили все  $\mathbf{N}_{Q,n,k}$  с  $|Q| \leq 4$  для трехнитевых узлов из таблице Рольфсена [28] и явно проверили их целочисленность. Мы обсудим это в разделе 4.3.1.

**Зависимость от фрейминга.** Явные ответы для функций  $f_R(q, A)$  и, следовательно, для всех целых чисел зависят от выбора фрейминга. Примечательно,

что эту зависимость можно описать действием оператора разрезания и склейки и *это почти не влияет* на целочисленность: целые числа остаются целыми [179] при любом фрейминге с небольшим дополнительным перескалыванием полиномов ХОМФЛИ, входящих в определение (4.18), хотя зависимость целых чисел от фрейминга довольно странная (см. примеры в [179, sec.4.3]<sup>2</sup>). Суммарный коэффициент фрейминга содержит два множителя:  $A^{p|R|}$  и  $q^{2p\varphi_R([2])}$  ( $\varphi_R([2])$  пропорционален квадратичному Казимиру), где  $p$  - произвольное целое число. Первый множитель тривиален, поскольку он удаляется заменой  $\bar{p}_k \rightarrow A^p \bar{p}_k$  в (4.19), т.е. приводит к тривиальному множителю  $A^{p|R|}$  в  $f_R(q, A)$ . Вторым фактором менее тривиален. Что более важно, чтобы сохранить целочисленность, нужно изменить определение (4.18), сделав его немного зависимым от фрейминга: нужно умножить входящие в него полиномы ХОМФЛИ на дополнительный коэффициент фрейминга:  $H_R^K(A, q) \rightarrow (-1)^{p|R|} H_R^K(A, q)$ , [5].

На самом деле, зависимость от фрейминга для узлов и зацеплений различна. Для узлов существует выделенный *топологический фрейминг* (стандартный фрейминг), и мы приводим ниже все ответы для *этого* выбора фрейминга. Для зацеплений не существует никакого выделенного «взаимного» фрейминга различных компонент зацепления. Кроме того, здесь следует дополнительно позаботиться о том, чтобы полиномы ХОМФЛИ и Кауффмана вычислялись в одном и том же фрейминге. Есть еще одна тонкость - это фактор, нормировка различающая нормированные и ненормированные полиномы узлов. В то время как в случае ХОМФЛИ они различаются только соответствующими квантовыми размерностями, нормированный многочлен Кауффмана зацепления связан с ненормированным путем умножения на квантовую размерность  $u$  на множитель  $A^{-2\text{lk}(\mathcal{L})}$ , где  $\text{lk}(\mathcal{L})$  - число зацепления.

Заметим, что для фиксации обозначений в случае зацеплений можно использовать *вертикальный фрейминг*, что означает, что все  $\mathcal{R}$  - матрицы получаются из одной *универсальной*. Эта процедура фиксирует обозначения, но она *отличается* от топологического фрейминга для узлов. К счастью, соотношение в этом случае очень простое: для узлов  $H_R^{\mathcal{K}, \text{top}} = A^{-w|R|} q^{-4w\varphi_R([2])} \cdot H_R^{\mathcal{K}, \text{vert}}$ , где  $w$  - число закрученности.

<sup>2</sup>Обратите внимание на опечатку в таблице 8 в [179, sec.4.3]: во второй строке таблицы должно быть  $-8 - 5p - 3p^2$  вместо  $-8 - 5p - p^2$ .

### 4.2.2 Гипотеза целочисленности в случае полиномов Кауффмана

Естественным обобщением описанного соответствия является эквивалентность теории  $SO/Sp$  Черна-Саймонса и топологической теории струн на ориентфолде малого разрешения конифолда [228; 293]. В этом случае статсумма Черна-Саймонса связана с двумя типами вкладов: от ориентированных и неориентированных струн, причем первые имеют степень  $1/2^3$ :

$$\mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{K}}\{A, q | \bar{p}\} = Z_{no} \sqrt{Z_o} \quad (4.26)$$

Таким образом, можно ожидать, что

- Статсумма ориентированных струн  $Z_o$  индуцирует условие целочисленности.
- Статсумма неориентированных струн  $Z_{no}$  также индуцирует другое условие целочисленности.

Кратко рассмотрим необходимые шаги: Ориентированная статсумма задается производящей функцией полиномов ХОМФЛИ от составных представлений [181]:

$$Z_o\{A, q | \bar{p}\} = \sum_{R, S} H_{(R, S)}^{\mathcal{K}}(A, q) \cdot \chi_R\{\bar{p}\} \chi_S\{\bar{p}\} \quad (4.27)$$

Заметим, что сумма во втором случае берется по двойному набору диаграмм Юнга, но имеет место единый набор временных переменных  $\bar{p}$ . Из этой статсуммы строится свободная энергия, которая снова равна сумме по диаграммам Юнга,

$$\log Z_o\{A, q | \bar{p}\} = \sum_R \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} h_R^{\mathcal{K}}(A^d, q^d) \cdot \widehat{Ad}_d \chi_R\{\bar{p}\} \quad (4.28)$$

---

<sup>3</sup>Эта формула выглядит вполне естественной из-за теоремы Рудольфа-Мортон-Райдера, [214; 218; 284]:

$$\left(K_R^{\mathcal{K}}\right)^2 = H_{R, R} \pmod{2}$$

где "mod 2" означает, что целые коэффициенты полиномов Лорана в этой формуле берутся по модулю 2,  $K_R$  - это полином узла Кауффмана, а  $H_{R, S}$  - полином ХОМФЛИ в составном представлении [154]. Фактически, теорема Рудольфа-Мортон-Райдера непосредственно следует из условий целочисленности, см. [181].

и первые члены разложения выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
h_{[1]}^{\mathcal{K}}(A,q) &= 2H_{[1]}(A,q) \\
h_{[2]}^{\mathcal{K}}(A,q) &= 2H_{[2]}(A,q) + H_{([1],[1])}(A,q) - 2\left(H_{[1]}(A,q)\right)^2 - H_{[1]}(A^2,q^2) \\
h_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(A,q) &= 2H_{[1,1]}(A,q) + H_{([1],[1])}(A,q) - 2\left(H_{[1]}(A,q)\right)^2 + H_{[1]}(A^2,q^2) \\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Зеркальная симметрия позволяет выразить узловые полиномы друг через друга, если их представления связаны транспонированием:

$$H_{R^{tr}}(A,q) = H_R(A, -q^{-1}) \tag{4.30}$$

Тем не менее, приложения зеркальной симметрии для  $h_R$  не очевидны. Заметим, что смена знака в (4.30) появляется в ходе выполнения преобразования Адамса в (4.28). Утонченное условие целочисленности может быть получено в новых терминах:

$$h_R(q,A) = \sum_{n,k \geq 0, Q} C_{RQ} \hat{\mathbf{N}}_{Q,n,k}^{c=0} A^n (q - q^{-1})^{2k-1} \tag{4.31}$$

где верхний индекс  $c$  обозначает вклад от римановой поверхности с  $c$  пленками Мебиуса [36; 38]. Чтобы вычислить неориентированную статсумму нужно посчитать следующую величину

$$Z_{no} = \frac{\mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{K}}\{A,q|\bar{p}\}}{\sqrt{Z_o}} \tag{4.32}$$

где в числителе стоит производящая функция (ненормированных) полиномов Кауффмана

$$\mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{K}}\{A,q|\bar{p}\} = \sum_R K_R^{\mathcal{K}}(A,q) \cdot \chi_R\{\bar{p}\} \tag{4.33}$$

а статсумма  $Z_o$  дается полиномами ХОМФЛИ в составных представлениях, (4.27). Следовательно, получается

$$\begin{aligned}
\log Z_{no}\{A,q|\bar{p}\} &= \log \mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{K}}\{A,q|\bar{p}\} - \frac{1}{2} \log Z_o\{A,q|\bar{p}\} = \\
&= \sum_R \sum_{d \geq 1, \text{ odd}}^{\infty} \frac{1}{d} g_R^{\mathcal{K}}(A^d, q^d) \cdot \widehat{Ad}_d \chi_R\{\bar{p}\}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где первые члены разложения имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{[1]}^{\mathcal{K}}(A, q) &= K_{[1]}(A, q) - H_{[1]}(A, q) \\
g_{[2]}^{\mathcal{K}}(A, q) &= K_{[2]}(A, q) - \frac{1}{2} \left( K_{[1]}(A, q) \right)^2 - H_{[2]}(A, q) + \left( H_{[1]}(A, q) \right)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} H_{([1],[1])}(A, q) \\
g_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(A, q) &= K_{[1,1]}(A, q) - \frac{1}{2} \left( K_{[1]}(A, q) \right)^2 - H_{[1,1]}(A, q) + \left( H_{[1]}(A, q) \right)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} H_{([1],[1])}(A, q) \\
&\dots
\end{aligned}$$

и условие целочисленности дается следующим выражением

$$g_R(q, A) = \sum_{n, k \geq 0, Q} C_{RQ} \left( \hat{\mathbf{N}}_{Q, n, k}^{c=1} A^n (q - q^{-1})^{2k} + \hat{\mathbf{N}}_{Q, n, k}^{c=2} A^n (q - q^{-1})^{2k+1} \right) \quad (4.35)$$

Вышеизложенные рассуждения для узлов могут быть обобщены на двухкомпонентные зацепления. Нужный оператор для таких зацеплений выразится в виде

$$Z_o\{A, q | p, \bar{p}\} = \sum_{R, S} H_{(R_1, S_1)(R_2, S_2)}^{\mathcal{L}}(A, q) \cdot \chi_{R_1}\{p\} \chi_{S_1}\{p\} \cdot \chi_{R_2}\{\bar{p}\} \chi_{S_2}\{\bar{p}\} \quad (4.36)$$

$$\log Z_o\{A, q | p, \bar{p}\} = \sum_R \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} h_{R_1, R_2}^{\mathcal{L}}(A^d, q^d) \cdot \widehat{A}d_d \chi_{R_1}\{p\} \cdot \widehat{A}d_d \chi_{R_2}\{\bar{p}\} \quad (4.37)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{L}}\{A, q | p, \bar{p}\} &= \sum_{R_1, R_2} K_{R_1, R_2}^{\mathcal{L}}(A, q) \cdot \chi_{R_1}\{p\} \chi_{R_2}\{\bar{p}\} \\
\log Z_{no}\{A, q | p, \bar{p}\} &= \log \mathcal{Z}_{SO/Sp}^{\mathcal{L}}\{A, q | p, \bar{p}\} - \frac{1}{2} \log Z_o\{A, q | p, \bar{p}\} \\
&= \sum_R \sum_{d \geq 1, \text{ odd}} \frac{1}{d} g_{R_1, R_2}^{\mathcal{K}}(A^d, q^d) \cdot \widehat{A}d_d \chi_{R_1}\{p\} \cdot \widehat{A}d_d \chi_{R_2}\{\bar{p}\} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Таким образом, явный вид для ориентированных инвариантов  $h_{R_1, R_2}$  для некоторых представлений

$$\begin{aligned}
h_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} &= 2H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} + 2H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} - 4H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} & (4.39) \\
h_{[2],[1]}^{\mathcal{L}} &= 2H_{[2],[1]}^{\mathcal{L}} + 2H_{[2],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} + 2H_{([1],[1]),[1]}^{\mathcal{L}} - 4H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} - 4H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \\
&\quad - 4H_{[2]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} - 2H_{([1],[1])}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + 8 \left( H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} \\
h_{[1,1],[1]}^{\mathcal{L}} &= 2H_{([1,1],[1])}^{\mathcal{L}} + 2H_{[1,1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} + 2H_{([1,1],[1]),[1]}^{\mathcal{L}} - 4H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} - 4H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \\
&\quad - 4H_{[1,1]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} - 2H_{([1],[1])}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + 8 \left( H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

аналогично, для случая полиномов Кауффмана

$$\begin{aligned}
g_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} &= K_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} - K_{[1]}^{\mathcal{K}_1} K_{[1]}^{\mathcal{K}_2} - H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} - H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} + 2H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} & (4.40) \\
g_{[2],[1]}^{\mathcal{L}} &= K_{[2],[1]}^{\mathcal{L}} - H_{[2],[1]} - H_{[2],[1]}^{\mathcal{L}} - H_{[2],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} - K_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} K_{[1]}^{\mathcal{K}_1} - K_{[2]}^{\mathcal{K}_1} K_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + 2H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \\
&\quad + 2H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} + 2H_{[2]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + H_{([1],[1])}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + \left( K_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 K_{[1]}^{\mathcal{K}_2} - 4 \left( H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} \\
g_{[1,1],[1]}^{\mathcal{L}} &= K_{[1,1],[1]}^{\mathcal{L}} - H_{[1,1],[1]} - H_{[1,1],[1]}^{\mathcal{L}} - H_{[1,1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} - K_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} K_{[1]}^{\mathcal{K}_1} - K_{[1,1]}^{\mathcal{K}_1} K_{[1]}^{\mathcal{K}_2} \\
&\quad + 2H_{[1],[1]}^{\mathcal{L}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} + 2H_{[1],[1]}^{\bar{\mathcal{L}}} H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} + 2H_{[1,1]}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + H_{([1],[1])}^{\mathcal{K}_1} H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} + \left( K_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 K_{[1]}^{\mathcal{K}_2} - \\
&\quad \quad \quad - 4 \left( H_{[1]}^{\mathcal{K}_1} \right)^2 H_{[1]}^{\mathcal{K}_2} \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

где  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  - компоненты зацепления, а  $\bar{\mathcal{L}}$  обозначает зацепление, полученное из  $\mathcal{L}$  путем изменения ориентации одного из его компонентов. Эти разложения связаны с двумя соответствующими условиями целочисленности:

$$h_{R_1, R_2}(q, A) = \sum_{n, k \geq 0, Q_1, Q_2} C_{R_1 Q_1} C_{R_2 Q_2} \hat{\mathbf{N}}_{Q_1, Q_2, n, k}^{c=0} A^n (q - q^{-1})^{2k} \quad (4.41)$$

и

$$\begin{aligned}
&g_{R_1, R_2}(q, A) = & (4.42) \\
= \sum_{n, k \geq 0, Q_1, Q_2} C_{R_1 Q_1} C_{R_2 Q_2} &\left( \hat{\mathbf{N}}_{Q_1, Q_2, n, k}^{c=1} A^n (q - q^{-1})^{2k+1} + \hat{\mathbf{N}}_{Q_1, Q_2, n, k}^{c=2} A^n (q - q^{-1})^{2k+2} \right)
\end{aligned}$$

Заметим, что в случае зацепления  $h$  и  $g$  должны содержать дополнительные степени  $q - q^{-1}$  при  $q \rightarrow 1$  по сравнению со случаем узла. Рассмотренные условия целочисленности для неориентированных топологических струнных амплитуд были предложены в виде гипотезы в работе [181] и проверены для

$(2, 2m + 1)$  торических узлов. Теперь, благодаря нашим недавним результатам в вычислении цветных полиномов узлов для присоединенных представлений для древесных узлов и недревесных узлов, полученных из трехнитевой косы, мы могли бы предоставить дополнительные свидетельства в пользу гипотезы целочисленности.

Основная цель данного раздела - вычислить коэффициенты  $N$  для широкого класса узлов/зацеплений и проверить их свойства целочисленности. Наши результаты для многих узлов и зацеплений можно рассматривать как прямое продолжение Приложения Б в работе [228] для узла-восьмерки, где теория изложена подробно с соответствующими ссылками.

### 4.2.3 База данных цветных полиномов узлов

Как мы уже не раз упоминали, данные о цветных полиномах узлов собраны на нашем веб-сайте [150]. Мы кратко опишем здесь структуру этого сайта.

По сути, он состоит из трех больших частей (помимо ссылок на другие таблицы узлов, которые содержат только неокрашенные полиномы узлов, за заметным исключением цветных полиномов Джонса): первая часть содержит описание некоторых важных семейств узлов и зацеплений; вторая содержит теоретическую часть со ссылками на статьи, полезные для вычисления цветных полиномов; и наиболее важная третья часть содержит базу данных: матрицы Рака и смешивания, которые позволяют вычислять полиномы узлов.

Результаты следующие: (i) полиномы ХОМФЛИ [151], (ii) для полиномы Кауффмана [152] и (iii) универсальные полиномы [153]. Большинство результатов относятся либо к узлам из таблицы Рольфсена, либо к специальным семействам узлов. Поскольку случай полиномов ХОМФЛИ является наиболее развитым, раздел (i) содержит, помимо самих полиномов, некоторую дополнительную информацию о структуре ответов, в основном связанную с их дифференциальным разложением. Наконец, этот раздел содержит целые числа ЛМОВ до четвертого уровня для всех древесных узлов из таблицы Рольфсена с не более чем 8 пересечениями, которые имеют представление трехнитевой косы. Это следующие узлы:  $3_1, 4_1, 5_1, 5_2, 6_2, 6_3, 7_1, 7_3, 7_5, 8_2, 8_5, 8_7, 8_9, 8_{10}, 8_{16}, 8_{17}, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}$ . В свою очередь раздел (ii) содержит меньше информации. А имен-

но, помимо полиномов Кауффмана, в раздел включены целые числа ЛМОВ до второго уровня для того же набора узлов. Данные таблицы чисел ЛМОВ - это в точности результаты настоящей работы.

### 4.3 Проверки гипотез о целочисленности

#### 4.3.1 $SU(N)$ теория Черна-Саймонса

Как обсуждалось во введении, гипотеза целочисленности (4.22), известная как условие ЛМОВ, была доказана в [175]. Наша цель в этом разделе - записать целочисленные коэффициенты для представлений  $Q$ , для которых  $|Q| \leq 4$ . Полиномы ХОМФЛИ для этих представлений и список целых чисел для других узлов из таблицы Рольфсена [28] можно найти в [150]. Здесь мы представляем вычисления чисел ЛМОВ для узла  $8_{20}$  из таблицы Рольфсена. Данный узел  $8_{20}$  является древесным, более того его можно получить из трехнитевой косы. Причина нашего выбора заключается в том, что эксклюзивные матрицы Рака, необходимые для вычисления древесных узлов, пока недоступны для представления [3,1], в то время как инклюзивные матрицы Рака в этом представлении известны [117]. Следовательно, целые числа в представлениях до четвертого уровня могут быть построены только для узлов, которые имеют представления трехнитевой косы. Ответы для этих чисел приведены в таблицах ниже.

Можно подумать, что целочисленность чисел ЛМОВ тривиально следует из целочисленности коэффициентов полинома ХОМФЛИ. На самом деле, это совершенно нетривиально: если рассматривать только полиномы ХОМФЛИ, масштабированные с использованием коэффициента фрейминга  $(-1)^{|R|} q^{2p\Phi_R([2])}$ , мы видим, что эти полиномы ХОМФЛИ также обладают свойством целочисленности. Например, один из зависимых от  $p$  коэффициентов, умноженный на  $A^{-2}(q - q^{-1})^9$ , равен

$$N_{[2], -2,6} = \frac{1}{3832012800} \left( 148p^{12} - 2736p^{11} + 79112p^{10} - 831600p^9 + 10539474p^8 - 68756688p^7 + \right. \\ \left. + 436908296p^6 - 1721451600p^5 + 5409488128p^4 - 11272637376p^3 + 15223732992p^2 + \right. \\ \left. + 2338875 \cdot (-1)^p - 11844403200p + 3829673925 \right) \quad (4.43)$$

Заметим, что огромный знаменатель  $3832012800 = 12!2^3$  сокращается числителем для целых значений  $p$ . Далее мы наблюдаем, что количество ненулевых целых чисел увеличивается с увеличением  $|p|$ , начиная с достаточно больших значений  $p$ , а сами целые числа отмечают удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, например

$$N_{[p]}(p) = (-1)^p N_{[1^p]}(p+1) \quad (4.44)$$

Глядя на приведенные ниже таблицы, можно отметить два интересных свойства: все числа в каждом столбце имеют одинаковый знак (он чередуется с поворотом на некоторое значение), а сумма всех коэффициентов в каждой строке равна нулю. Первое свойство, хотя и является очень часто правильным, все же иногда нарушается: например, для твистованных узлов (которые имеют максимальный индекс косы при заданном количестве пересечений), начиная с узла  $6_1$ , уже для диаграмм Юнга на уровне 2. Второе свойство следует из того факта, что ненормированные полиномы ХОМФЛИ зануляются при  $A = 1$ , а значит, и  $f_R$  (4.22). Из последней формулы и того факта, что  $\psi_R(\Delta)$  являются характерами симметрической группы и, следовательно, линейно независимы, следует, что

$$\sum_n N_{\mathbf{Q},n,k} = 0 \quad (4.45)$$

по крайней мере вплоть до уровня  $|Q| = 4$ , где  $*p_\Delta$  все независимы.

**Узел  $8_{20}$ :**

$\mathbf{N}_{[1]} :$	$k \setminus n =$	-5	-3	-1	1
	0	2	-6	5	-1
	1	1	-5	5	-1
	2	0	-1	1	0

$$\mathbf{N}_{[2]} :$$

$k \setminus n =$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2
0	16	-73	131	-114	46	-5	-1
1	50	-231	400	-319	111	-10	-1
2	63	-309	521	-373	104	-6	0
3	37	-212	359	-231	48	-1	0
4	10	-77	135	-79	11	0	0
5	1	-14	26	-14	1	0	0
6	0	-1	2	-1	0	0	0

$$\mathbf{N}_{[1,1]} :$$

$k \setminus n =$	-10	-8	-6	-4	-2	0
0	25	-115	210	-190	85	-15
1	95	-440	775	-645	250	-35
2	155	-743	1267	-953	302	-28
3	129	-680	1148	-781	193	-9
4	56	-354	607	-377	69	-1
5	12	-104	185	-106	13	0
6	1	-16	30	-16	1	0
7	0	-1	2	-1	0	0

$$\mathbf{N}_{[3]} :$$

$k \setminus n =$	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3
0	352	-2125	5468	-7791	6673	-3470	1022	-111	-27	9
1	3256	-18695	44944	-58584	44782	-20245	5097	-473	-123	41
2	14770	-81370	183559	-218724	147871	-56664	11559	-853	-209	61
3	41511	-222579	475465	-520438	310866	-99510	15655	-842	-165	37
4	77904	-414115	847003	-857240	453256	-120239	13971	-484	-66	10
5	101052	-543578	1076296	-1013191	474743	-103702	8552	-160	-13	1
6	92372	-514010	995015	-874977	362651	-64643	3621	-28	-1	0
7	60098	-354425	676451	-557025	202945	-29084	1042	-2	0	0
8	27855	-179063	339359	-261883	82860	-9322	194	0	0	0
9	9107	-66077	125094	-90413	24338	-2070	21	0	0	0
10	2048	-17576	33405	-22574	4998	-302	1	0	0	0
11	301	-3277	6279	-3957	680	-26	0	0	0	0
12	26	-406	787	-461	55	-1	0	0	0	0
13	1	-30	59	-32	2	0	0	0	0	0
14	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0

$\mathbf{N}_{[2,1]}$  :

$k \setminus n =$	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3
0	1096	-6812	18055	-26511	23427	-12647	4021	-661	25	7
1	11740	-69190	171467	-231418	183976	-86971	23475	-3220	118	23
2	62734	-352952	820140	-1016046	721600	-293594	64694	-6802	204	22
3	211059	-1148176	2521968	-2880042	1826520	-634085	110761	-8177	164	8
4	482979	-2581587	5415098	-5735572	3255233	-960113	130062	-6167	66	1
5	780717	-4170723	8440154	-8341780	4245634	-1060226	109232	-3021	13	0
6	912409	-4956911	9766956	-9052011	4133483	-869612	66643	-958	1	0
7	782632	-4402394	8512833	-7424291	3035652	-533774	29531	-189	0	0
8	496928	-2950758	5637051	-4636024	1688623	-245177	9378	-21	0	0
9	234028	-1499349	2845722	-2209021	710203	-83655	2073	-1	0	0
10	81306	-576851	1092898	-800716	223914	-20853	302	0	0	0
11	20526	-166688	316505	-218681	51995	-3683	26	0	0	0
12	3656	-35556	67891	-44172	8616	-436	1	0	0	0
13	435	-5426	10448	-6389	963	-31	0	0	0	0
14	31	-560	1090	-625	65	-1	0	0	0	0
15	1	-35	69	-37	2	0	0	0	0	0
16	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0

$\mathbf{N}_{[1,1,1]}$  :

$k \setminus n =$	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1
0	817	-5202	14122	-21247	19265	-10712	3552	-647	52
1	9896	-59591	151295	-209830	172040	-84226	23656	-3445	205
2	60278	-345235	821309	-1048249	772553	-328797	76150	-8309	300
3	232831	-1283378	2881690	-3396607	2249185	-827003	155091	-12020	211
4	616432	-3318766	7100687	-7772468	4632525	-1466503	219517	-11501	77
5	1162736	-6209959	12783754	-13070245	7025091	-1908577	224707	-7521	14
6	1600769	-8613912	17213476	-16520487	8014837	-1860533	169213	-3364	1
7	1634944	-9004917	17603582	-15919558	6965468	-1372676	94164	-1007	0
8	1251705	-7174091	13810549	-11798458	4641249	-769287	38525	-192	0
9	721849	-4384030	8357680	-6754633	2374468	-326722	11409	-21	0
10	313286	-2058624	3905215	-2987163	929118	-104204	2373	-1	0
11	101531	-740262	1403124	-1015440	275229	-24510	328	0	0
12	24156	-201838	383609	-262392	60556	-4118	27	0	0
13	4090	-40952	78280	-50529	9577	-467	1	0	0
14	466	-5985	11536	-7013	1028	-32	0	0	0
15	32	-595	1159	-662	67	-1	0	0	0
16	1	-36	71	-38	2	0	0	0	0
17	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0

### 4.3.2 $SO/Sp$ теория Черна-Саймонса

В данном случае целые числа (4.31) и (4.35) могут быть вычислены для меньшего количества представлений по сравнению со случаем ХОМФЛИ, поскольку полиномы ХОМФЛИ в составных представлениях пока недоступны за исключением присоединенного представления. Ответы для случаев Кауффмана и ХОМФЛИ можно получить сразу из универсальных присоединенных полиномов узлов, [186; 190]. Их явные выражения, а также полиномы Кауффмана и ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, первом симметричном и первом антисимметричном представлениях, которые также необходимы в этом случае, можно найти в [150]. Универсальные полиномы узлов пока построены только для древесных узлов. Поскольку узел  $8_{20}$ , использованный в качестве примера в предыдущем разделе, является древесным, мы приводим целые числа ЛМОВ для этого узла (результаты для других древесных узлов можно найти на сайте [150]). На самом деле узел  $8_{20}$  обладает необычным свойством: для него выполнено  $\hat{\mathbf{N}}_{[1]}^{c=2} = 0$ . Это свойство было высказано в качестве гипотезы [300] для торических узлов, однако оказалось, что оно верно и для некоторых других узлов, хотя встречается не слишком часто: в таблице Рольфсена [28] только узлы  $5_2, 7_1, 8_{20}, 9_1, 10_{125}, 10_{128}, 10_{132}, 10_{139}, 10_{161}$  и некоторые торические узлы  $3_1, 5_1, 8_{19}, 10_{124}$  уважают это свойство.

**Узел  $8_{20}$ :**

$\hat{\mathbf{N}}_{[1]}^{c=0} :$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th><math>k \setminus n =</math></th><th>-5</th><th>-3</th><th>-1</th><th>1</th></tr> <tr><th>0</th><td>4</td><td>-12</td><td>10</td><td>-2</td></tr> <tr><th>1</th><td>2</td><td>-10</td><td>10</td><td>-2</td></tr> <tr><th>2</th><td>0</td><td>-2</td><td>2</td><td>0</td></tr> </table>	$k \setminus n =$	-5	-3	-1	1	0	4	-12	10	-2	1	2	-10	10	-2	2	0	-2	2	0	$\hat{\mathbf{N}}_{[1]}^{c=1} :$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th><math>k \setminus n =</math></th><th>-6</th><th>-4</th><th>-2</th><th>0</th><th>2</th></tr> <tr><th>0</th><td>3</td><td>-10</td><td>12</td><td>-5</td><td>1</td></tr> <tr><th>1</th><td>4</td><td>-15</td><td>16</td><td>-5</td><td>0</td></tr> <tr><th>2</th><td>1</td><td>-7</td><td>7</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><th>3</th><td>0</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	$k \setminus n =$	-6	-4	-2	0	2	0	3	-10	12	-5	1	1	4	-15	16	-5	0	2	1	-7	7	-1	0	3	0	-1	1	0	0	$\hat{\mathbf{N}}_{[1]}^{c=2} = 0$																																			
$k \setminus n =$	-5	-3	-1	1																																																																																					
0	4	-12	10	-2																																																																																					
1	2	-10	10	-2																																																																																					
2	0	-2	2	0																																																																																					
$k \setminus n =$	-6	-4	-2	0	2																																																																																				
0	3	-10	12	-5	1																																																																																				
1	4	-15	16	-5	0																																																																																				
2	1	-7	7	-1	0																																																																																				
3	0	-1	1	0	0																																																																																				
$\hat{\mathbf{N}}_{[2]}^{c=0} :$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr><th><math>k \setminus n =</math></th><th>-12</th><th>-10</th><th>-8</th><th>-6</th><th>-4</th><th>-2</th><th>0</th><th>2</th><th>4</th></tr> <tr><th>0</th><td>9</td><td>22</td><td>-216</td><td>462</td><td>-442</td><td>194</td><td>-25</td><td>-6</td><td>1</td></tr> <tr><th>1</th><td>24</td><td>60</td><td>-632</td><td>1340</td><td>-1212</td><td>484</td><td>-60</td><td>-4</td><td>0</td></tr> <tr><th>2</th><td>22</td><td>84</td><td>-817</td><td>1662</td><td>-1364</td><td>458</td><td>-45</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><th>3</th><td>8</td><td>58</td><td>-564</td><td>1106</td><td>-804</td><td>208</td><td>-12</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><th>4</th><td>1</td><td>18</td><td>-211</td><td>408</td><td>-261</td><td>46</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><th>5</th><td>0</td><td>2</td><td>-40</td><td>78</td><td>-44</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><th>6</th><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>6</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>									$k \setminus n =$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	0	9	22	-216	462	-442	194	-25	-6	1	1	24	60	-632	1340	-1212	484	-60	-4	0	2	22	84	-817	1662	-1364	458	-45	0	0	3	8	58	-564	1106	-804	208	-12	0	0	4	1	18	-211	408	-261	46	-1	0	0	5	0	2	-40	78	-44	4	0	0	0	6	0	0	-3	6	-3	0	0	0	0
$k \setminus n =$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4																																																																																
0	9	22	-216	462	-442	194	-25	-6	1																																																																																
1	24	60	-632	1340	-1212	484	-60	-4	0																																																																																
2	22	84	-817	1662	-1364	458	-45	0	0																																																																																
3	8	58	-564	1106	-804	208	-12	0	0																																																																																
4	1	18	-211	408	-261	46	-1	0	0																																																																																
5	0	2	-40	78	-44	4	0	0	0																																																																																
6	0	0	-3	6	-3	0	0	0	0																																																																																

$\hat{\mathbf{N}}_{[1,1]}^{c=0} :$ 

$k \setminus n =$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4
0	9	40	-300	620	-594	272	-45	-4	1
1	24	150	-1050	2090	-1864	762	-110	-2	0
2	22	268	-1685	3154	-2524	854	-89	0	0
3	8	242	-1500	2684	-1904	498	-28	0	0
4	1	110	-765	1352	-857	162	-3	0	0
5	0	24	-220	396	-228	28	0	0	0
6	0	2	-33	62	-33	2	0	0	0
7	0	0	-2	4	-2	0	0	0	0

$\hat{\mathbf{N}}_{[2]}^{c=1}$  :

$k \setminus n =$	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3
0	163	-723	1301	-1217	631	-179	25	-1
1	1459	-6030	9636	-7506	2970	-589	61	-1
2	6463	-25270	36235	-23553	6911	-836	50	0
3	17319	-66196	86737	-47418	10208	-667	17	0
4	30172	-116549	142053	-65559	10204	-323	2	0
5	35400	-142768	164366	-63878	6974	-94	0	0
6	28479	-123929	136524	-44288	3229	-15	0	0
7	15809	-76877	81912	-21832	989	-1	0	0
8	6023	-34068	35419	-7565	191	0	0	0
9	1542	-10670	10902	-1795	21	0	0	0
10	253	-2302	2325	-277	1	0	0	0
11	24	-325	326	-25	0	0	0	0
12	1	-27	27	-1	0	0	0	0
13	0	-1	1	0	0	0	0	0

 $\hat{\mathbf{N}}_{[2]}^{c=2}$  :

$k \setminus n =$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4
0	248	-954	1413	-1015	399	-138	65	-21	3
1	2419	-9185	12990	-8445	2575	-469	155	-41	1
2	10970	-40936	54318	-31193	7435	-708	143	-29	0
3	28819	-107691	134330	-67226	12320	-606	63	-9	0
4	47840	-183768	217177	-93757	12806	-310	13	-1	0
5	52677	-213996	241766	-89041	8686	-93	1	0	0
6	39561	-175117	190771	-59093	3893	-15	0	0	0
7	20519	-102241	108245	-27663	1141	-1	0	0	0
8	7335	-42733	44274	-9086	210	0	0	0	0
9	1772	-12673	12926	-2047	22	0	0	0	0
10	276	-2601	2625	-301	1	0	0	0	0
11	25	-351	352	-26	0	0	0	0	0
12	1	-28	28	-1	0	0	0	0	0
13	0	-1	1	0	0	0	0	0	0

 $\hat{\mathbf{N}}_{[1,1]}^{c=1}$  :

$k \setminus n =$	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3
0	208	-944	1734	-1642	842	-222	24	0
1	2107	-8865	14524	-11641	4676	-856	55	0
2	10561	-41834	61612	-41798	12948	-1529	40	0
3	32160	-123599	166318	-95920	22662	-1632	11	0
4	64264	-247000	308745	-151799	26894	-1105	1	0
5	87697	-347013	408847	-171220	22160	-471	0	0
6	83551	-350248	393823	-139736	12731	-121	0	0
7	56187	-256993	278670	-82900	5053	-17	0	0
8	26713	-137658	145204	-35610	1352	-1	0	0
9	8897	-53635	55429	-10923	232	0	0	0
10	2026	-14998	15275	-2326	23	0	0	0
11	300	-2927	2952	-326	1	0	0	0
12	26	-378	379	-27	0	0	0	0
13	1	-29	29	-1	0	0	0	0
14	0	-1	1	0	0	0	0	0

 $\hat{\mathbf{N}}_{[1,1]}^{c=2}$  :

$k \setminus n =$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4
0	315	-1214	1794	-1260	438	-100	36	-10	1
1	3465	-13225	18885	-12420	3714	-470	66	-15	0
2	17878	-67003	90314	-53437	13273	-1060	42	-7	0
3	53910	-201207	255638	-133587	26585	-1349	11	-1	0
4	103753	-394200	474873	-216810	33397	-1014	1	0	0
5	134083	-531391	611656	-241661	27769	-456	0	0	0
6	120036	-509029	564214	-190755	15654	-120	0	0	0
7	75736	-353077	379598	-108244	6004	-17	0	0	0
8	33858	-178831	187707	-44274	1541	-1	0	0	0
9	10648	-66054	68079	-12926	253	0	0	0	0
10	2301	-17575	17875	-2625	24	0	0	0	0
11	325	-3277	3303	-352	1	0	0	0	0
12	27	-406	407	-28	0	0	0	0	0
13	1	-30	30	-1	0	0	0	0	0
14	0	-1	1	0	0	0	0	0	0

### 4.3.3 Полиномы зацеплений

В случае зацепления уже самые простые соотношения (4.39), (4.40) подразумевают нетривиальную проверку: прежде всего, нужно проверить, что разложения (4.41) и (4.42), действительно, начинаются с 1 и  $(q - q^{-1})$  соответственно, т.е. что (4.40) сокращается при  $q = 1$ , а значение (4.39) является регулярным. Прямая проверка целочисленности в этом случае требует знания серии цветных полиномов узлов и зацеплений. Нам нужно знать: полиномы ХОМФЛИ и Кауффмана для зацеплений и узлов в фундаментальном представлении, которые можно найти на сайте [28]; полиномы ХОМФЛИ для зацеплений, когда один из компонент зацепления находится в первом (анти)симметрическом представлении, а другой - в фундаментальном, которые вычисляются с использованием известных эксклюзивных матриц Рака [269; 270] или методом каблирования [18], его также можно найти на сайте [150]; полиномы ХОМФЛИ узлов в присоединенном представлении и полиномы Кауффмана для узлов в первом (анти) симметрическом представлении, которые получаются из универсальных полиномов узлов [190] и [150]; полиномы ХОМФЛИ зацеплений с одной компонентой в присоединенном представлении, а другой - в фундаментальном, и аналогично полиномы Кауффмана зацеплений с одной компонентой в первом (анти) симметричном представлении, а другой - в фундаментальном, которые могут быть построены с использованием инклюзивных матриц Рака, которые мы обсудим в следующем подразделе (явные выражения для полиномов узлов можно найти на сайте [150]). Это позволяет нам получать целые числа ЛМОВ, и мы приводим их только для зацепления 7a3, а другие примеры можно найти на сайте [150]:

$$\hat{\mathbf{N}}_{[1],[1]}^{c=0} :$$

$k \setminus n =$	0	2	4	6
0	8	-24	24	-8
1	4	-20	20	-4
2	0	-4	4	0

$$\hat{\mathbf{N}}_{[2],[1]}^{c=0} :$$

$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7
0	-4	24	-48	40	-12
1	-2	16	-40	32	-6
2	0	2	-8	6	0

$$\hat{\mathbf{N}}_{[1,1],[1]}^{c=0} :$$

$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7
0	-12	40	-48	24	-4
1	-6	32	-40	16	-2
2	0	6	-8	2	0

$\hat{\mathbf{N}}_{[1],[4]}^{c=1} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>-5</td><td>3</td><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>-5</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	0	2	4	6	8	0	0	0	0	0	0	1	2	-5	3	1	-1	2	1	-5	4	0	0	3	0	-1	1	0	0	$\hat{\mathbf{N}}_{[2],[1]}^{c=1} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>-9</td><td>5</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>-9</td><td>5</td><td>-1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>-2</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	0	2	4	6	0	0	0	0	0	1	7	-9	5	-1	2	6	-9	5	-1	3	1	-2	1	0				
$k \setminus n =$	0	2	4	6	8																																																									
0	0	0	0	0	0																																																									
1	2	-5	3	1	-1																																																									
2	1	-5	4	0	0																																																									
3	0	-1	1	0	0																																																									
$k \setminus n =$	0	2	4	6																																																										
0	0	0	0	0																																																										
1	7	-9	5	-1																																																										
2	6	-9	5	-1																																																										
3	1	-2	1	0																																																										
$\hat{\mathbf{N}}_{[1,1],[1]}^{c=1} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>21</td><td>-15</td><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>25</td><td>-20</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td><td>-8</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	0	2	4	6	0	0	0	0	0	1	21	-15	-1	3	2	25	-20	0	1	3	9	-8	0	0	4	1	-1	0	0																															
$k \setminus n =$	0	2	4	6																																																										
0	0	0	0	0																																																										
1	21	-15	-1	3																																																										
2	25	-20	0	1																																																										
3	9	-8	0	0																																																										
4	1	-1	0	0																																																										
$\hat{\mathbf{N}}_{[1],[1]}^{c=2} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>-5</td><td>14</td><td>-12</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>11</td><td>-10</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>-2</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	1	3	5	7	9	0	-5	14	-12	2	1	1	-2	11	-10	1	0	2	0	2	-2	0	0	$\hat{\mathbf{N}}_{[2],[1]}^{c=2} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>-15</td><td>30</td><td>-20</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>-11</td><td>31</td><td>-22</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>-2</td><td>10</td><td>-8</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7	9	0	2	-15	30	-20	0	3	1	1	-11	31	-22	0	1	2	0	-2	10	-8	0	0	3	0	0	1	-1	0	0
$k \setminus n =$	1	3	5	7	9																																																									
0	-5	14	-12	2	1																																																									
1	-2	11	-10	1	0																																																									
2	0	2	-2	0	0																																																									
$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7	9																																																								
0	2	-15	30	-20	0	3																																																								
1	1	-11	31	-22	0	1																																																								
2	0	-2	10	-8	0	0																																																								
3	0	0	1	-1	0	0																																																								
$\hat{\mathbf{N}}_{[1,1],[1]}^{c=2} :$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td><math>k \setminus n =</math></td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>-21</td><td>26</td><td>-12</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>-22</td><td>27</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>-8</td><td>9</td><td>-2</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7	9	0	6	-21	26	-12	0	1	1	5	-22	27	-10	0	0	2	1	-8	9	-2	0	0	3	0	-1	1	0	0	0																										
$k \setminus n =$	-1	1	3	5	7	9																																																								
0	6	-21	26	-12	0	1																																																								
1	5	-22	27	-10	0	0																																																								
2	1	-8	9	-2	0	0																																																								
3	0	-1	1	0	0	0																																																								

#### 4.3.4 Матрицы Рака для зацеплений

В этом разделе выписаны инклюзивные матрицы Рака, которые необходимы для вычисления полиномов для двухкомпонентных зацеплений из предыдущего раздела и проверки гипотезы о целочисленности. Нетривиальные (новые) матрицы Рака требуются в следующих случаях:

**Цветные полиномы ХОМФЛИ с одной компонентой зацепления в присоединенном представлении, а другой - в фундаментальном.** В этом случае требуется изучить следующее произведение представлений  $SU(N)$

$$[1] \otimes [1] \otimes ([1],[1]) = ([3],[1]) + 2([2,1],[1]) + 2[2] + 2[1,1] + ([1,1,1],[1]) \quad (4.46)$$

где можно воспользоваться гипотезой о собственных значениях для зацеплений [18], чтобы построить инклюзивные матрицы размером  $2 \times 2$ . Заметим,

что, поскольку здесь мы имеем дело с зацеплениями, для каждого представления есть две разные матрицы [18]. Собственные значения (диагональные  $\mathcal{R}$ -матрицы) имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{([3],[1]);xx} &= (Aq^{-1}), & \mathcal{R}_{([1,1,1],[1]);xx} &= (-Aq), & \mathcal{R}_{([3],[1]);xy} &= \mathcal{R}_{([1,1,1],[1]);xy} = (q) \\
\mathcal{R}_{([2,1],[1]);xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & \\ & -Aq \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{([2,1],[1]);xy} &= \begin{pmatrix} q & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{[2];xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & \\ & -Aq \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{[2];xy} &= \begin{pmatrix} A & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{[1,1];xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & \\ & -Aq \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{[1,1];xy} &= \begin{pmatrix} A & \\ & q \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

и матрицы смешивания (инклюзивные матрицы Рака)

$$\begin{aligned}
U_{([3],[1]);xxy} &= U_{([1,1,1],[1]);xxy} = U_{([3],[1]);xyx} = U_{([1,1,1],[1]);xyx} = (1) \\
U_{([2,1],[1]);xxy} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} \\ \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \frac{1}{[2]} \end{pmatrix}, & U_{([2,1],[1]);xyx} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{[2]} & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} \\ -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \frac{1}{[2]} \end{pmatrix}, \\
U_{[2];xxy} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{D_0}{D_1[2]}} & \sqrt{\frac{D_2}{D_1[2]}} \\ \sqrt{\frac{D_2}{D_1[2]}} & \sqrt{\frac{D_0}{D_1[2]}} \end{pmatrix}, & U_{[2];xyx} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{D_1} & \frac{\sqrt{D_2 D_0}}{D_1} \\ \frac{\sqrt{D_2 D_0}}{D_1} & \frac{1}{D_1} \end{pmatrix}, \\
U_{[1,1];xxy} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{D_{-2}}{D_{-1}[2]}} & \sqrt{\frac{D_0}{D_{-1}[2]}} \\ \sqrt{\frac{D_0}{D_{-1}[2]}} & \sqrt{\frac{D_{-2}}{D_{-1}[2]}} \end{pmatrix}, & U_{[1,1];xyx} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{D_{-1}} & \frac{\sqrt{D_{-2} D_0}}{D_{-1}} \\ \frac{\sqrt{D_{-2} D_0}}{D_{-1}} & \frac{1}{D_{-1}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

где  $D_i = (Aq^i - A^{-1}q^{-i})/(q - q^{-1})$ .

**Полином Кауффмана в фундаментальном представлении** В этом случае (когда ответы также можно найти на сайте [28]) изучается произведение представлений  $SO(N)$

$$[1] \otimes [1] \otimes [1] = [3] + 2[2,1] + [1,1,1] + 3[1] \tag{4.49}$$

где обе матрицы Рака, т.е. матрицы размером 2x2 и 3x3 (поскольку все три представления одинаковы, существует только одна матрица для каждого представления), могут быть получены из гипотезы собственных значений для

узлов, [71]. Собственные значения выглядят следующим образом:

$$\mathcal{R}_{[3]} = (Aq), \quad \mathcal{R}_{[1,1,1]} = (-A/q), \quad \mathcal{R}_{[2,1]} = \begin{pmatrix} Aq & & \\ & -A/q & \\ & & \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_{[1]} = \begin{pmatrix} Aq & & \\ & -A/q & \\ & & -A^2 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

поэтому, матрицы Рака имеют вид

$$U_{[3]} = U_{[1,1,1]} = (1) \quad (4.51)$$

$$U_{[2,1]} = \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]_q} \\ \sqrt{[3]_q} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$U_{[1]} = \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} \frac{Aq+1}{A+q} & -\frac{1}{q} \sqrt{\frac{(Aq^3-1)(A+q^3)}{(Aq-1)(A+q)}} & \sqrt{[2]_q} \frac{(A^2-1)(A+q^3)}{(Aq-1)(A+q)} \\ -\frac{1}{q} \sqrt{\frac{(Aq^3-1)(A+q^3)}{(Aq-1)(A+q)}} & \frac{A-q}{Aq-1} & \sqrt{[2]_q} \frac{(A^2-1)(Aq^3-1)}{(Aq-1)(A+q)} \\ \sqrt{[2]_q} \frac{(A^2-1)(A+q^3)}{(Aq-1)(A+q)} & \sqrt{[2]_q} \frac{(A^2-1)(Aq^3-1)}{(Aq-1)(A+q)} & [2]_q A \frac{q^2-1}{(Aq-1)(A+q)} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

где  $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$  обозначает обычное квантовое число.

**Цветные полиномы Кауффмана для зацеплений с одной компонентой в (анти)симметрическом представлении, а другой в фундаментальном.** В этом случае изучается следующее произведение представлений  $SO(N)$

$$[1] \otimes [1] \otimes [2] = [4] + 2[3,1] + [2,2] + [2,1,1] + 3[2] + 2[1,1] + 1 \quad (4.54)$$

Инклюзивные матрицы Рака размера  $2 \times 2$  снова могут быть получены с помощью гипотезы о собственных значениях, где собственные значения равны сле-

дующим выражениям

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[4];xx} &= \mathcal{R}_{[2,2];xx} = \mathcal{R}_{[\emptyset];xx} = (Aq^{-1}), & \mathcal{R}_{[2,1,1];xx} &= (-Aq), \\
\mathcal{R}_{[4];xy} &= (-q^{-2}), & \mathcal{R}_{[2,2];xy} &= \mathcal{R}_{[2,1,1];xy} = (q), & \mathcal{R}_{[\emptyset];xy} &= (-Aq) \\
\mathcal{R}_{[3,1];xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & & \\ & -Aq & \\ & & \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{[3,1];xy} &= \begin{pmatrix} -q^{-2} & & \\ & -q & \\ & & \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{[1,1];xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & & \\ & -Aq & \\ & & \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{[1,1];xy} &= \begin{pmatrix} q & & \\ & -Aq & \\ & & \end{pmatrix} \\
\mathcal{R}_{([2]);xx} &= \begin{pmatrix} Aq^{-1} & & \\ & -Aq & \\ & & A^2 \end{pmatrix}, & \mathcal{R}_{([2]);xy} &= \begin{pmatrix} q^{-2} & & \\ & -q & \\ & & Aq \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.55}$$

и матрицы смешивания

$$\begin{aligned}
U_{[3,1];xxy} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{[3]}} & \sqrt{\frac{[4]}{[2][3]}} \\ \sqrt{\frac{[4]}{[2][3]}} & \frac{1}{\sqrt{[3]}} \end{pmatrix}, & U_{[3,1];xyx} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{[3]}} & -\frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} \\ -\frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \frac{1}{\sqrt{[3]}} \end{pmatrix}, \\
U_{[1,1];xxy} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{D_{-1}}{D_0[2]}} & \sqrt{\frac{D_1}{D_0[2]}} \\ \sqrt{\frac{D_1}{D_0[2]}} & \sqrt{\frac{D_{-1}}{D_0[2]}} \end{pmatrix}, & U_{[1,1];xyx} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{D_0} & -\frac{\sqrt{D_1 D_{-1}}}{D_0} \\ -\frac{\sqrt{D_1 D_{-1}}}{D_0} & \frac{1}{D_0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

в то же время, матрицы размера  $3 \times 3^4$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
U_{[2];xxy} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(A-q)q}{(Aq^3-1)[3]}} & \sqrt{(A+q^3)(Aq^5-1)Aq^4(A-A^{-1})[2][3]} & \sqrt{\frac{(Aq^5-1)(Aq+1)(A-q)}{Aq^2(Aq^3-1)(A-A^{-1})[2]}} \\ \sqrt{\frac{(Aq^5-1)(A+q^3)}{q^2(Aq^3-1)(A+q)[3]}} & \sqrt{\frac{(Aq^3+1)^2(A-q)}{q^3(A+q)(A^2-1)[2][3]}} & -\sqrt{\frac{(A^2q^2-1)(Aq-1)(A+q^3)}{q(Aq^3-1)(A^2-1)(A+q)[2]}} \\ \sqrt{\frac{(Aq^5-1)(Aq+1)}{q(Aq^3-1)(A+q)[3]}} & -\sqrt{\frac{(Aq+1)(A+q^3)(A-q)[2]}{q^2(A^2-1)(A+q)[3]}} & \sqrt{\frac{A^2[2](q^2-1)^2}{(Aq^3-1)(A+q)(A^2-1)}} \end{pmatrix} \\
U_{[2];xyx} &= \begin{pmatrix} \frac{q(A-q)}{(Aq^3-1)[3]} & \sqrt{\frac{(A+q^3)(A-q)(Aq^5-1)[2]}{q^3(Aq^3-1)(A^2-1)[3]^2}} & \sqrt{\frac{(Aq-1)(Aq^5-1)(A^2q^2-1)[2]}{q(Aq^3-1)^2(A^2-1)[3]}} \\ \sqrt{\frac{(A+q^3)(A-q)(Aq^5-1)[2]}{q^3(Aq^3-1)(A^2-1)[3]^2}} & \frac{A^2q^4+A^2q^2-Aq^3+Aq-q^2-1}{q^2(A^2-1)[3]} & -\sqrt{\frac{(A-q)(Aq-1)(A^2q^2-1)(A+q^3)}{q^2(Aq^3-1)(A^2-1)^2[3]}} \\ \sqrt{\frac{(Aq-1)(Aq^5-1)(A^2q^2-1)[2]}{q(Aq^3-1)^2(A^2-1)[3]}} & -\sqrt{\frac{(A-q)(Aq-1)(A^2q^2-1)(A+q^3)}{q^2(Aq^3-1)(A^2-1)^2[3]}} & \frac{A(A-q)(q^2-1)}{(Aq^3-1)(A^2-1)} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.57}$$

<sup>4</sup> Благодаря связи между теориями  $SO(N)$  и  $SU(N)$ , частные случаи этих матриц могут быть использованы для вычисления полиномов ХОМФЛИ. А именно, из-за сходства между группами  $SU(2)$  и  $SO(3)$  при замене  $A = q^4$  и  $q = q^2$  получается матрица  $3 \times 3$  для представления  $[6, 2]$  из тензорного произведения  $[2] \otimes [2] \otimes [4]$ . И из-за сходства между  $SO(6)$  и  $SU(4)$  при замене  $A = q^5$  получается матрица  $3 \times 3$  для представления  $[3, 3, 1, 1]$  из тензорное произведения  $[1, 1] \otimes [1, 1] \otimes [2, 2]$ .

#### 4.4 Новые свойства чисел ЛМОВ

Числа ЛМОВ характеризуют разложение по родам преобразования Гурвица плетистического логарифма статистической суммы Оогури-Вафа для узла  $\mathcal{K}$  (не путать с разложением по родам самой статистической суммы Оогури-Вафа [200]), т.е. задаются несколько сложной цепочкой преобразований из раскрашенных многочленов ХОМФЛИ-ПТ:

$$\sum_R H_R^K(A, q) \chi_R \{\bar{p}\} = \exp \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \widehat{\text{Ad}}_d \left( \underbrace{\sum_{Q, g, n} N_{Q, g, n}^K A^n (q - q^{-1})^{2g-2} \chi_Q \{\bar{p}^\vee\}}_{\sum_{Q, g, n} \tilde{N}_{Q, k, n}^K A^n q^k \chi_Q \{\bar{p}\}} \right) \right\} \quad (4.58)$$

Здесь (нередуцированные) многочлены ХОМФЛИ-ПТ

$H_R^K(A, q) = \langle \text{Tr}_R P \exp \oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} \rangle_{CS}^{SL(N)}$  в левой части - многочлены Лорана от  $A$  и  $q$  с целыми коэффициентами, "раскрашенные" диаграммами Юнга  $R$ , среднее берется в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU(N)$  и константа связи  $\kappa$ , тогда  $q = \exp \frac{2\pi i}{\kappa + N}$  и  $A = q^N$ .  $\chi_Q \{\bar{p}\}$  - характеры линейной группы (многочлены Шура от «переменных времени»  $\bar{p}_m$ ), где  $Q$  - диаграмма Юнга  $Q = \{Q_1 \geq Q_2 \geq \dots \geq Q_{l_Q} > 0\}$ , а сдвинутые временные переменные

$$\bar{p}_k^\vee = (q^k - q^{-k}) \bar{p}_k \quad (4.59)$$

Обобщенное преобразование Адамса  $\widehat{\text{Ad}}_d$  возводит каждый  $A$  и  $q$  в степень  $d$  и масштабирует все режимы с временной переменной:  $\bar{p}_m \rightarrow \bar{p}_{md}$ . Полюс в  $z \equiv q - q^{-1} = 0$  в правой части (4.58) на самом деле имеет первый порядок, потому что пустая диаграмма Юнга  $Q = \emptyset$  не вносит вклада, а любой другой символ содержит хотя бы один множитель  $(q - q^{-1})$ , полученный из сдвинутых времен. Это разложение имеет определенные параллели со стандартными разложениями по родам (хотя пока не очень точными), поэтому мы обозначаем соответствующую суммирующую переменную  $g$  и называем ее «родом». <sup>5</sup>

<sup>5</sup>Для более точного определения разложения по родам для конкретного полинома ХОМФЛИ-ПТ и его интересных свойств см. в [200], но его связь с  $g$ -расширением плетистической свободной энергии Оогури-Вафа (4.58) не до конца неясна.

Формула ЛМОВ в основной строке (4.58) отличается от более раннего расширения Оогури-Вафа (ОВ) [238], написанного под ним, изменением масштаба (4.59) вспомогательных переменных времени  $\bar{p}_k$ . Из-за общих свойств транспонирования символов  $\chi_{R^{\text{tr}}}\{\bar{p}_k\} = \chi_R\{(-)^{k+1}\bar{p}_k\}$  и полиномы ХОМФЛИ  $H_{R^{\text{tr}}}(q) = H_R(-1/q)$ , это изменение масштаба делает оставшиеся коэффициенты инвариантными относительно замены  $q \rightarrow -q$ , и они могут быть повторно выражены через Тода-подобную (логарифмическую) переменную  $z = q - q^{-1}$ . В результате алгебраически зависимые числа ОВ  $\hat{N}$  разлагаются на независимые целые числа ЛМОВ  $N$ . Более того, в отличие от хаотично выглядящего множества  $\hat{N}$ , множество  $N$  приобретает ярко выраженную структуру, которой и будет посвящено настоящий раздел.

Как уже упоминалось,  $N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}}$  - все *целые числа*, и их конечное число для каждого заданного  $Q$  и  $n$ , что является следствием гипотетической двойственности Гопакумара-Вафа и ее дальнейших уточнений [94]. Проверка этого свойства целостности - самая большая проблема для любого эффективного подхода к вычислению узлов, и по нему было доступно лишь несколько результатов. Как мы подробно писали выше, благодаря большой проделанной работе по вычислению инклюзивных и эксклюзивных матриц Рака-Вигнера, нам теперь доступны квантовые инварианты 3-нитевых, древесных и 1-петлевых узлов и зацеплений. Это позволило нам получить большое количество примеров чисел ЛМОВ [43; 87], и теперь их свойства можно проанализировать достаточно подробно.

Во-первых, их целочисленность и конечность были еще раз подтверждены, теперь уже с действительно большим набором данных.

Во-вторых, появились новые свойства, одно из которых мы описываем здесь: **с очень высокой точностью оказалось, что числа ЛМОВ распределены по закону Гаусса** как функции от  $g$ . Сейчас мы не будем вдаваться в обсуждение *причин* этого явления, наша цель на данном этапе - представить *свидетельство* в поддержку этого утверждения и *измерить* параметры распределений как функции представлений и узлов.

Таким образом, оказывается, что с очень хорошей точностью для любого заданного узла  $\mathcal{K}$ , представления  $Q$  и параметра  $n$ , числа ЛМОВ как функции оставшейся переменной  $g$  описаны по формуле (ее точность показана на рис. 4.1)

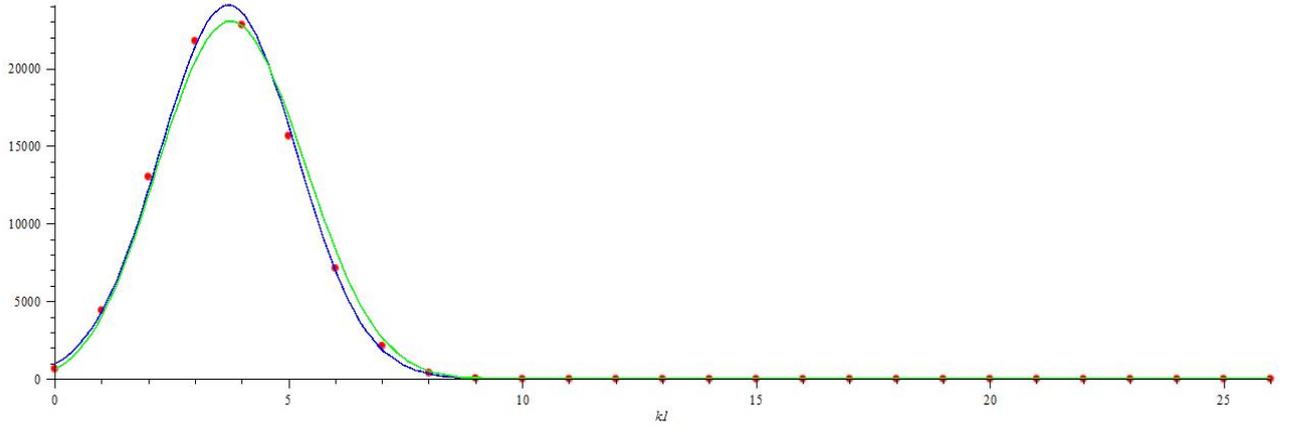


Рисунок 4.1 — **Красные точки:** Числа ЛМОВ  $N_{[4],g,0}^{820}$  изображены на графике как функции от  $g$ , число точек 27 (степень по  $z^2 = (q - q^{-1})^2$  равняется 26). **Синяя линия:** Кривая Гаусса (4.60) с параметрами  $\mu = 3.71$ ,  $\sigma = 1.46$ ,  $I = 88053$ . **Зеленая линия:** Биномиальная кривая  $I \cdot C_g^N \cdot p^g (1 - p)^{N-g}$  с  $I = 88053$ ,  $N = 20$  и  $p = 0.53$ .

$$N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}} \approx G_{Q,n}^{\mathcal{K}}(g) \equiv (\pm 1) \cdot \frac{I_{Q,n}^{\mathcal{K}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{Q,n}^{\mathcal{K}}} \exp\left(-\frac{(g - \mu_{Q,n}^{\mathcal{K}})^2}{2\sigma_{Q,n}^2}\right) \quad (4.60)$$

только с тремя параметрами  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $I$ , которые могут зависеть от  $\mathcal{K}$ ,  $Q$  и  $n$ , но не от рода  $g$ . Обратите внимание, что в большинстве случаев знаки чисел ЛМОВ одинаковы во всем столбце (только на самых концах они иногда бывают разными, где они очень малы по сравнению с типичными числами в столбце), что является одним заметным исключением, которые мы обсуждаем в разделе 4.6.3. Таким образом, для единообразия на всех графиках в этой работе мы выбираем знак таким образом, чтобы максимальные значения ЛМОВ в столбце были положительными (см. вопрос знаков в [132]).

Рисунок 1 представляет собой визуализацию одного конкретного столбца из одной конкретной таблицы в [43],  $\mathbf{N}_{[4]}$  :

$g \setminus n$	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4
0	11440	-87173	293893	-576270	726572	-614639	352840	-135087	31946	-3116	-645	269	-30
1	228250	-1635276	5137191	-9286702	10657519	-8081601	4086664	-1355188	275713	-23835	-4413	1934	-256
2	2386083	-16136564	47369508	-79062965	82549940	-55906878	24662653	-6936301	1167700	-85260	-13024	6054	-946
3	16661172	-107057436	295234625	-456862001	435207944	-263432562	101033685	-23791571	3205258	-186183	-21779	10693	-1845
4	84507887	-519907050	1355251916	-1954018736	1704701161	-924387333	308130762	-60328166	6336339	-273569	-22825	11672	-2058
5	324218115	-1925277128	4773608162	-6443894762	5167017105	-2515811031	729145727	-118202574	9488612	-283394	-15660	8205	-1377
6	964060168	-5570786966	13216800689	-16777389869	12401705555	-5430400831	1368154785	-182973872	11046274	-212013	-7130	3771	-561
7	2260162822	-12811019508	29245594272	-35043455568	23932680078	-9429839738	2062360089	-226492258	10126690	-115736	-2131	1124	-136
8	4233247530	-23722411643	52372794915	-59428427145	37551473309	-13307457043	2519220675	-225742273	7347950	-46065	-401	209	-18
9	6401577363	-35742184785	76665320902	-82599999575	48322505041	-15378284326	2508707131	-181847621	4219095	-13203	-43	22	-1
10	7882325987	-44189952927	92475676765	-94805633387	51345839966	-14636437277	2044843043	-118567832	1908313	-2650	-2	1	0
11	7955332198	-45135236322	92502848394	-90392118364	45284233622	-11520499158	1367294612	-62528465	673836	-353	0	0	0
12	6613694775	-38282967105	77104986495	-71912996672	33272091742	-7518694886	750290984	-26588381	183076	-28	0	0	0
13	4544009056	-27063745212	53736998578	-47883973931	20411212868	-4072813151	337335831	-9061459	37421	-1	0	0	0
14	2584289462	-15981116400	31372940707	-26729420170	10461927572	-1829952056	123776261	-2450930	5554	0	0	0	0
15	1216390788	-7887415145	15349485952	-12510461549	4475947275	-680239806	36810141	-518220	564	0	0	0	0
16	472819775	-3250240468	6285479701	-4902402599	1593840148	-208191240	8778345	-83697	35	0	0	0	0
17	151097941	-1114995248	2147461941	-1603116813	469971253	-52061194	1652078	-9959	1	0	0	0	0
18	39405913	-316778506	608869085	-435066095	113847320	-10516465	239570	-822	0	0	0	0	0
19	8294017	-73942242	142098694	-97183015	22394545	-1687755	25798	-42	0	0	0	0	0
20	1385933	-14015257	26975820	-17655709	3517260	-209987	1941	-1	0	0	0	0	0
21	179446	-2120970	4095152	-2564506	430297	-19510	91	0	0	0	0	0	0
22	17344	-249997	484911	-290476	39489	-1273	2	0	0	0	0	0	0
23	1177	-22102	43125	-24704	2556	-52	0	0	0	0	0	0	0
24	50	-1378	2708	-1483	104	-1	0	0	0	0	0	0	0
25	1	-54	107	-56	2	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

График первого столбца из этой таблицы см. в [43, Рис.1], другие графики см. 4.6 в настоящем разделе. Для сравнения на рис. 4.2 показан аналогичный график для чисел Оогури-Вафа  $\tilde{N}_{\Delta,k,j}$ .

Если это правда, это наблюдение может указывать на то, что числа ЛМОВ не являются фундаментальными, и их разнообразие почти  $3_R$ -мерно для любых  $Q$  и  $n$ :

$$\{N_{Q,g,n}\} \longrightarrow \{\mu_{Q,n}, I_{Q,n}, \sigma_{Q,n}\} \quad (4.61)$$

Фактически, основным естественным источником гауссовских функций является биномиальное распределение  $C_{N+m}^{2N} p^m (1-p)^{N-m}$  при больших  $N$ , т. е. появление распределения по Гауссу может быть явным признаком того, что числа ЛМОВ учитывают не «первичные» состояния BPS, а «составные части» еще нескольких элементарных состояний, это то, что делает их распределенными случайным образом. Идентификация и, прежде всего, *подсчет* этих элементарных возбуждений - следующая ближайшая задача анализа наших данных.

Конечно, этот тип составности не делает числа ЛМОВ *алгебраически* зависимыми, но определенно делает их не связанными с "фундаментальными степенями свободы".

Тот факт, что выделяются некоторые незануляющиеся рода (что распределения располагаются вокруг ненулевого  $\mu$ ), может сигнализировать о том, что могут быть солитонно- или инстантоноподобные конфигурации, возможно, нетривиально наматывающиеся на узел. Тогда, по причинам энтропии, ненулевые обмотки могут доминировать в квазиклассическом приближении, таким образом, делая пик расширения рода вокруг ненулевых родов.

Какой бы ни была причина, этот пик выглядит как новое и очень интересное явление в развивающейся теории разложений по родам и тау-функций Гурвица. Среди ближайших вопросов - это то, с чем связаны особенности спектральных кривых и топологической рекурсии АММ/ЕО.

Чтобы завершить эти вводные замечания, сделаем несколько комментариев. Прежде всего, гауссова кривая является предельным случаем биномиального распределения при достаточно больших  $N$ . На самом деле,  $N$  не должно быть слишком большим, и на рис. 4.1 можно увидеть, что распределение чисел ЛМОВ также можно подогнать биномиальным распределением, при этом  $N$  для распределения равно до 20. Следовательно, можно одинаково хорошо думать о распределении чисел ЛМОВ в биномиальном выражении.

Во-вторых, с увеличением представления количество инвариантов ЛМОВ также увеличивается. Легко видеть, что приближение к гауссовой кривой также улучшается с этим увеличением. Следовательно, можно было ожидать, что отклонения от гауссовой кривой могут быть вызваны слишком малым количеством точек и слишком маленькими их числовыми значениями, которые увеличиваются вместе с представлением. Отсюда в итоге звучит гипотеза:

**Гипотеза.** *Распределение чисел ЛМОВ для разных родов описывается гауссовой кривой (4.60) асимптотически при больших представлениях с тремя параметрами  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $I$ , возрастающими вместе с представлением.*

Хотя, как мы увидим в примерах ниже, это распределение обычно очень близко к гауссовой кривой в самых первых представлениях.

В этом письме мы представляем некоторые типичные фрагменты данных в виде графиков, а также таблиц, которые описывают зависимость параметров  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $A$  от их аргументов. Среди интересных общих свойств - увеличение дисперсии  $\sigma$  с увеличением минимального количества нитей, необходимых для описания узла.

Мы также предоставляем некоторые начальные результаты о распределении чисел ЛМОВ в  $n$ , которые могут больше походить на суперпозицию гауссовых распределений, которые лучше разделены в хорошо структурированные

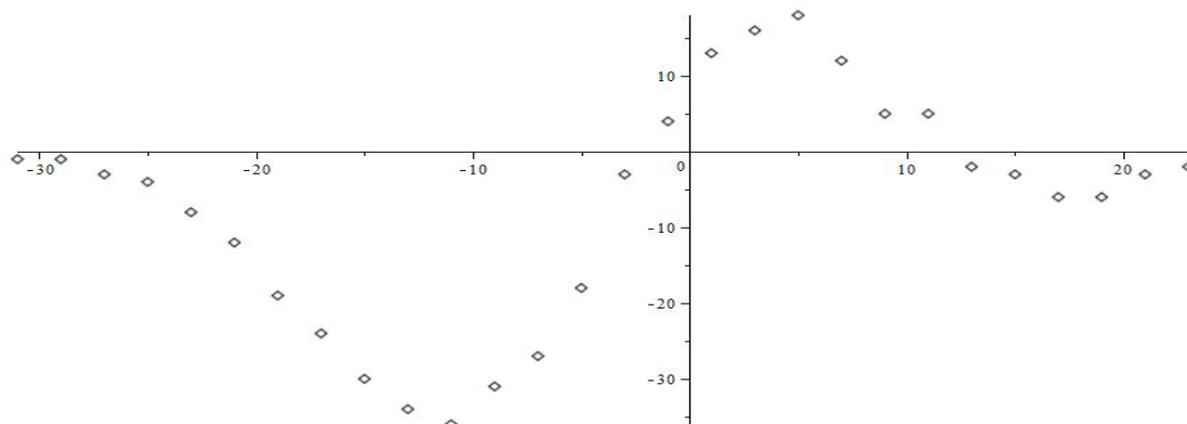


Рисунок 4.2 — Исходные числа Ooguri  $\tilde{N}_{[4],k,0}^{820}$  построены как функция от  $k$ . Обратите внимание, что это коэффициенты перед  $q^k$ , а не  $z^{2g} = (q - q^{-1})^{2g}$ , как на рис. 4.1. Также многочлен ОУ для представления  $\Delta = [4]$  является суммой многочленов ЛМОВ по пяти представлениям  $[4]$ ,  $[31]$ ,  $[22]$ ,  $[211]$ ,  $[1111]$  - таким образом, нет способа напрямую сравнить эту картинку с рис. 4.1. Это только иллюстрирует тот факт, что *не любой* релевантный многочлен имеет гауссовское распределение коэффициентов.

узлы и перекрываются, чтобы превратиться в один Гаусс (т. е. числа становятся полностью некоррелированными) для узлов без видимой структуры. Это демонстрирует возможность использования распределений чисел ЛМОВ для количественного описания «истинной сложности» узлов, варианта, который долго искали и еще не предоставлялся никакими другими типами инвариантов узлов.

## 4.5 Теоретические основы

### 4.5.1 Подсчет состояний

Статистическая сумма обычно подсчитывает количество возбужденных состояний  $\mathcal{N}_E$  как функцию уровня возбуждения  $E$ :

$$\mathcal{Z}(q) = \sum_E \mathcal{N}_E \cdot q^E \quad (4.62)$$

(можно, конечно, добавить другие характеристики микрочанонических ансамблей и получить функцию нескольких переменных, а не только температуру  $q = e^{-1/T}$ ). В квантовой теории поля эти состояния являются элементами пространства Фока, которое огромно даже для *отдельной* частицы. Это происходит по двум причинам: частицу можно рассматривать как совокупность осцилляторов, и есть много осцилляторов (столько же, сколько импульсов), и каждый осциллятор имеет много состояний. Первый вид множественности ставится под контроль, когда пространство компактифицировано: тогда импульсы становятся дискретными и перечисляемыми, и при подсчете состояний мы фактически рассматриваем поля с разными дискретными импульсами как разные частицы (в феноменологии частиц это происходит потому, что разные импульсы в компактных размерах обеспечивают различные частицы в  $4d$ , с точки зрения чистой теории струн, измерения *все* компактифицированы, чтобы сделать *все* импульсы дискретными). Вторая кратность устраняется, если мы рассматриваем количество осцилляторов вместо количества состояний, то есть подсчитываем состояния в гильбертовом пространстве, лежащем в основе пространства Фока. Технически это соответствует замене статистической суммы ее плетистическим

логарифмом (см. 4.5.2 ниже)

$$\mathcal{Z}(q) = \text{Plexp}(\mathcal{F}(q)) \quad (4.63)$$

где

$$\mathcal{F}(q) = \sum_{\omega} \mathcal{M}_{\omega} q^{\omega} \quad (4.64)$$

и  $\mathcal{M}_{\omega}$  - количество *осцилляторов* с частотой  $\omega$ .

В теории струн каждое поле струны содержит хорошо упорядоченную башню осцилляторов, таким образом, дальнейшая соответствующая модификация свободной энергии равна

$$\mathcal{F}(q) = \sum_{\omega} M_{\omega} \frac{q^{\omega}}{1 - q^{2\omega}} = - \sum_{\omega} \frac{M_{\omega}}{q^{\omega} - q^{-\omega}} \quad (4.65)$$

где  $M_{\omega}$  теперь количество струнных полей, т.е. осциллятора *tower*. Для бран, башни больше, значит выше также и полюс в знаменателе. Например, для модулей МакМахона (и/или с представлениями алгебр DIM, см. [261]) мы получили бы

$$\mathcal{F}_{McM}(q) = \sum_{\omega} \frac{m_{\omega}}{(q^{\omega} - q^{-\omega})^2} \quad (4.66)$$

где  $m_{\omega}$  - количество модулей МакМахона.

Числа ЛМОВ параметризуют множество  $\{M_{\omega}\}$ , то есть спектр  $\omega$  для некоторых конкретных моделей струн, связанных с узлами. Поскольку все струнные башни осцилляторов уже включены в *определение*  $M_{\omega}$ , эти числа можно рассматривать как подсчет состояний в *топологической* теории струн, то есть элементов лежащего в основе кирального кольца. Фактически подсчитываются расслоения над  $D2$ -бранами рода  $g$ , поэтому «первичные» числа несут этот индекс. Также имеется  $l$  дырок, что приводит к множителям Чана-Патона и дополнительному пересуммированию по представлениям  $Q$  симметрической группы  $S_l$ . В результате  $M_{\omega}$  в формуле (4.65) в случае теории Черна-Саймонса раскладывается по  $N_{Q,g,n}$ , и изменение масштаба времен в (4.59) учитывает перечисление расслоений, которые не зависят от узла, и граничных условий, подробности см. в [161].

Прежде чем вернуться к интерпретации наших результатов с точки зрения подсчета состояний, напомним две части из учебников: основы плетистического исчисления и биномиальное происхождение гауссовых распределений.

### 4.5.2 Плетистические экспоненты

Для функции  $f(A, q | p_n, \bar{p}_n)$  от  $A$ ,  $q$  и времен  $\{p_n\}$ ,  $\{\bar{p}_n\}$ , плетистическая экспонента определена как

$$\text{Plexp}(f) = \exp \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \widehat{\text{Ad}}_d(f) \right\} \equiv \exp \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{f(A^d, q^d | p_{nd}, \bar{p}_{nd})}{d} \right) \quad (4.67)$$

Таким образом, оно включает обычную операцию Адамса  $\widehat{\text{Ad}}_d(p_n) = p_{nd}$  и сохраняет топологический локус [302]  $p_n^* = \frac{A^n A^{-n}}{q^n q^{-n}}$ , изменив все ингредиенты этой формулы таким же образом. Он также наследует главное свойство обыкновенной экспоненты:

$$\text{Plexp}(f_1 + f_2) = \text{Plexp}(f_1) \cdot \text{Plexp}(f_2) \quad (4.68)$$

Двумя наиболее важными примерами плетистических экспонент являются:

$$\frac{1}{1-q} = \text{Plexp}(q) \quad (4.69)$$

что обеспечивает простые правила подсчета спектра

$$\prod_i^{\infty} \frac{1}{1-q^{k_i}} = \text{Plexp} \left( \sum_i q^{k_i} \right) \quad (4.70)$$

наподобие

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \text{Plexp} \left( \sum_k q^k \right) = \text{Plexp} \left( \frac{q}{1-q} \right) \quad (4.71)$$

или

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k} = \text{Plexp} \left( \sum_k k q^k \right) = \text{Plexp} \left( \frac{q}{(1-q)^2} \right) \quad (4.72)$$

и

$$\sum_R \chi_R \{p\} \chi_R \{\bar{p}\} = \exp \left( \sum_k \frac{p_k \bar{p}_k}{k} \right) = \text{Plexp}(p_1 \bar{p}_1) \quad (4.73)$$

Как следствие, функция Оогури-Вафа для неузла имеет вид

$$Z_{\text{OV}}^{\text{unknot}} \{\bar{p}\} = \sum_R D_R(A, q) \chi_R \{\bar{p}\} = \text{Plexp}(p_1^* \bar{p}_1) = \text{Plexp} \left( \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot \bar{p}_1 \right) \quad (4.74)$$

Из специального полинома [302], который является специализацией нередуцированного полинома ХОМФЛИ-ПТ при  $q = 1$ :  $H_R^K(A, q = 1) = D_R \cdot (\sigma^K(A))^{|R|}$ , можно построить величину

$$\text{Plexp}\left(\frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot \bar{p}_1 \sigma^K(A)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^* \bar{p}_k}{k} \cdot \sigma^K(A^k)\right) \quad (4.75)$$

которая отличается от главной асимптотики функции Оогури-Вафа при  $q = 1$ ,

$$\log\left(Z_{\text{OV}}^K(A, q)\right) \sim \log\left(\sum_R D_R(A|q) (\sigma^K(A))^{|R|} \chi_R\{\bar{p}\}\right) = \sum_{k=1} \frac{p_k^* \bar{p}_k}{k} (\sigma^K(A))^k \quad (4.76)$$

потому что  $(\sigma^K(A))^k \neq \sigma^K(A^k)$ . Это объясняет, почему разложение по родам плетистического логарифма статистической суммы Оогури-Вафа отличается от разложения по родам самой статистической суммы Оогури-Вафа.

### 4.5.3 Исчисление симметрической группы

Чтобы сделать нашу презентацию технически законченной, мы вкратце повторим некоторые простые формулы из [161]. Числа OV и ЛМОВ являются подсчетом отображений римановых поверхностей с границами (интерпретируемых как BPS  $D2$ -браны, оканчивающиеся на  $M$   $D4$ -бранах, обертывающих лагранжево подмногообразие  $\mathcal{L}_K$  в  $T^*S^3$ , который проходит через данный узел или зацепление  $\mathcal{K} \subset S^3$ , так что  $\mathcal{L}_K$  является конормальным расслоением  $\mathcal{K}$ ). Согласно [161], фактически учитываются элементы

$$\text{Sym}\left\{F^n \otimes H^*\left((S^1)^{2g+n-1}\right) \otimes H^*(\mathcal{M}_{g,n})\right\} \quad (4.77)$$

где  $g$  и  $n$  - род и количество дырок,  $\mathcal{M}_{g,n}$  - пространство модулей отображений, в то время как дополнительные два фактора являются когомологиями факторов Якобиана и Чана-Патона на границе,  $F$  обозначает фундаментальное представление вспомогательной группы  $SU(M)$  с монодромиями, параметризованными

вспомогательными временами  $\bar{p}_k$ . Симметризация осуществляется по  $n$  компонентам границы и выполняется с помощью общего правила:

$$\begin{aligned} \text{Sym}\left\{A_{i_1,\dots,i_n} \otimes B_{i_1,\dots,i_n} \otimes C_{i_1,\dots,i_n}\right\} &\equiv \sum_{P \in S_n} A_{P(i_1,\dots,i_n)} \otimes B_{P(i_1,\dots,i_n)} \otimes C_{P(i_1,\dots,i_n)} = \\ &= \sum_{R',R''} A_{R' \circ R''} \otimes B_{R'} \otimes C_{R''} \end{aligned} \quad (4.78)$$

где сумма на левой части равенства проходит по всем перестановкам из  $S_n$ , а в правой части - по всем диаграммам Юнга  $R'$  и  $R''$  размера  $n$ , маркирующим отступы  $S_n$ , их произведение обозначается  $\circ$ . Смысл этой простой комбинаторной формулы должен быть ясен из пары примеров при  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (A_{1,2} \otimes B_{1,2} + A_{2,1} \otimes B_{2,1}) = \\ &= \frac{1}{2} (A_{1,2} + A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} + B_{2,1}) + \frac{1}{2} (A_{1,2} - A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} - B_{2,1}) = \\ &= A_{[2]} \otimes B_{[2]} + A_{[1,1]} \otimes B_{[1,1]} \end{aligned} \quad (4.79)$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (A_{1,2} \otimes B_{1,2} \otimes C_{1,2} + A_{2,1} \otimes B_{2,1} \otimes C_{2,1}) = \\ &= \frac{1}{2} (A_{1,2} + A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} + B_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (C_{1,2} + C_{2,1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (A_{1,2} + A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} - B_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (C_{1,2} - C_{2,1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (A_{1,2} - A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} + B_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (C_{1,2} - C_{2,1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (A_{1,2} - A_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (B_{1,2} - B_{2,1}) \otimes \frac{1}{2} (C_{1,2} + C_{2,1}) = \\ &= A_{[2]} \otimes B_{[2]} \otimes C_{[2]} + A_{[2]} \otimes B_{[1,1]} \otimes C_{[1,1]} + A_{[1,1]} \otimes B_{[2]} \otimes C_{[1,1]} + A_{[1,1]} \otimes B_{[1,1]} \otimes C_{[2]} \end{aligned} \quad (4.80)$$

связанные с правилами композиции (коэффициенты Клебша-Гордана)  $[2] \circ [2] = [1,1] \circ [1,1] = [2]$ ,  $[2] \circ [1,1] = [1,1] \circ [2] = [1,1]$ .

В общем, можно переписать (4.78) в форме

$$\text{Sym}\left\{A_{i_1,\dots,i_n} \otimes B_{i_1,\dots,i_n} \otimes C_{i_1,\dots,i_n}\right\} = \sum_{R_1, R_2, R_3} C_{R_1 R_2 R_3} \mathbb{S}_{R_1} A \otimes \mathbb{S}_{R_2} B \otimes \mathbb{S}_{R_3} C \quad (4.81)$$

где  $\mathbb{S}_R$  обозначает функтор Шура [82] и коэффициенты Клебша-Гордана  $C_{R_1 R_2 R_3}$  явно заданы формулой

$$C_{R_1 R_2 R_3} = \sum_{\Delta} \frac{\psi_{R_1}(\Delta) \psi_{R_2}(\Delta) \psi_{R_3}(\Delta)}{z_{\Delta}} \quad (4.82)$$

Здесь  $\psi_Q(\Delta)$  - характеры симметричной группы,  $\Delta = \{\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{l_\Delta} > 0\}$  - диаграмма Юнга, а  $z_\Delta$  - стандартный симметричный фактор диаграммы Юнга (порядок автоморфизма) [82].

Формула (4.78) является непосредственным следствием формулы (конкретный пример приведен в (4.79))

$$\text{Sym}(V_1 \otimes V_2) = \sum_R \mathbb{S}_R V_1 \otimes \mathbb{S}_R V_2 \quad (4.83)$$

и действие функтора Шура на тензорное произведение

$$\mathbb{S}_R(V_1 \otimes V_2) = \sum_{R_1, R_2} C_{R_1 R_2 R_3} \mathbb{S}_{R_1} V_1 \otimes \mathbb{S}_{R_2} V_2 \quad (4.84)$$

Используя (5.2), можно еще больше увеличить количество множителей в тензорном произведении (4.81).

Следующим шагом является преобразование пробелов в производящие функции. Это включает в себя преобразование числа  $n$  со степенями параметра  $A$ , спинов из  $H^*(S^1)$ , со степенями  $\pm q^{\text{spin}}$  и представлений из  $F^{\otimes n}$ , с характеристиками, зависящими от  $\bar{p}$ . Более того, вклад кохомологий окружности (от  $B$ -факторов) может быть поглощен переопределением характеров: например, последняя формула в (4.80) может быть переписана как

$$\begin{aligned} (B_{[2]}C_{[2]} + B_{[1,1]}C_{[1,1]}) \chi_{[2]}\{\bar{p}\} + (B_{[2]}C_{[1,1]} + B_{[1,1]}C_{[2]}) \chi_{[1,1]}\{\bar{p}\} = \\ = C_{[2]} \chi_{[2]}^\vee\{\bar{p}\} + C_{[1,1]} \chi_{[1,1]}^\vee\{\bar{p}\} \end{aligned} \quad (4.85)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{[2]}^\vee &= B_{[2]} \chi_{[2]} + B_{[1,1]} \chi_{[1,1]} \\ \chi_{[1,1]}^\vee &= B_{[1,1]} \chi_{[2]} + B_{[2]} \chi_{[1,1]} \end{aligned} \quad (4.86)$$

В общем случае ожидается, что статистическая сумма  $OV$  на основе аргументов дуальности между открытыми и замкнутыми струнами [94; 160; 161; 238] будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_{OV}^{\mathcal{K}} &= \sum_R H_R^{\mathcal{K}}(A, q) \chi_R\{\bar{p}\} = \\ &= \text{Pl exp} \left( \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{Q, g, n} C_Q^{\mathcal{K}}(g, n) \cdot (q - q^{-1})^{2g} A^n \chi_Q^\vee\{\bar{p}\} \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

где величины

$$C_Q^K(g,n) = \text{Euler char} \left\{ \mathbb{S}_R \left( H^*(\mathcal{M}_{g,n}^K) \right) \right\} = N_{Q,g,n}^K \quad (4.88)$$

- это в точности числа ЛМОВ,  $(q - q^{-1})^{2g}$  - это степень  $n$ -независимого вклада  $q - q^{-1}$  из  $\left( H^*(S^1) \right)^{2g}$ , и приведенный выше пример (4.86) показывает, что единственное, что нужно вычислить, - это величины  $B_R$ , которые определяют преобразование из  $\chi\{\bar{p}\}$  в  $\chi^\vee\{\bar{p}\}$ . Эти  $B$  являются когомологиями оставшихся  $(S^1)^{n-1}$ , взвешенных с множителями  $\pm q^{\text{spin}}$ , и вычисления очень просты. В обозначениях [161], если нетривиальная 1-форма на  $S^1$  обозначена  $\psi$ , то базис в  $H^*((S^1)^{n-1})$  производится из внешних продуктов  $\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_k}$  с дополнительным ограничением  $\sum_{i=1}^n \psi_i = 0$ . Таким образом, отличными от нуля являются только  $B_R$  с однокрюковыми диаграммами Юнга  $R$  и

$$B_{[r,1^{n-r}]} = (-)^r q^{2r-n-1} \quad (4.89)$$

В частности,  $B_{[2]} = q$ ,  $B_{[1,1]} = -q^{-1}$  и

$$\begin{aligned} \chi_{[2]}^\vee\{\bar{p}\} &= q\chi_2\{\bar{p}\} - q^{-1}\chi_{[1,1]}\{\bar{p}\} = \frac{1}{q - q^{-1}}\chi_{[2]}\{\bar{p}^\vee\}, \\ \chi_{[1,1]}^\vee\{\bar{p}\} &= -q^{-1}\chi_2\{\bar{p}\} + q\chi_{[1,1]}\{\bar{p}\} = \frac{1}{q - q^{-1}}\chi_{[1,1]}\{\bar{p}^\vee\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

с

$$\bar{p}_k^\vee = (q^k - q^{-k})\bar{p}_k, \quad (4.91)$$

Ур.(4.59) является обобщение этого простого примера.

Технически преобразование характеров Шура от временных переменных  $\{\bar{p}\}$  в характеры от временных переменных  $\{\bar{p}^\vee\}$  выполняется с помощью серии повторных переразложений с использованием характеров симметричной группы.

В качестве первого шага выполняется плетистическое преобразование статистической суммы  $OV$  в терминах тех же времен  $\{\bar{p}\}$ :

$$Z_{OV}^K = \sum_R H_R^K(A,q) \chi_R\{\bar{p}\} = \text{Plexp} \left( \sum_R f_R(q,A) \chi_R\{\bar{p}\} \right) \quad (4.92)$$

что явно делается с помощью обратной формулы [164]

$$\begin{aligned} f_R^K(A,q) &= \quad (4.93) \\ &= \sum_{d,m=1} (-1)^{m-1} \frac{\mu(d)}{md} \sum_{\Delta_1, \dots, \Delta_m} \widehat{Ad}_d \Psi_R \left( \sum_{i=1}^m \Delta_i \right) \cdot \sum_{R_1, \dots, R_m} \prod_{j=1}^m \frac{\Psi_{R_j}(\Delta_j)}{z_{\Delta_j}} H_{R_j}^K(A^d, q^d) \end{aligned}$$

где сумма двух диаграмм Юнга  $\Delta$  и  $\Delta'$  - это диаграмма Юнга со строками  $\{\delta_i, \delta'_i\}$  с правильным переупорядочением,  $\widehat{Ad}_d \Delta = \widehat{Ad}_d \{\delta_i\} = \{d\delta_i\}$  и  $\mu(d)$  - функция Мебиуса, определяемая следующим образом: если разложение на простые числа  $d$  состоит из  $m$  множителей и содержит неединичные кратности,  $\mu(d) = 0$ , в противном случае  $\mu(d) = (-1)^m$ .

На втором этапе необходимо переразложить правую часть (4.92) по характеристам временных переменных  $\{\bar{p}^\vee\}$ . Для этого нужно использовать разложение характеров Шура в мономы

$$\chi_R\{\bar{p}\} = \sum_{\Delta} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_{\Delta}} \bar{p}_{\Delta} \quad (4.94)$$

где  $\bar{p}_{\Delta} = \prod_i \bar{p}_i^{\mu_i}$ , и соотношения ортогональности для характеров симметрической группы

$$\sum_R \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_R(\Delta') = \delta_{\Delta\Delta'}, \quad \sum_{\Delta} \frac{1}{z_{\Delta}} \psi_R(\Delta) \psi_{R'}(\Delta) = \delta_{RR'} \quad (4.95)$$

Тогда можно переразложить

$$\chi_R\{\bar{p}\} = \sum_Q C_{RQ} \chi_Q\{\bar{p}^\vee\} \quad (4.96)$$

с

$$C_{RQ} = \sum_{\Delta} \frac{\psi_R(\Delta) \psi_Q(\Delta)}{z_{\Delta}} \prod_i (q^{\delta_i} - q^{-\delta_i})^{-1} \quad (4.97)$$

и написать в правой части равенства (4.92)

$$\sum_R f_R(q, A) \chi_R\{\bar{p}\} = \sum_{R, Q} f_R(q, A) C_{RQ} \chi_Q\{\bar{p}^\vee\} \quad (4.98)$$

Другими словами, чтобы найти целые числа  $N_{Q, g, n}^{\mathcal{K}}$ , нужно раскрыть, используя (4.93) и (4.97), комбинацию

$$\sum_R f_R C_{RQ} = \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{Q, g, n} N_{Q, g, n}^{\mathcal{K}} \cdot (q - q^{-1})^{2g} A^n \quad (4.99)$$

#### 4.5.4 Гауссово распределение

Следующее, что следует напомнить, это то, что гауссово распределение на самом деле является аватаром биномиального распределения для больших  $N$ :

оно описывает поведение вблизи максимума. Важно, что *большое*  $N$  необязательно было слишком большим: чисел порядка десятков более чем достаточно.

### Биномиальное распределение

$$C_{2N}^K p^K (1-p)^{2N-K} = \frac{(2N)!}{(2N-K)!K!} p^K (1-p)^{2N-K} \quad (4.100)$$

с пиком в  $K = 2pN$ , где

$$C_{2N}^{N+k} p^{N+k} (1-p)^{N-k} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi p q N}} \cdot \exp\left(-\frac{(k - (2p-1)N)^2}{4p q N}\right) \quad (4.101)$$

т.е. оно выглядит как **гауссово распределение**

$$\frac{e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad (4.102)$$

с

$$\sigma = \sqrt{2p q N}, \quad \mu = (2p-1)N \quad (4.103)$$

**Распределение Пуассона** возникает из биномиального распределения, когда фиксированы  $p \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $a = 2pN$ . Тогда отличными от нуля остаются только вклады с  $k \ll N$  и

$$C_{2N}^K p^K (1-p)^{2N-K} \sim \frac{(2Np)^K}{K!} \left(1 - \frac{2pN}{2N}\right)^{2N} \sim \frac{a^K e^{-a}}{K!} \quad (4.104)$$

**Гауссовость чисел ЛМОВ** Теперь мы можем вернуться к свободной энергии ЛМОВ

$$F^K = \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{Q,g,n} N_{Q,g,n}^K A^n C_Q\{\bar{p}\} \cdot (q - q^{-1})^{2g} \quad (4.105)$$

где

$$\begin{aligned} C_Q\{\bar{p}\} &= \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{\Delta} \frac{\psi_Q(\Delta)}{z_{\Delta}} \prod_{i=1}^{l_{\Delta}} (q^{\delta_i} - q^{-\delta_i}) \bar{p}_{\delta_i} = \\ &= \sum_{\Delta} \frac{\psi_Q(\Delta)}{z_{\Delta}} (q - q^{-1})^{l_{\Delta}-1} \prod_{i=1}^{l_{\Delta}} [\delta_i] \bar{p}_{\delta_i} \end{aligned} \quad (4.106)$$

и  $N_{Q,g,n}$ , подчиняющиеся распределению Гаусса в  $g$ . Теперь заменим их биномиальным распределением. Конечно, это плохо оправдано, потому что соответствующие  $N$  не слишком велики, а дискретные точки далеки от плотности на

гауссовой кривой. Однако более благоприятное утверждение о (4.60) состоит в том, что числа ЛМОВ не просто гауссовы, они распределены *биномиально* (!):

$$N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}} \approx B_{Q,n}^{\mathcal{K}}(g) \equiv I_{Q,n}^{\mathcal{K}} \cdot \frac{N!}{g!(N-g)!} \cdot p^g (1-p)^{N-g} \quad (4.107)$$

с  $I$ ,  $N$  и  $p$  в зависимости от  $\mathcal{K}$ ,  $n$  и  $Q$ . Обратите внимание, что  $p = p_{Q,n}^{\mathcal{K}}$  может немного отклоняться от  $1/2$ , а  $N = N_{Q,n}^{\mathcal{K}}$ , от количества точек (от степени многочлена от  $q$  от  $A^n$ -клада в многочлен ЛМОВ).

Формально, подставляя это распределение в (4.105), получаем

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{1}{z} \sum_{Q,n} \tilde{I}_{Q,n} C_Q\{\bar{p}\} A^n \cdot (1 + \eta_{Q,n} z^2)^{N_{Q,n}} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{R,Q,n} C_{RQ}(q) A^n \chi_R\{\bar{p}\} \cdot \tilde{I}_{Q,n} \cdot (1 + \eta_{Q,n} z^2)^{N_{Q,n}} \end{aligned} \quad (4.108)$$

с  $z = q - q^{-1}$ ,  $\eta = \frac{p}{1-p}$  и  $\tilde{I} = I \cdot (1-p)^N$ . Мы опускаем метку узла  $\mathcal{K}$  в  $I$  и  $\eta$ , чтобы хотя бы немного упростить формулу. Таким образом, при любых  $R$  и  $n$  мы описываем производящую функцию для чисел Оогури-Вафа как сумму нескольких степеней  $(1 + \eta z^2)$ : количество членов равно равно количеству диаграмм  $Q$  размера  $|R|$ . Это описывает график на рис. 4.2 как сумму нескольких гауссиан. Аналитически это дает приближенную формулу для кратностей  $M_\omega$  в (4.65) и их производящей функции как суммы нескольких степеней особой переменной, удивительно близкой к

$$(1 + z^2) = q^2 - 1 + q^{-2} = \frac{[6]}{[3][2]} = \frac{(q^2 - e^{2\pi i/3})(q^2 - e^{-2\pi i/3})}{q^2} \quad (4.109)$$

К сожалению, не сразу понятно, как можно строго сформулировать это наблюдение.

## 4.6 Экспериментальные свидетельства

В этом разделе мы приводим еще несколько гауссовских / биномиальных графиков, чтобы лучше проиллюстрировать явление, продемонстрированное на рис. 4.1. Мы также обсуждаем различные связанные проблемы, в частности, зависимости чисел  $N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}}$  не только от рода  $g$ , но также от  $n$  и узла  $\mathcal{K}$ , последнее

для естественных серий 2-нитевых и 3-нитевых торических узлов и скрученных узлов и для различных представлений. Мы реализуем интересное универсальное поведение зависимости от серии узлов.

### 4.6.1 Гауссова зависимость от $g$

Прежде всего, мы проиллюстрируем явление гауссова распределения чисел ЛМОВ, уже продемонстрированное на рис. 4.1 для узла  $8_{20}$ . Поскольку гауссова и биномиальная кривые практически совпадают во всех рассмотренных ниже случаях, в дальнейшем мы будем приводить в качестве примера только гауссовы кривые, но с указанием параметров биномиального распределения в каждом случае.

Наши примеры начинаются с простейшего узла - трилистника, рис. 4.3. Это типичная картина, цифры для других представлений и других значений  $n$  очень похожи, с небольшими вариациями параметров (см. Следующий подраздел).

Чтобы проиллюстрировать, что конкретное значение  $n$  не имеет большого значения, мы также даем распределение чисел ЛМОВ при  $n = -16$ , рис. 4.4, которое следует сравнить с рис. 4.1, соответствующий  $n = 0$ .

В качестве третьего примера мы демонстрируем распределения числа ЛМОВ для более сложных узлов: для пары мутантов  $11n41$  и  $11n47$  (рис. 4.5). Мы имеем дело с представлениями на третьем уровне, где полиномы ХОМФЛИ этой пары сначала становятся разными (только для представления  $R = [2,1]$ ).

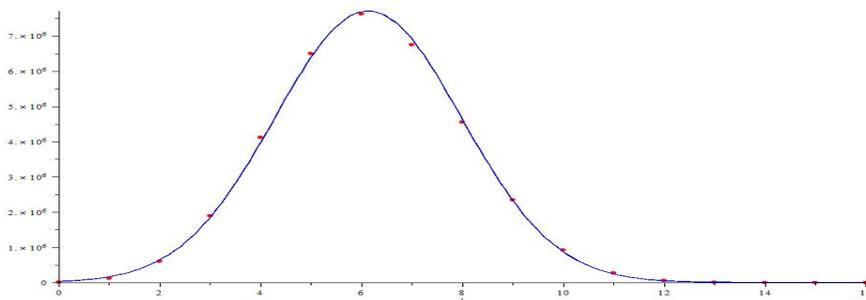


Рисунок 4.3 — Числа ЛМОВ как функция рода для трилистника и представления  $Q = [4]$  и  $n = 16$ :  $N_{[4],g,16}^{31}$ . Синяя кривая - это гауссова кривая (4.60) с параметрами  $\mu = 6.14$ ,  $\sigma = 1.85$ ,  $I = 3.58 \cdot 10^7$ , а параметры биномиального распределения равны  $p = 0.44$ ,  $n = 14.0$ .

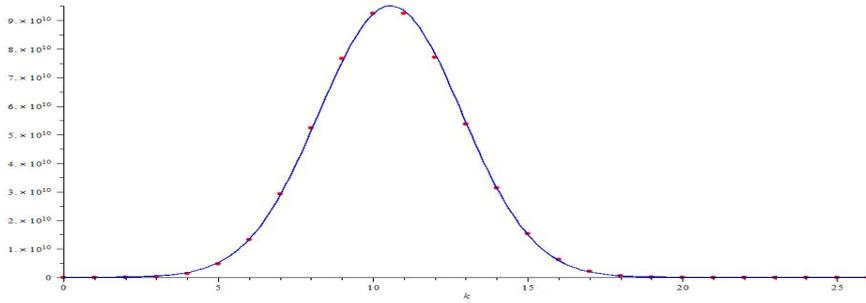


Рисунок 4.4 — Числа ЛМОВ как функция рода для узла  $8_{20}$  и представления  $Q = [4]$  и  $n = -16$ :  $N_{[4],g,-16}^{8_{20}}$ . Синяя кривая - это гауссова кривая (4.60) с параметрами  $\mu = 10.57$ ,  $\sigma = 2.31$ ,  $I = 5.50 \cdot 10^{11}$ , а параметры биномиального распределения равны  $p = 0,50$ ,  $n = 21,3$ .

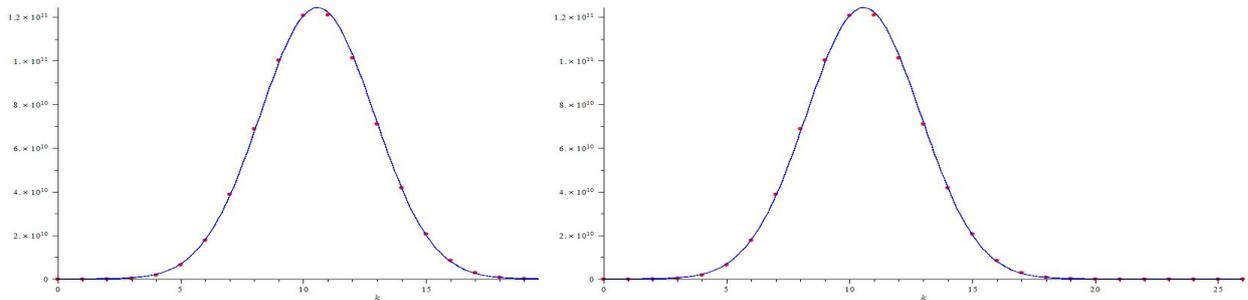


Рисунок 4.5 — Числа ЛМОВ как функция рода для мутантной пары узлов  $11n41$  (слева) и  $11n47$  (справа) и представления  $Q = [3]$  и  $n = -15$ :  $N_{[3],g,-15}^{\mathcal{K}}$ . Синие кривые - это гауссовы кривые (4.60) с параметрами  $\mu = 11.34$ ,  $\sigma = 2.40$ ,  $I = 6.85 \cdot 10^{12}$ , а параметры биномиальных распределений равны  $p = 0,494$ ,  $n = 22,98$  и  $p = 0,506$ ,  $n = 22,64$  соответственно.

Разница в числах ЛМОВ для этих узлов также распределена по Гауссу, что мы обсудим в разделе 4.7.

#### 4.6.2 Зависимость от $n$

Вместо связанной с родом переменной  $g$  можно посмотреть на связанную с зарядом  $n$  и на распределение чисел ЛМОВ  $N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}}$  в  $n$  при фиксированном род. Выберем в качестве примеров те же узлы  $3_1$  и  $8_{20}$  и минимально возможную степень  $z$ , так как это случай, когда количество точек максимально. К сожалению, это число все еще очень мало, тем не менее, видно, что распределение имеет вид колокольчика (рис. 4.6). Это колоколообразное распределение обычно происходит и для других узлов, за одним заметным исключением: это не относится к узлам скручивания (или просто антипараллельной косе, [71]) при первом представлении и при достаточно большом количестве скручиваний (см. Рис. 4.7 для  $Tw_{15}$  и представления [3]).

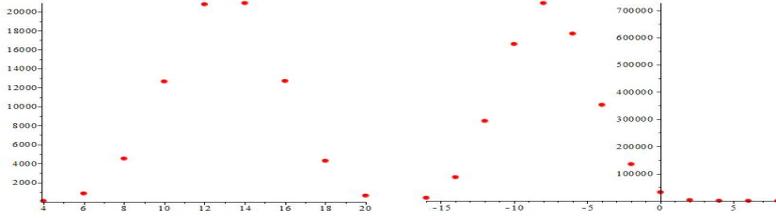


Рисунок 4.6 — Числа ЛМОВ для узлов  $3_1$  (слева) и  $8_{20}$  (справа) и представление  $Q = [4]$  как функции от  $n$ .

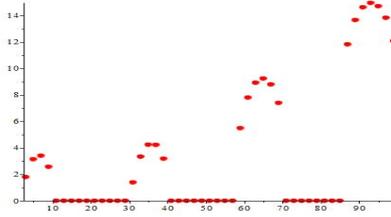


Рисунок 4.7 — Распределение логарифма чисел ЛМОВ  $\log(N_{[3],0,n}^{Tw_{15}} + 1)$  для твистового узла  $Tw_{15}$  и представление  $Q = [3]$  как функцию от  $n$  (для наглядности).

Действительно, семейство скрученных узлов можно рассматривать с помощью метода эволюции [202; 302; 304]. В этом случае эволюция идет по антипараллельной косе, а полином ХОМФЛИ в общем случае задается формулой

$$H_R^{Tw_k}(A, q) = \sum_{Q \in R \times \bar{R}} \left( A^{\xi_Q} q^{\zeta_Q} \right)^k h_Q(A, q) \quad (4.110)$$

с некоторыми определенными  $\xi_Q$  и  $\zeta_Q$ , зависящими только от представления  $Q$ . Эта формула означает, что при фиксированном  $|R|$  и, следовательно,  $|Q| = 2|R|$  можно выбрать  $k$  достаточно большим, чтобы разделить степени  $A$ , и это разделение наследуется плетистическая свободная энергия и ее аналог ЛМОВ. Другими словами, для достаточно больших  $k$ , превышающих  $A$ -способности определенных  $h_Q(A, q)$ , не может быть одного звонка, а может быть несколько колокольчиков, достигающих максимума около средних значений  $n_Q \sim l_Q \cdot k$ . Этот феномен раздвигания при увеличении  $k$  можно увидеть на графиках  $\log(I_Q, n + 1)$  для  $Tw_k$  как функции  $n$  при  $k = 1, 5, 10, 15$  (Рис. 4.8).

Этот аргумент фактически распространяется на другие семейства узлов, содержащие антипараллельную косу. Однако, если мы сейчас исправим  $k$  и позволим  $|R|$  расти, отдельные пики начнут перекрываться (потому что степени по  $A$  у функции  $h_Q$  растут вместе с  $Q$ ) и, наконец, сформируют единый колокол распределения.

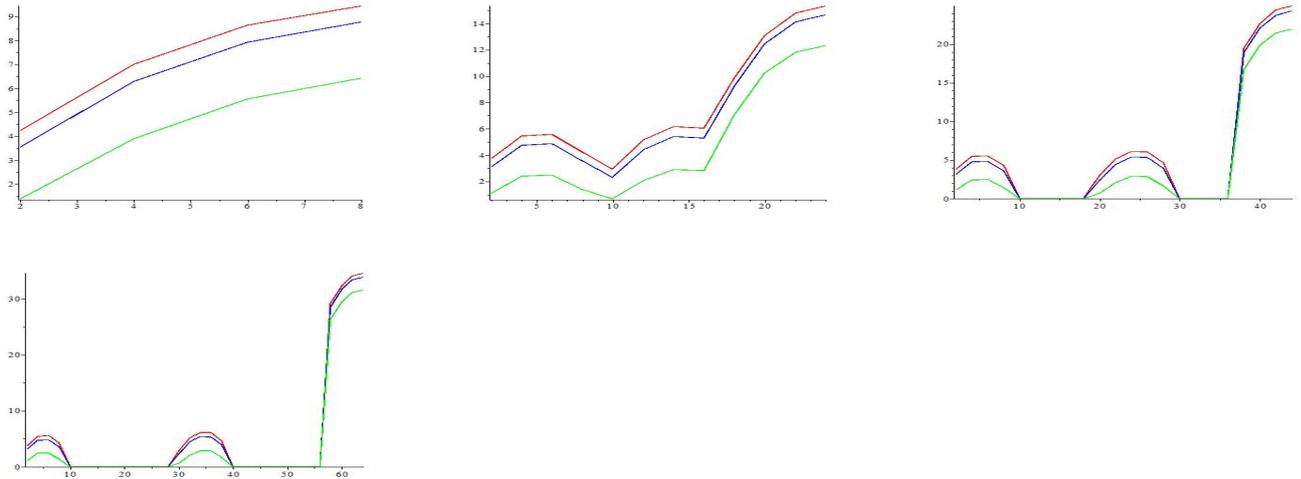


Рисунок 4.8 — Графики  $\log(I_Q + 1)$  как функции  $n$  для скрученных узлов  $Tw_k$  при  $k = 1$  (первая строка слева),  $k = 5$  (первая строка, центр),  $k = 10$  (первая строка справа) и  $k = 15$  (вторая строка).

Кривые соответствуют представлениям: красный,  $Q = [3]$ , синий,  $Q = [2,1]$ , зеленый,  $Q = [1,1,1]$ .

### 4.6.3 Отклонения от гауссовости при малых представлениях $Q$ : $g$ -распределения

Более того, те же аргументы, что и в предыдущем пункте, на самом деле применимы к распределениям в  $g$ . Это связано с тем, что эволюция зависит не только от  $A$ , но и от  $q$ , как видно из (4.110), и, следовательно,  $k$  разделяет также пики в  $g$ . Строго говоря, на этот раз переключение с  $q$  на  $z$  заслоняет расщепление при увеличении  $k$ , однако в той или иной форме эффект сохраняется (в частности, меняется знак у разных родов, см. Рис. 4.9) для некоторых конкретных узлов: для узлов кренделя с нечетным числом пальцев и антипараллельной косой. Узлы такого типа также образуют мутантные пары [47], которые предположительно должны различаться только полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении [4,2] [215], которое пока недоступно, несмотря на недавний прогресс [292]. Следовательно, мы проиллюстрируем явление только на уровне 3 представлений, рис. 4.9. Тем не менее, мы ожидаем, что произойдет то же явление, что и выше: с увеличением представления распределение становится все более и более гауссовым.

Другими словами, наше наблюдение гауссовости требует предела больших представлений:

$$|R| \gg \text{регулярность (типичные параметры эволюции) подструктур внутри узла} \quad (4.111)$$

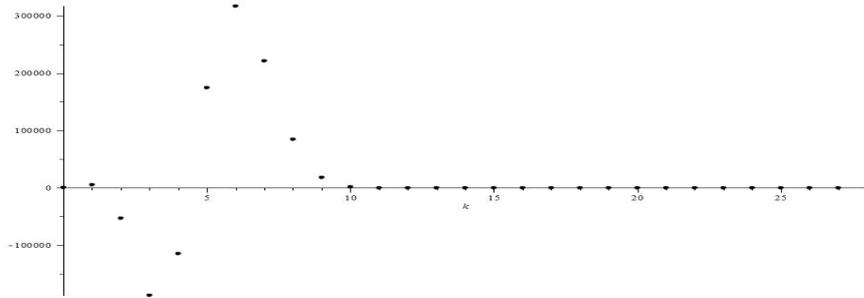


Рисунок 4.9 — Антипараллельный узел кренделя с 5 пальцами:  $(\bar{3}, \bar{3}, \bar{3}, -\bar{3}, -\bar{3})$ , который образует пару мутантов с узлом кренделя  $(\bar{3}, \bar{3}, -\bar{3}, \bar{3}, -\bar{3})$  [47]. Числа ЛМОВ приведены здесь как функция рода для  $Q = [2,1]$  и  $A^{-1}$ :  $N_{[2,1],g,-1}$ .

Для хорошо структурированных узлов и даже для тех, которые имеют выраженную субструктуру, например, длинную косу, параллельную или антипараллельную, может потребоваться достаточно высокое значение  $|R|$ , чтобы соблюсти гауссовость, это не достигается однородно для всех узлов сразу.

#### 4.6.4 $\mu$ , $\sigma$ и $I$ как функции от $n$

В этом пункте мы проиллюстрируем, как параметры гауссова распределения  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $I$  зависят от  $n$ . Графики зависимости от  $n$  показаны на рис. 4.10 - 4.11. Мы снова приводим в качестве примеров трилистник и узел  $8_{20}$ .

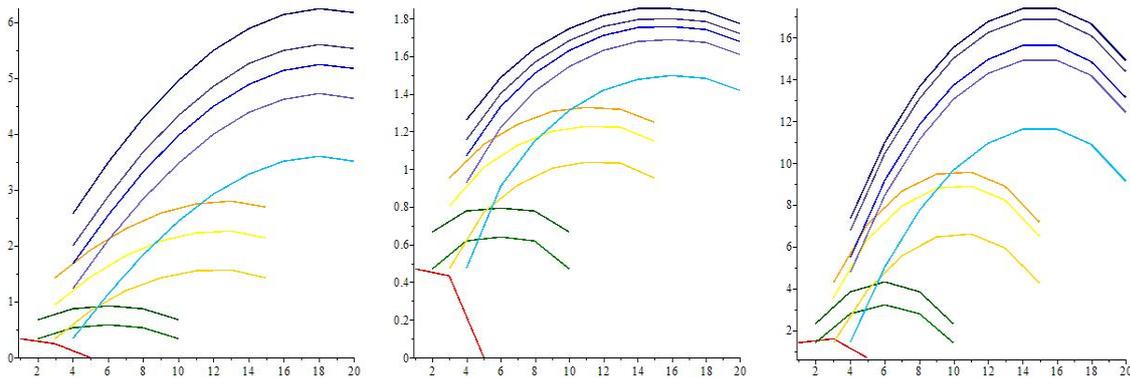


Рисунок 4.10 — Графики зависимости параметров гауссовой кривой, описывающей числа ЛМОВ, от  $n$  для трилистника. Левый график описывает зависимость среднего  $\mu$ , центральный график - дисперсии  $\sigma$ , а правый график - интеграла  $I$ . Разные уровни представлений нарисованы разными цветами: красный - для первого уровня (одно представление [1]), зеленый - для второго уровня (представления соответственно [1,1] и [2] вверх) желтый - для третьего уровня (представления [1,1,1], [2,1] и [3] вверх соответственно) и синий - для четвертого уровня (представления соответственно [1,1,1,1], [2,1,1], [2,2], [3,1] и [4] вверх).

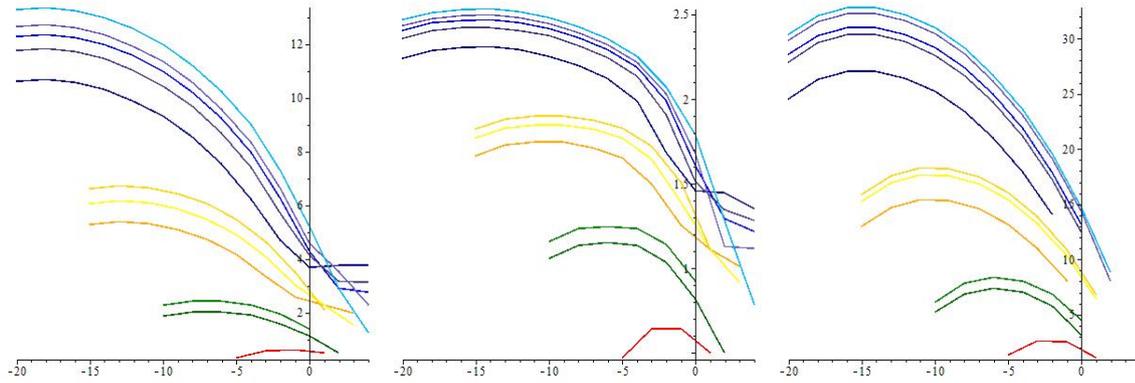


Рисунок 4.11 — Графики зависимости параметров гауссовой кривой, описывающей числа ЛМОВ, от  $n$  для узла  $8_{20}$ . Левый график описывает зависимость среднего  $\mu$ , центральный график - дисперсии  $\sigma$ , а правый график - интеграла  $I$ . Разные уровни представлений нарисованы разными цветами: красный - для первого уровня (одно представление [1]), зеленый - для второго уровня (представления соответственно [1,1] и [2] вверх) желтый - для третьего уровня (представления [1,1,1], [2,1] и [3] вверх соответственно) и синий - для четвертого уровня (представления соответственно [1,1,1,1], [2,1,1], [2,2], [3,1] и [4] вверх).

Можно снова увидеть, что без особых причин, которые мы обсуждали в с. 4.6.2, распределения похожи на один колокол. Эти изображения можно сравнить с рис. 4.8 из с. 4.6.2.

#### 4.6.5 $\mu$ и $\sigma$ как функции узлов

В этом пункте мы проиллюстрируем, как параметры гауссовского распределения  $\mu$  и  $\sigma$  зависят от типа узла. Чтобы сделать этот вопрос разумным, нужен не просто хаотичный список значений для конкретных узлов, а умный способ перечисления узлов. Это самая большая проблема классификации, которая не решалась в теории узлов на протяжении десятилетий. Подход, который мы считаем наиболее плодотворным, основан на рассмотрении семейств эволюции, когда диаграммы узлов составлены из элементарных составляющих, таких как различные подкосы и «пальцы» с их собственные «параметры эволюции». Зависимость полиномов узлов от этих параметров можно эффективно вычислить, и это обеспечивает очень четкий контроль над исчислением узлов. Единственным недостатком этого подхода является перерасчет: конкретный узел/зацепление может быть членом разных семейств (семейства пересекаются), но для многих целей (за исключением строгих классификационных теорем) это не вызывает

проблемы. Вложение более традиционных списков, таких как таблица Рольфсона и ее расширения [28], в несколько простых семейств описано в [43]. В данном разделе мы рассматриваем только эволюцию в определенных направлениях, этого достаточно для наших целей. Однако обобщения просты.

Наиболее естественная серия узлов дается набором узлов с косой изменяющейся длины. Простейшими из таких серий являются торические узлы (в случае параллельной косы) и скрученные узлы (в случае антипараллельной косы), более сложными, но все же естественными являются серии двойных кос и крендельных узлов. Здесь мы рассматриваем только первые два примера: 2- и 3-ниточные торические узлы, т. е. торические узлы  $T[2, 2k + 1]$  и  $T[3, 3k \pm 1]$ , и скрученные узлы  $Tw_k$ .

Начнем с изучения  $T[2, 2k + 1]$  - серий торических узлов. Оказывается, что параметры гауссовой кривой как функции  $k$  для рода, выбранного таким образом, чтобы  $I_{Q,n}$  было максимальным, линейно зависят от  $k$  с очень высокой точностью. Соответствующее значение  $n$  оказывается очень простой линейной функцией (обратите внимание, что вместо этого можно выбрать  $n$  таким образом, чтобы  $n - n_{min}$  было фиксированным, где  $n_{min}$  - минимальное значение  $n$ , когда коэффициенты ЛМОВ отличны от нуля; линейное поведение с таким выбором все еще сохраняется). Для представлений на третьем уровне значения  $n$  при максимальном  $I_{Q,n}$  равны  $6k + 2$ , а линейная зависимость имеет вид

– Для представления  $Q = [3]$

$$\mu_{[3], 6k+2} = 4.02k - 1.47$$

$$\sigma_{[3], 6k+2}^2 = 1.62k + 0.36$$

– Для представления  $Q = [2, 1]$

$$\mu_{[2,1], 6k+2} = 4.02k - 2.03$$

$$\sigma_{[2,1], 6k+2}^2 = 1.62k + 0.16$$

– Для представления  $Q = [1, 1, 1]$

$$\mu_{[1,1,1], 6k+2} = 4.02k - 2.78$$

$$\sigma_{[1,1,1], 6k+2}^2 = 1.62k - 0.22$$

Точно так же для представлений на четвертом уровне прямые линии:

– Для представления  $Q = [4]$

$$\mu_{[4],8k+3} = 7.15k - 1.27$$

$$\sigma_{[4],8k+3}^2 = 2.87k + 0.74$$

– Для представления  $Q = [3,1]$

$$\mu_{[3,1],8k+3} = 7.15k - 2.22$$

$$\sigma_{[3,1],8k+3}^2 = 2.87k + 0.42$$

– Для представления  $Q = [2,2]$

$$\mu_{[2,2],8k+3} = 7.15k - 1.85$$

$$\sigma_{[2,2],8k+3}^2 = 2.87k + 0.57$$

– Для представления  $Q = [2,1,1]$

$$\mu_{[2,1,1],8k+3} = 7.15k - 2.74$$

$$\sigma_{[2,1,1],8k+3}^2 = 2.87k + 0.20$$

– Для представления  $Q = [1,1,1,1]$

$$\mu_{[1,1,1,1],8k+3} = 7.15k - 3.88$$

$$\sigma_{[1,1,1,1],8k+3}^2 = 2.87k + 0.36$$

Видно, что наклон прямых зависит только от уровня репрезентативности, в отличие от постоянных сдвигов. Для наглядности мы демонстрируем соответствующие графики на рис. 4.12 для  $\mu_{[4],8k+3}$  и  $\sigma_{[4],8k+3}^2$ .

Аналогично линейной является зависимость от узла для трехнитевых торических узлов: для ряда  $T[3,3k+1]$  линейная зависимость имеет вид

$$\begin{aligned}
\mu_{[3],18k+9} &= 12.07k - 1.89, & \sigma_{[3],18k+9} &= 4.84k + 0.59 \\
\mu_{[2,1],18k+9} &= 12.07k - 2.46, & \sigma_{[2,1],18k+9} &= 4.84k + 0.40 \\
\mu_{[1,1,1],18k+9} &= 12.07k - 3.23, & \sigma_{[1,1,1],18k+9} &= 4.84k + 0.05 \\
\mu_{[4],24k+12} &= 21.46k - 1.36, & \sigma_{[4],24k+12} &= 8.60k + 1.17 \\
\mu_{[3,1],24k+12} &= 21.46k - 2.01, & \sigma_{[3,1],24k+12} &= 8.60k + 1.00 \\
\mu_{[2,2],24k+12} &= 21.46k - 2.37, & \sigma_{[2,2],24k+12} &= 8.60k + 0.85 \\
\mu_{[2,1,1],24k+12} &= 21.46k - 2.90, & \sigma_{[2,1,1],24k+12} &= 8.60k + 0.64 \\
\mu_{[1,1,1,1],24k+12} &= 21.46k - 4.05, & \sigma_{[1,1,1,1],24k+12} &= 8.60k + 0.09
\end{aligned} \tag{4.112}$$

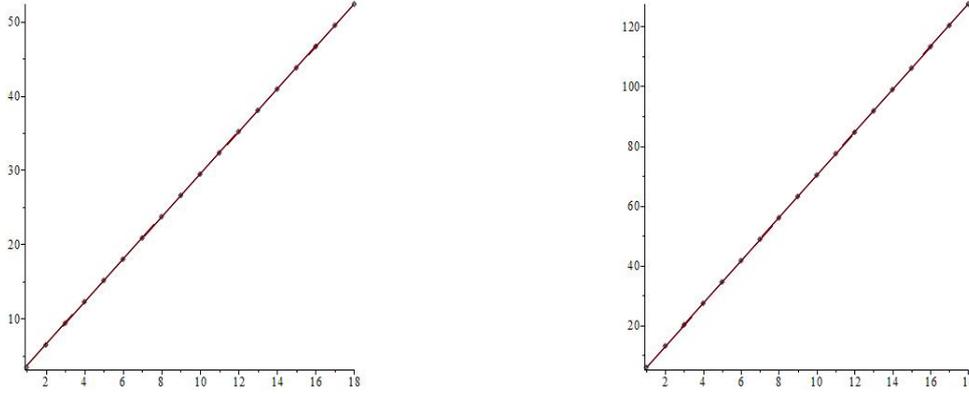


Рисунок 4.12 — Графики параметров  $\mu$  (левый рисунок) и  $\sigma^2$  (правый рисунок) для серии торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  в зависимости от  $k$ . На графике изображены  $\mu_{[4], 8k+3}$  и  $\sigma_{[4], 8k+3}^2$ .

Снова видно, что наклон прямых не зависит от представления (только от его уровня), а зависят только смещения. Более того, **отношения уклонов на уровнях 3 и 4, как для среднего, так и для дисперсии, равны одному и тому же значению 0,56 для обеих серий узлов.**

Таким образом, можно параметризовать среднее значение и дисперсию для представлений уровня  $p$  как

$$\mu_p^{(m)} = \alpha_p^{(m)} \cdot k + \gamma_{[Q], m, p}, \quad \left(\sigma_p^{(m)}\right)^2 = \beta_p^{(m)} \cdot k + \gamma_{[Q], m, p} \quad (4.113)$$

На самом деле такое поведение выглядит достаточно универсальным: можно рассмотреть другие серии узлов с растущей косой, и результат будет таким же. Рассмотрим еще два примера: пример скрученных узлов, где коса антипараллельна, и 3-рядные косы вида  $\underbrace{\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 1, 2, 1\}}_{2k-1}$  и  $\underbrace{\{1, 1, 1, \dots, 1, 1, -2, -1, -2, -1\}}_{2k-1}$ , где косы параллельны. В первом случае это параметры:

$$\alpha_2^{tw} = 0.89, \quad \beta_2^{tw} = 0.36, \quad \alpha_3^{tw} = 2.68, \quad \beta_3^{tw} = 1.08 \quad (4.114)$$

а во втором случае они совпадают со случаем двухниточного тора. Отсюда мы приходим к выводу, что параметры  $\alpha_p^{(m)}$ ,  $\beta_p^{(m)}$  зависят только от типа растущей косы, и предполагаем их зависимость вида

$$\alpha_p^{(m)} \sim m(m-1)p^2, \quad \beta_p^{(m)} \sim m(m-1)p^2 \quad (4.115)$$

для параллельной косы и

$$\alpha_p^{tw} \sim p(p-1), \quad \beta_p^{tw} \sim p(p-1) \quad (4.116)$$

для антипараллельной. Чтобы проверить (4.115), мы проверили его для серии трехнитевых торических узлов  $T[3, 3k + 1]$  на уровне 5 и пришли к выводу, что  $\alpha_5^{(3)} = 33.53$  и  $\beta_5^{(3)} = 13.43$ , в полном соответствии с (4.115). В гл. 4.7.5 мы приводим некоторые теоретические аргументы в пользу этих формул.

## 4.7 Изобилие и происхождение гауссовых кривых

Возникает естественный вопрос: насколько часто встречаются гауссовские распределения коэффициентов, действительно ли это экзотика среди «реалистичных» больших многочленов с положительными коэффициентами? Может возникнуть подозрение, что гауссова кривая может быть хорошим приближением почти для любой функции вблизи своего максимума и, таким образом, может показаться очень общим явлением. Однако нас интересуют *коэффициенты*, а не сама функция. Другими словами, то, что должно иметь резкий максимум, является своего рода преобразованием Фурье исходной функции. Итак, чего можно ожидать от коэффициентов?

### 4.7.1 Роль полиномиальности

С одной стороны, если функция общего типа, она ограничена и имеет ограниченные производные, типичным примером является что-то вроде  $\sin x$ . Затем, согласно формуле Маклорена, коэффициенты - это производные, деленные на факториалы, т.е. обычно они *маленькие*, а не большие.

С другой стороны, если мы, скажем, возьмем моном  $x^M$ , то есть функцию с одним ненулевым коэффициентом, а затем просто сдвинем аргумент  $x \rightarrow x+1$ , новую функцию  $(x+1)^M$  имеет биномиально распределенные коэффициенты с резким максимумом при больших  $M$ , и это тоже выглядит вполне типично. Отличие от предыдущего аргумента состоит в том, что  $k$ -производная равна  $\sim M^k x^{M-k}$  и на самом деле очень велика для любого ненулевого  $x$  (для  $x \gg M^{-1}$ , если быть точным).

Возможное разрешение кажущегося противоречия между этими двумя ожиданиями состоит в том, что распределение пиковых коэффициентов является свойством *многочленов*, для случайных многочленов высокой степени коэффициенты, как правило, большие: даже если они не были таковыми для некоторых конкретных ("начальный") выбор  $x$ , они получают его после любого сдвига  $x$ .

Если это новое ожидание верно, похоже, что вопрос для многочленов, вероятно, следует перевернуть: как вообще может случиться так, что многочлен имеет высокую степень и умеренные коэффициенты? В то же время *для* для *некоторого* выбора  $x$  коэффициенты были умеренными, для сдвинутого  $x$  они имеют биномиальный пик, и обычно будет один доминирующий пик просто потому, что разные биномиальные члены имеют экспоненциально разную высоту, и только одна легко превзойдет все остальные.

Таким образом, мы приходим к выводу, что гауссовость чисел ЛМОВ может быть *естественным* следствием как раз *полиномиальность* исходного инварианта ХОМФЛИ-ПТ, и, следовательно,  $f_R$ , а чудо - прямо противоположное: что есть своеобразная переменная  $q$ , в которой они являются многочленами с умеренными коэффициентами. Этот последний факт легко понять для «регулярных» (хорошо структурированных) узлов, где многочлены от  $q$  получают высокую степень в результате эволюции вдоль косы различной длины, что в основном дает только высокую степень  $q$  без каких-либо нетривиальных коэффициентов. Чтобы найти ХОМФЛИ-ПТ и  $f_R$  с большими коэффициентами, нужно смотреть на очень завязанные (неструктурированные) узлы, которые реализуются как замкнутая коса с примерно таким же большим количеством прядей, как количество пересечений, а не регулярными (например, скрученные узлы).

Тем не менее, даже в этом случае можно ожидать, что увеличение *представления*  $R$  восстановит "регулярность" и простоту полинома ХОМФЛИ по переменной  $q$  и, таким образом, гауссовость распределений коэффициентов в переменной  $q$ . переменная  $z$  встречается при достаточно большом  $R$ .

Теперь мы предоставим еще несколько технических иллюстраций к приведенным выше аргументам на очень простом примере: квантовые числа, которые, в определенном смысле, могут рассматриваться как хорошие модели характеров в целом и, в частности, многочленов узлов (которые также являются персонажами, хотя огромные алгебры петель). Этот вид языка также может быть полезен для изучения *отклонений* от гауссовости, которая, согласно на-

шим общим рассуждениям, также должна быть гауссовской: после вычитания главного пика подведущие должны начать доминировать и так далее. Мы проиллюстрируем это на примере *разницы* между мутантными узлами, которая концептуально связана с проблемой исправления, а технически - с квантовыми числами.

#### 4.7.2 "Игрушечный" пример: квантовые числа

Прежде всего, квантовое число - это функция с острым пиком на единичной окружности

$$[M] \equiv \frac{q^M - q^{-M}}{q - q^{-1}} \stackrel{q=e^{i\varphi}}{=} \frac{\sin(M\varphi)}{\sin \varphi} \quad (4.117)$$

Это потому, что  $[M]$  - это сумма  $\sum_{i=-M+1}^M q^{2i-1}$  с единичными коэффициентами, то есть почти преобразование Фурье единицы, которое было бы бесконечно пиковая  $\delta$ -функция. Таким образом, ясно, что в переменной  $\varphi$  мы должны получить распределение, близкое к гауссовскому. Но при чем здесь  $(1+z^2)^M = (1-4\sin^2 \varphi)^M$ ?

Квантовое число  $[M]$  можно переписать<sup>6</sup> как многочлен по  $z$  для любого нечетного  $M = 2K + 1$ :

$$[M] = [2K + 1] = (2K + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k + 1)!} \cdot \frac{(K + k)!}{(K - k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k z^{2k} \quad (4.118)$$

<sup>6</sup>Самый простой способ доказать это - использовать

$$\begin{aligned} [M] = [2K + 1] &= \frac{\sin(2K + 1)\varphi}{\sin \varphi} = \frac{\Im(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2K+1}}{\sin \varphi} = \sum_{l=0}^K \binom{2K + 1}{2l + 1} (-1)^l \sin^{2l} \varphi \cdot \cos^{2K-2l} \varphi = \\ &= \sum_{l=0}^K \binom{2K + 1}{2l + 1} z^{2l} (1 + z^2/4)^{K-l} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k \binom{2K + 1}{2l + 1} \binom{K - l}{k - l} \left(z^2/4\right)^k \end{aligned}$$

и использовать тождество

$$\sum_{l=0}^k \binom{2K + 1}{2l + 1} \binom{K - l}{k - l} = \frac{4^k (2K + 1) (K + k)!}{(2k + 1)! (K - k)!}$$

с  $z = q - q^{-1}$ . Коэффициент  $n_k$  перед  $z^{2k}$  представляет собой деформированное биномиальное распределение со средним

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{\sqrt{5}} \cdot \frac{q_*^M + q_*^{-M}}{q_*^M - q_*^{-M}} - 1 \right], \quad q_* = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad z_* = 1 \quad (4.119)$$

Оно имеет гауссову форму при больших  $K$

$$n_k = \frac{2K + 1}{(2k + 1)!} \cdot \frac{(K + k)!}{(K - k)!} \sim I_K \exp \left[ -\frac{5\sqrt{5}}{4K} \left( k - \frac{K}{\sqrt{5}} \right)^2 \right] \quad (4.120)$$

с

$$\sigma = \sqrt{\frac{2K}{5\sqrt{5}}}, \quad \mu = \frac{K}{\sqrt{5}}, \quad I_K = \frac{1}{\sqrt{K}} \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \right)^K \quad (4.121)$$

### 4.7.3 Другие примеры: отношения квантовых чисел

Можно наблюдать подобное поведение не только для квантовых чисел, но и для их отношений, которые по-прежнему являются полиномами от  $q$  и могут быть разложены в ряды по  $z$ . Рассмотрим два примера.

**Числа вида**  $\frac{[4K]}{[2K]}$ . Как и в предыдущем пункте, эти отношения квантовых чисел можно представить как суммы деформированного биномиального распределения вида

$$\begin{aligned} \frac{[4K]}{[2K]} &= 2N \cdot \sum_{k=0}^K \frac{(2K - k - 1)!}{(2K - 2k)!k!} \cdot z^{2K-2k} = 2K \cdot \sum_{k=0}^K C_{K+k}^{2k} \cdot \frac{z^{2k}}{K+k} = \\ &= \sum_{k=0}^K \frac{z^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(K+k)!}{(K-k)!} \cdot \frac{2K}{K+k} \quad (4.122) \end{aligned}$$

Это распределение очень похоже на (4.118) и в пределе больших  $K$  имеет среднее значение  $\mu = K/\sqrt{5}$  и приближается к распределению Гаусса (4.120) с теми же параметрами (4.121).

**Числа вида**  $\frac{[2(2K+1)]}{[2] \cdot [2K+1]}$ . Еще один пример - отношения вида  $[2(2K+1)]/[2][2K+1]$ , которые также можно трактовать таким же образом: эти числа разлагаются в суммы деформированных биномиальное распределение формы

$$\begin{aligned} \frac{[2(2K+1)]}{[2] \cdot [2K+1]} &= \sum_{k=0}^K \frac{(2K-k)!}{(2K-2k)!k!} \cdot z^{2K-2k} = \sum_{k=0}^K C_{K+k}^{2k} \cdot z^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^K \frac{z^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(K+k)!}{(K-k)!} \end{aligned} \quad (4.123)$$

Это распределение также очень близко к (4.118) и (4.122), поэтому в пределе больших  $K$  оно также имеет среднее значение  $\mu = K/\sqrt{5}$  и приближается к распределению Гаусса (4.120) с теми же параметрами (4.121).

**Числа вида**  $\frac{[2K]}{[2]}$ . Как и в предыдущих пунктах, эти отношения квантовых чисел можно представить как суммы деформированного биномиального распределения вида

$$\begin{aligned} \frac{[2K]}{[2]} &= \sum_{k=0}^K \frac{(K+k-1)!}{(K-k)!(2k-1)!} \cdot z^{2k} = \sum_{k=0}^K C_{K+k-1}^{2k-1} \cdot z^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^K \frac{z^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(K+k)!}{(K-k)!} \cdot \frac{2k}{K+k} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Это распределение очень похоже на (4.118) и в пределе больших  $K$  имеет среднее значение  $\mu = K/\sqrt{5}$  и приближается к распределению Гаусса (4.120) с теми же параметрами (4.121).

#### 4.7.4 Гауссовость мутантной разницы

Забавный пример прямо следует из предыдущего и результата [47] для мутантных узлов. *Разница* между двумя мутантами также распределена по Гауссу (!). Это просто потому, что это различие основано на отношениях квантовых

чисел, по крайней мере, в простейшем случае, когда оно уже вычислено:

$$\begin{aligned}
1. \quad & H_{[2,1]}^{11a19} - H_{[2,1]}^{11a25} = A^{-7} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
2. \quad & H_{[2,1]}^{11a24} - H_{[2,1]}^{11a26} = A^{-1} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
3. \quad & H_{[2,1]}^{11a44} - H_{[2,1]}^{11a47} = A \cdot f(A,q) \cdot \frac{[8]}{[2]} \cdot \mathbf{n} \\
4. \quad & H_{[2,1]}^{11a57} - H_{[2,1]}^{11a231} = A^{-5} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[8]}{[2]} \cdot \mathbf{n} \\
5. \quad & H_{[2,1]}^{11a251} - H_{[2,1]}^{11a253} = A^{-1} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
6. \quad & H_{[2,1]}^{11a252} - H_{[2,1]}^{11a254} = A^{-5} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
7. \quad & H_{[2,1]}^{11n34} - H_{[2,1]}^{11n42} = A^3 \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
8. \quad & H_{[2,1]}^{11n35} - H_{[2,1]}^{11n43} = A^{19} \cdot f(A,q) \cdot \mathbf{n} \\
9. \quad & H_{[2,1]}^{11n36} - H_{[2,1]}^{11n44} = A^{-9} \cdot f(A,q) \cdot \mathbf{n} \\
10. \quad & H_{[2,1]}^{11n39} - H_{[2,1]}^{11n45} = A^{-3} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n} \\
11. \quad & H_{[2,1]}^{11n40} - H_{[2,1]}^{11n46} = A^{13} \cdot f(A,q) \cdot \mathbf{n} \\
12. \quad & H_{[2,1]}^{11n41} - H_{[2,1]}^{11n47} = A^{-15} \cdot f(A,q) \cdot \mathbf{n} \\
13. \quad & H_{[2,1]}^{11n71} - H_{[2,1]}^{11n75} = A^{13} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[7][8]}{[14]} \cdot \mathbf{n} \\
14. \quad & H_{[2,1]}^{11n73} - H_{[2,1]}^{11n74} = A^{-3} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[8]}{[2]} \cdot \mathbf{n} \\
15. \quad & H_{[2,1]}^{11n76} - H_{[2,1]}^{11n78} = A^{-15} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[7][8]}{[14]} \cdot \mathbf{n} \\
16. \quad & H_{[2,1]}^{11n151} - H_{[2,1]}^{11n152} = A^{-9} \cdot f(A,q) \cdot \frac{[14]}{[2][7]} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{4.125}$$

где для краткости мы ввели стандартные множители  $\mathbf{n} := \frac{[3]^2[14]}{[2][7]}$  и  $f(A, q) := (q - q^{-1})^{11} \cdot D_3^2 D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}^2$  с  $D_n = (Aq^n A^{-1} q^{-n}) / (q - q^{-1})$ . Все эти различия представляют собой отношения квантовых чисел типов, рассмотренных в предыдущем подразделе, что неудивительно, поскольку диаграмма Юнга  $[2,1]$  не изменяется при транспонировании, т.е. эти полиномы ХОМФЛИ инвариантны относительно  $q \rightarrow -1/q$  и раскрываются в  $z$ .

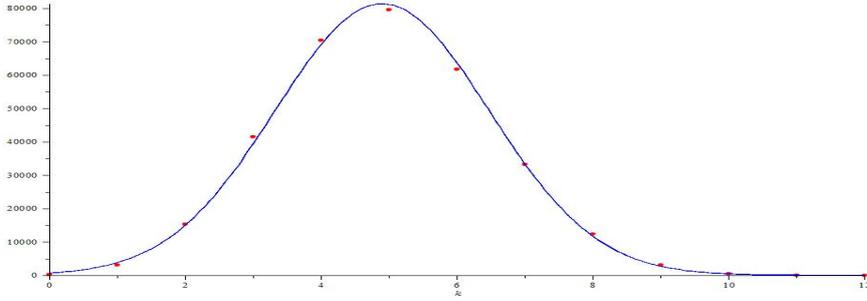


Рисунок 4.13 — Различия чисел ЛМОВ  $N_{[2,1],g,-15}^{11n41} - N_{[2,1],g,-15}^{11n47}$  в зависимости от рода мутанта пара  $11n41$  и  $11n47$  (12-я в списке (4.125)). Синяя кривая - это гауссова кривая (4.60) с параметрами  $\mu = 4.90$ ,  $\sigma = 1.58$ ,  $I = 3.21 \cdot 10^5$ , а параметры биномиального распределения равны  $p = 0,493$ ,  $n = 9,94$ .

Теперь посчитаем разность чисел ЛМОВ для пары мутантов на третьем уровне. Эта разница крошечная на уровне каждого узла (коэффициенты разности намного меньше, чем у полных многочленов, см. Рис. 4.5), но она хорошо определяется сама по себе и сама является гауссовой, см. Рис. 4.13. Фактически, поскольку полиномы ХОМФЛИ-ПТ пары мутантов на первых трех уровнях различаются только для представления  $[2,1]$ , разность чисел ЛМОВ может быть прочитана непосредственно из разности (4.125), а распределение чисел считывается из формул предыдущего пункта.

#### 4.7.5 Теоретическое объяснение и оценка: гауссовские параметры относительно узла

Кроме того, теперь мы можем дать простое качественное объяснение зависимости среднего гауссова значения в серии узлов, эмпирически обнаруженных и описанных в гл. 4.6.5, которое, несмотря на то, что оно очень приблизительное, оказывается на удивление точным.

Рассмотрим торический узел  $T[m, n]$ . Это может быть реализовано в виде замкнутой косы из  $m$  -ряд с  $nm$  пересечений. Полином ХОМФЛИ в представлении  $R$  в этом случае имеет вид [281]

$$H_R^{(T[m,n])} = \sum_{Q \in R^{\otimes m}} A^{-n(m-1)|R|} q^{mnC_2(R) - \frac{n}{m}C_2(Q)} C_{RQ} D_Q \quad (4.126)$$

где  $C_{RQ}$  - числовые коэффициенты (описывающие  $m$  -плетизм функций Шура),  $D_Q(q, A = q^N)$  - квантовые размеры  $SU(N)$  и  $C_2(R) = \sum_i r_i(r_i - 2l(R) + 2i - 1)$  -

значение второго оператора Казимира на  $R$ . Переход к числам ЛМОВ смешивает различные представления  $R$  данного уровня, и доминирующий вклад вносит максимальное значение показателя  $q$  в (4.126), которое задается симметричным представлением  $R = [r]$  и представление  $Q = \underbrace{[r, r, \dots, r]}_m$ . Этот вклад пропорци-

онален  $\frac{q^{n(m-1)|R|^2}}{A^{n(m-1)|R|}}$  и  $q \rightarrow -1/q$  симметрия чисел ЛМОВ, восстанавливается до отношения квантовых чисел

$$\sim \frac{[n(m-1)|R|^2]_q}{[2]_q} \quad (4.127)$$

которая может быть выражена через переменную  $z = q - q^{-1}$ . Как мы видели в разделе 4.3, коэффициенты (4.124)  $z$ -расширения  $[K]/[2]$  хорошо описываются распределением Гаусса со средним значением  $\mu = \frac{K}{2\sqrt{5}}$  и дисперсия  $\sigma^2 = 2/5 \cdot \mu$ .

Теперь мы можем объяснить результаты гл. 4.6.5. Например, выбирая  $n = mk + i$ ,  $i = 1..m-1$ , мы получаем для линейных в  $k$  частей среднего и дисперсии:  $\mu \sim \alpha \cdot k$ ,  $\sigma^2 \sim \beta \cdot k$  с

$$\alpha_{|R|}^{(m)} \approx \frac{m(m-1)|R|^2}{2\sqrt{5}} \quad (4.128)$$

$$\beta_{|R|}^{(m)} \approx \frac{m(m-1)|R|^2}{5\sqrt{5}} \approx \frac{2}{5} \alpha_{|R|}^{(m)} \quad (4.129)$$

и эти  $\alpha$ ,  $\beta$  зависят только от размера представления  $R$ . Мы наблюдали это явление в гл. 4.6.5 для торических узлов  $T[2, 2k+1]$  и  $T[3, 3k+1]$ .

Эта формула дает очень хорошие оценки  $\alpha$  и  $\beta$ , конкретная таблица "прогнозов" (4.128) и (4.129):

$m \setminus  R $	1	2	3	4	5	6	...
$\alpha_{ R }^{(m)} =$	2	0.45	1.79	4.02	7.16	11.2	16.1
	3	1.34	5.37	12.07	21.47	33.54	48.30
	4	2.68	10.73	24.15	42.93	67.08	96.60
	5	4.47	17.89	40.25	71.55	111.8	161.0
	6	6.71	26.83	60.37	107.3	167.7	241.5
	...						
$m \setminus  R $	1	2	3	4	5	6	...
$\beta_{ R }^{(m)} =$	2	0.18	0.72	1.61	2.86	4.47	6.44
	3	0.54	2.15	4.83	8.59	13.42	19.32
	4	1.07	4.29	9.66	17.17	26.83	38.64
	5	1.79	7.16	16.10	28.62	44.72	64.40
	6	2.68	10.73	24.15	42.93	67.08	96.60
	...						

(4.130)

Эти цифры полностью подтверждаются экспериментальными результатами из гл. 4.6.5. Также обратите внимание, что из (4.128) - (4.129) следует, что отношения:

$$\frac{\alpha_{|R|}^{(m)}}{\alpha_{|R|+1}^{(m)}} \approx \frac{\beta_{|R|}^{(m)}}{\beta_{|R|+1}^{(m)}} \approx \frac{|R|^2}{(|R| + 1)^2} \quad (4.131)$$

не зависят от  $m$ , что также наблюдалось в гл. 4.6.5.

Наконец, мы можем заметить, что  $A$ -зависимость в (4.126) определяется множителем  $A^{-n(m-1)|R|}$ . Это полностью согласуется со значениями  $n$ , когда  $I_{Q,n}$  максимален по гл. 4.6.5: они описываются линейной зависимостью от параметра эволюции  $k$ , а наклон равен задается  $2|R|$  для торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  и  $6|R|$  для торических узлов  $T[3, 3k + 1]$ .

Теперь заметим, что это рассмотрение нашего торического узла можно буквально повторить для любой параллельной двухниточной косы длины  $k$  на

любом узле (см. [71, уравнение (78)]). Следовательно, результаты, наблюдаемые в гл. 4.6.5 для неторического узла.

Другой пример, рассмотренный в гл. 4.6.5, - это эволюция вдоль антипараллельной двухрядной косы, как пример, реализованный в скрученных узлах. Тогда единственное изменение в приведенных выше формулах связано с  $R$ -зависимостью [71]: в этом случае промежуточное представление  $Q \in R \otimes \bar{R}$ , которое дает главный вклад, равно  $Q = [2r, \underbrace{r, r, \dots, r}_{N-2}]$  и соответствующий вклад равен  $(Aq^{r-1})^{2kr}$  (см. [71, Уравнение (112)]), т.е. ответы

$$\alpha_{|R|}^{tw} \approx \frac{|R| (|R| - 1)}{\sqrt{5}}, \quad \beta_{|R|}^{tw} \approx \frac{2|R| (|R| - 1)}{10\sqrt{5}} \quad (4.132)$$

which gives

$$\begin{aligned} \alpha_2^{tw} &= \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.89, & \alpha_3^{tw} &= \frac{6}{\sqrt{5}} = 2.68, & \alpha_4^{tw} &= \frac{12}{\sqrt{5}} = 5.37 \\ \beta_2^{tw} &= \frac{4}{5\sqrt{5}} = 0.36, & \beta_3^{tw} &= \frac{12}{5\sqrt{5}} = 1.07, & \beta_4^{tw} &= \frac{24}{5\sqrt{5}} = 2.15 \end{aligned} \quad (4.133)$$

в полном соответствии с экспериментальными результатами гл. 4.6.5.

Обратите внимание, что  $A$ -зависимые множители в этом случае зависят также от представления  $Q$  и равны  $A^{2|R| \cdot k}$ , также в соответствии с гл. 4.6.5.

#### 4.7.6 Остающаяся загадка

Таким образом, мы видим, что гауссово распределение является свойством коэффициентов квантовых чисел, когда они повторно разлагаются по степеням  $z = qq^{-1}$ , и, в соответствующих условиях, это может быть технической причиной для гауссовости чисел ЛМОВ. Однако остается как минимум три вида вопросов.

Во-первых, необходимо лучше понять само свойство квантовых чисел. Появление золотого сечения  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , которое является  $q$ -прообразом  $z = 1$ , вызывает бесчисленное количество ассоциаций, и многие из них заслуживают дальнейшего анализа.

Во-вторых, чтобы это свойство служило объяснением гауссовости, полиномы узлов должны быть каким-то образом аппроксимированы *изолированными* квантовыми числами. Если сложить или вычесть много соседних квантовых чисел, гауссовость нарушится: можно играть с комбинациями вроде  $\sum_{i=0}^s c_i [2K - 2i + 1]$  с большими  $K$  и маленькими  $s = 2, 3, 4, 5$ , чтобы увидеть, что гауссовость  $z$ -коэффициентов может быть легко нарушена. Причиной тому является довольно слабая  $K$ -зависимость "амплитуды"  $I_K$  в (4.121): этого достаточно, чтобы  $c_{i+1}/c_i$  превысило  $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = 2,62\dots$ , чтобы следующий член преобладал над предыдущим. В предыдущем подразделе мы продемонстрировали, как эту проблему можно устранить, собирая вклады с заданной степенью  $A$  и увеличивая такие параметры, как размер представления, параметр эволюции и количество нитей: это часто позволяет преобразовать объединять полиномы узлов в комбинации квантовых чисел с параметрическим разделением (т.е. запрещать соседние числа). Однако этот аргумент еще недостаточно обоснован, чтобы дать убедительное объяснение всем случаям.

В-третьих, числа ЛМОВ подсчитывают голоморфные отображения римановых поверхностей, и также необходима интерпретация гауссова распределения в этих терминах. Это может стать естественным, если существуют независимые обмотки вокруг множества циклов, тогда следует продемонстрировать, что такой подсчет циклов обеспечивает правильные числа и воспроизводит параметры гауссовских распределений  $(\mu, \sigma, I)$  для различных узлов.

Каждое из этих направлений можно разделить на множество более мелких вопросов, которые заслуживают тщательного изучения. Что важно, теперь у нас есть достаточно экспериментальной информации и соответствующая теоретическая установка (статистические свойства квантовых чисел после преобразования  $q \rightarrow z$  в виде Тоды), чтобы начать реальное изучение чисел ЛМОВ и структуры топологических теорий, связанных с узлами.

На основе анализа большого количества целых чисел ЛМОВ, полученных в результате недавних достижений в исчислении древесных узлов, мы сделали «экспериментальное» наблюдение, ведущее к следующему

**Гипотеза:** *Абсолютные значения чисел ЛМОВ  $N_{Q,g,n}^K$  для достаточно больших представлений  $Q$  приближаются к гауссовскому/биномиальному распределению по  $g$  с помощью всего лишь трех  $Q, n$ -зависимых параметров. Аналогичное колоколообразное поведение наблюдается для распределения по  $n$ .*

Эта гауссовская асимптотика достигается быстрее (за  $|Q|$ ) для "нерегулярных" узлов  $\mathcal{K}$ , в то время как для узлов с регулярными подструктурами можно сначала (при малых  $Q$ ) получить суперпозицию нескольких гауссовских колоколов.

Это наблюдение открывает способ подсчета *истинных фундаментальных* степеней свободы в связанных с узлами/зацеплениями топологических теориях Гопакумара-Оогури-Вафа, что может стать первым шагом к пониманию того, чем они являются на самом деле.

Концептуальное значение появления и наблюдения *распределений* в точно решаемой теории Черна-Саймонса еще предстоит оценить. Мы просто отметим, что оно отражает общие ожидания в нелинейной алгебре, см. [61]. Было бы весьма интересно связать гауссовость распределений ЛМОВ с попыткой [155] статистически охарактеризовать все разнообразие цветных многочленов ХОМ-ФЛИ-ПТ в терминах алгебро-геометрического подхода к теории множеств Мандельброта. Другой вариант - сделать еще один шаг и посмотреть на распределение трех параметров гауссовского колокола в пространстве узлов. Опыт [68] (в случае инвариантов Васильева) показывает, что такие «ландшафтные» распределения могут демонстрировать новые (следующего уровня) загадочные структуры. В гл. 4.6.5 и 4.7.5 мы продемонстрировали возможность и мощь этого подхода, его развитие - одна из очевидных задач на будущее.

Технически гауссово / биномиальное распределение от  $z$ -переменной кажется типичным для квантовых чисел и их соотношений, и это наследуется многочленами узлов. Однако реальный смысл этого явления и его QFT/струнная интерпретация все еще нуждаются в более глубоком понимании. В этом тексте мы продемонстрировали, что после достижений в вычислении квантовых инвариантов узлов экспериментальных данных теперь достаточно, чтобы проверить и развить любую гипотезу о числах ЛМОВ, и это открывает путь к полному пониманию этой интригующей области науки, ключевой для разработки количественного подхода к AdS/CFT-соответствию и другим аватарам струнной дуальности открытого-закрытого типа.

## Глава 5. Симметрии и соотношения бj-символов

### 5.1 Введение

Хорошо известно [145], что в  $U_q(sl_2)$  есть аналитическое выражение для произвольного коэффициента Рака через  $q$ -гипергеометрическую функцию  ${}_4\Phi_3$ . Это позволяет нам аналитически исследовать бj-символы, что приводит к различным интересным результатам. В качестве иллюстрации есть несколько сравнительно недавних статей [280] [77] [305] [55]. Для алгебр с более высокими рангами  $N > 2$  ситуация намного сложнее. Для симметрических представлений явные ответы в терминах  ${}_4\Phi_3$  были получены в [7; 219], но для произвольных представлений  $U_q(sl_N)$  аналогичные аналитические выражения для бj-символов еще предстоит обнаружить. Несмотря на то, что мы можем получить значение коэффициента Рака с помощью метода старшего веса [193], это очень сложный и громоздкий подход, который быстро становится практически неприменимым, когда мы пытаемся рассмотреть большие представления. Тем не менее, очень важно обобщить различные свойства коэффициентов Рака для  $U_q(sl_2)$  на случай  $U_q(sl_N)$ , что может привести нас к общим ответам в случае  $U_q(sl_N)$  для коэффициентов Рака в будущем.

Все симметрии матриц Рака для  $U_q(sl_2)$  хорошо известны и хорошо изучены. В данном разделе нас интересуют линейные симметрии коэффициентов Рака для  $U_q(sl_N)$ , вытекающие из гипотезы о собственных значениях. Более сложные нелинейные симметрии (например, тождество пентагона) выходят за рамки данной исследования. Линейные симметрии коэффициентов Рака для  $U_q(sl_2)$  включают симметрии Редже, симметрии тетраэдра и преобразование  $q \longleftrightarrow q^{-1}$ . Однако должны быть нетривиальные обобщения симметрий Редже и тетраэдра для  $U_q(sl_N)$ , которые пока не известны.

Гипотеза о собственных значениях происходит из уравнения Янга-Бакстера для узлов или зацеплений. Это уравнение в терминах  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц есть не что иное, как алгебраическая форма третьего движения Рейдемейстера в теории узлов. Каждая  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрица действует в тензорном произведении представлений и переставляет два соседних элемента; этот оператор соответствует генератору группы кос в теории узлов. Диагонализируя  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы с помощью матриц Ра-

ка, можно получить уравнение, определяющее матрицы Рака, через собственные значения  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц. Это приводит к гипотезе о собственных значениях, которая утверждает, что матрицы Рака полностью определяются наборами соответствующих  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц.

Это отнюдь не тривиальный факт. Фактически, уравнение Янга-Бакстера, если оно решается относительно матриц Рака, имеет несколько решений, и число решений становится больше по мере роста размеров матриц. Тем не менее, кажется, что сами матрицы Рака всегда однозначно определяются собственными значениями  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц или, по крайней мере, так бывает во всех изученных примерах. Более того, существует точное выражение для матриц Рака через собственные значения  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы размером до  $5 \times 5$  [71] и  $6 \times 6$  [190]. Гипотезу о собственных значениях можно обобщить, включив в нее зацепления. Поскольку имеется несколько различных диагональных  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц, матрицы Рака зависят от собственных значений всех из них. Еще одно обобщение, которое можно сделать, – это перейти от матриц с 3 нитями к большему количеству нитей. Здесь, как оказалось, нужно использовать не только уравнение Янга-Бакстера, но и коммутационные соотношения на разных  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицах, разных генераторах групп кос. Это также позволяет построить точное выражение для соответствующих матриц Рака через собственные значения  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц по крайней мере для матриц  $5 \times 5$  в 4-нитевой косе [70].

Хотя гипотеза о собственных значениях еще не доказана, она проверялась во многих случаях и использовалась, например, для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для трехнитевых узлов [71] и зацеплений [219] в произвольных симметрических представлениях. Эти случаи выделенные, поскольку в  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицах нет кратностей – нет совпадающих собственных значений. Если есть совпадающие собственные значения, ситуация усложняется, потому что в уравнениях Янга-Бакстера и их решениях появляется дополнительная свобода. Однако даже в этом случае кажется, что часто матрица Рака может быть сделана блочно-диагональной, причем сами блоки удовлетворяют гипотезе о собственных значениях [237]. Другим важным приложением гипотезы о собственных значениях является ее связь [192] с известным свойством полиномов Александра, которое связывает все полиномы Александра для одного и того же узла и различных представлений, обозначенных однокрюковыми диаграммами Юнга. Это свойство приводит к очень неожиданной связи цветных полиномов Александра с интегрируемой иерархией КП [204]. Также гипотеза о собствен-

ных значениях предсказывает новые симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которые можно проверить на некоторых конкретных примерах [205; 206].

Стоит напомнить, что матрицы Рака можно рассматривать двумя способами: те, чье тензорное произведение первых трех представлений разлагается в четвертое, называются *инклюзивными* матрицами или матрицами смешивания. С другой стороны, существует определение матрицы Рака, в котором представления делятся на две пары, а тензорное произведение первой пары преобразуется матрицей Рака во второе произведение. Мы называем такие матрицы Рака *экслюзивными*. Очевидно, что мы можем переписать эксклюзивную матрицу Рака, используя обозначения для инклюзивных, но эксклюзивные будут иметь одно сопряженное представление, поэтому для разных  $N$  в  $U_q(sl_N)$  представления разные. Наиболее важное различие между этими двумя типами состоит в том, что при достаточно большом  $N$  для любой алгебры  $U_q(sl_N)$  инклюзивные матрицы Рака не зависят от  $N$ . Эксклюзивные матрицы Рака, напротив, всегда явно зависят от  $N$ .

## 5.2 Коэффициенты Рака, 6-j символы и выражения типа I и II

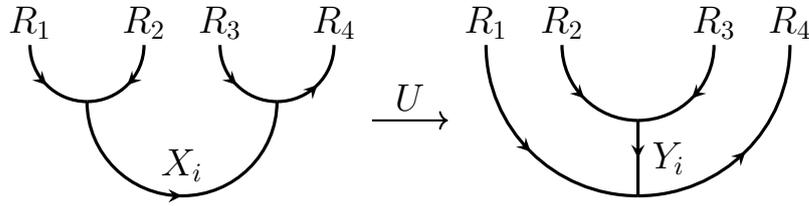
Для того, чтобы определить 6-j символы, напомним сначала определение матрицы Рака. Здесь мы работаем с  $q$ -деформированной алгеброй  $U_q(sl_N)$ . Рассмотрим 3 неприводимых  $\mathbb{C}$ -модуля представлений  $R_1, R_2, R_3$ , действующих на  $V_{R_1}, V_{R_2}, V_{R_3}$ . Ассоциативность тензорного произведения означает, что  $(V_{R_1} \otimes V_{R_2}) \otimes V_{R_3} = V_{R_1} \otimes (V_{R_2} \otimes V_{R_3})$ , поэтому существует унитарное преобразование:

$$U : (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \rightarrow R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3). \quad (5.1)$$

С другой стороны, мы можем переписать это через неприводимые компоненты, где  $M_X^{R_1, R_2}$  пространство кратностей всех  $X$  в разложении  $R_1 \otimes R_2$ :

$$\begin{aligned} (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 &= \left( \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes X_i \right) \otimes R_3 = \bigoplus_{i,k} M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_{4k}}^{X_i, R_3} \otimes R_{4k}, \\ R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) &= R_1 \otimes \left( \bigoplus_j M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes Y_j \right) = \bigoplus_{j,k} M_{R_{4k}}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes R_{4k}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если мы рассматриваем в разложении какое-то конкретное  $R_4$ , ему соответствует векторному пространству представлений. Базис, построенный из векторов старшего веса отличается в этих двух типах слияния.



Поэтому отображение между этими векторными пространствами определяется матрицей Рака или 6- $j$  символами Рака-Вигнера.

**Определение 7.** Коэффициенты Рака - это элементы матрицы отображения:

$$U \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} : \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_4}^{X_i, R_3} \rightarrow \bigoplus_j M_{R_4}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3}. \quad (5.3)$$

**Определение 8.** 6- $j$  символы Вигнера - это элементы отнормированной матрицы Рака:

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & X_i \\ R_3 & R_4 & Y_j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\dim_q(X_i) \dim_q(Y_j)}} U_{i,j} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Здесь  $\dim_q$  означает квантовую деформацию обычного выражения для размерности представления [219]. Она может быть вычислена для любого  $U_q(sl_N)$  представления  $R$  по соответствующей диаграмме Юнга  $\lambda$  ( $\lambda^T$  - транспонированная диаграмма Юнга):

$$\dim_q(\lambda) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{q^{\frac{1}{2}(N+i-j)} - q^{-\frac{1}{2}(N+i-j)}}{q^{\frac{1}{2}(\lambda_i - i + \lambda_j^T - j + 1)} - q^{-\frac{1}{2}(\lambda_i - i + \lambda_j^T - j + 1)}}. \quad (5.5)$$

В данном разделе мы работаем со специальным классом  $6-j$  символов, который можно рассматривать как естественное обобщение случая  $U_q(sl_2)$  на  $6-j$  символы  $U_q(sl_N)$ . Исходные представления и представление получающееся в результате, все – симметрические или сопряженные к симметрическим для этого класса. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что представления  $R_1, R_2, R_3, R_4$  симметрические. Соответствующие диаграммы Юнга имеют вид  $[r_1], [r_2], [r_3], [r_4]$ , где  $r_n$  целые числа, обозначающие количество клеток в диаграмме Юнга симметрического представления  $U_q(sl_N)$ . Сопряженная диаграмма Юнга записывается как  $\overline{[r_n]}$  и соответствует представлению  $\overline{R_n}$ .

**Определение 9.** Мы будем называть два  $6-j$  символа ниже типом I и типом II,  $\square$  означает  $N - 1$  клетку по вертикали.

$$I \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & \overline{[r_2]} & X \\ [r_3] & [r_4] & Y \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \square \dots \square & \square \dots \square & \square \dots \square \dots \square \\ \square \dots \square & \square \dots \square & \square \dots \square \dots \square \end{array} \right\}, \quad (5.6)$$

$$II \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [r_2] & X \\ \overline{[r_3]} & [r_4] & Y \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \square \dots \square & \square \dots \square & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \dots \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \dots \square \\ \square \dots \square & \square \dots \square & \square \dots \square \dots \square \end{array} \right\}. \quad (5.7)$$

Несмотря на то, что аргументы  $R_1, R_2, R_3, R_4$  очень просты и могут быть запараметризованы шириной и числом  $N$ , последняя пара диаграмм Юнга  $X$  и  $Y$  имеет более сложные выражения. Есть два возможных варианта тензорного произведения:  $[r_n] \otimes [r_m]$  и  $[r_n] \otimes \overline{[r_m]}$ . Каждый элемент в разложении зависит от начальной пары представлений и от номера в сумме. Используя правила Литтлвуда-Ричардсона [83] несложно увидеть, что упомянутые тензорные произведения не содержат кратностей и все представления в разложении имеют различную ширину. Аналогично случаю  $U_q(sl_2)$ , где можно занумеровать диаграммы только целочисленным параметром  $i$ , для рассматриваемых  $U_q(sl_N)$  разложений мы имеем нумерующий параметр – длина первой строки. Для того, чтобы сократить обозначения, мы будем писать  $6-j$  символ типа I и типа II в более компактном виде. Обозначим тип индексом  $T \in \{1, 2\}$ .  $6-j$  символ типа I:

$$\left[ \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{array} \right]_1^N := \left\{ \begin{array}{cc} [r_1] & \overline{[r_2]} \\ [r_3] & [r_4] \end{array} \left[ \begin{array}{c} i, \frac{r_2 - r_1 + i^{N-2}}{2} \\ j, \frac{r_2 - r_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\}, \quad (5.8)$$

и типа II:

$$\left[ \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{array} \right]_2^N := \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [r_2] & \left[ \frac{r_1 + r_2 + i}{2}, \frac{r_1 + r_2 - i}{2} \right] \\ [r_3] & [r_4] & \left[ j, \frac{r_2 - r_3 + j^{N-2}}{2} \right] \end{array} \right\}, \quad (5.9)$$

где  $i, j$  определены в таком виде, чтобы получить хороший предел при  $N = 2$ .

Отметим, что правила слияния накладывают дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned} r_1 + r_3 &= r_2 + r_4 && \text{для типа I,} \\ r_1 + r_2 &= r_3 + r_4 && \text{для типа II.} \end{aligned} \quad (5.10)$$

**Определение 10.** Равенства (5.115) между  $6$ - $j$  символами  $U_q(sl_2)$  называются симметриями Редже или преобразованиями Редже [272] ( $\rho = \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2}$ ,  $\rho' = \frac{r_1+r_3+i+j}{2}$ ,  $\rho'' = \frac{r_2+r_4+i+j}{2}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho - r_3 & \rho - r_4 & i \\ \rho - r_1 & \rho - r_2 & j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho' - r_3 & r_2 & \rho' - j \\ \rho' - r_1 & r_4 & \rho' - i \end{array} \right\} = \quad (5.11)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} r_1 & \rho'' - r_4 & \rho'' - j \\ r_3 & \rho'' - r_2 & \rho'' - i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho - r_3 & \rho' - r_4 & \rho'' - j \\ \rho - r_1 & \rho' - r_2 & \rho'' - i \end{array} \right\} = \quad (5.12)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \rho'' - r_3 & \rho - r_4 & \rho' - j \\ \rho'' - r_1 & \rho - r_2 & \rho' - i \end{array} \right\}.$$

**Определение 11.** Симметрия тетраэдра – известное свойство инвариантности  $6$ - $j$  символов относительно перестановок строк и столбцов [102] ( $\lambda_i, \mu, \nu$  – произвольные диаграммы Юнга):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \mu \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \nu \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\nu} \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_4 & \bar{\mu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_3 & \bar{\lambda}_4 & \bar{\mu} \\ \lambda_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\nu} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \bar{\mu} & \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_3 & \bar{\nu} & \bar{\lambda}_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_2 & \lambda_1 & \mu \\ \bar{\lambda}_4 & \bar{\lambda}_3 & \bar{\nu} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

**Предложение 1.**  $6$ - $j$  символ  $U_q(sl_N)$ ,  $N > 2$  с симметрическими и сопряженными симметрическим представлениями либо тривиален ( $X$  и  $Y$  имеют единственное возможное значение), либо может быть приведен к типу I или типу II с помощью тетраэдральных симметрий и сопряжения.

*Доказательство.* Всего есть несколько возможных вариантов написать  $6-j$  символ с симметрическими и сопряженными симметрическим представлениями. Сопряжением  $6-j$  символа мы можем преобразовать  $R_4$  в симметрическую диаграмму. Поэтому, без ограничения общности, докажем предложение только для симметрического  $R_4$ . Рассмотрим теперь, как могут быть устроены первые три аргумента. Есть четыре различных случая, которые соответствуют количеству сопряженных представлений в произведении.

– Все три представления являются сопряженными к симметрическим.

Сопряжем все члены в произведении  $\overline{[r_1]} \otimes \overline{[r_2]} \otimes \overline{[r_3]} \supset [r_4]$ , так что мы можем рассматривать  $[r_1] \otimes [r_2] \otimes [r_3] \supset \overline{[r_4]}$  и  $N > 2$ . Из правил слияния очевидно [83] что для  $N > 4$  невозможно скомбинировать представления в сопряженное, т.к. в диаграмме Юнга итогового представления не более 3 строк, в то время как  $\overline{[r_4]}$  содержит  $N - 1 > 3$  строк.

Остается доказать, что это невозможно и для  $N = 3, 4$ . В случае  $N = 4$  необходимо, чтобы строки  $R_4$  были равны. Правила Литтлвуда-Ричардсона [83] говорят, что итоговая диаграмма в произведении всегда получена как диаграмма первого сомножителя, к которой добавили элементы диаграммы второго, но с некоторыми ограничениями. Для симметрических представлений эти ограничения запрещают ставить элементы второй диаграммы в один столбец. Следовательно, если мы хотим получить из двух диаграмм квадратную, то соответствующий  $6-j$  символ должен быть тривиальным. Действительно, единственный способ правильно скомбинировать диаграммы - это взять их равными и положить друг на друга.

Здесь и далее мы используем некоторые неотрицательные целочисленные параметры  $a, b, c$ , которые кодируют диаграмму Юнга, цель этих параметров - определить форму рассматриваемой диаграммы.

Случай  $N = 3$  содержит диаграмму  $\overline{[r_4]}$  которая может быть записана как  $[a, a]$ .  $[a, a]$  тривиально, т.к. существует только одна диаграмма  $X = [r_1 + r_2 - b, b]$ , которая имеет ширину  $a$ . Действительно, если ширина меньше, то третий множитель не может сделать третью строку равной  $a$ , а если она больше, то мы уже не можем получить  $R_4$  в произведении. Следовательно, все  $N > 2$   $6-j$  символы с 3 представлениями, сопряженными симметрическим, тривиальны.

– Все три представления симметрические.

Очевидно, что если  $R_1, R_2, R_3, R_4$  симметрические в  $U_q(sl_N)$ ,  $N > 3$ , то соответствующий 6-j символ содержит единственное  $X = [r_1 + r_2]$ , то же верно и для  $Y$ . Если же  $N = 3$ , то возможно сделать диаграмму Юнга со столбцами высоты  $N$ . Тем не менее, правила слияния накладывают ограничение  $X = [r_1 + r_2 - a, a] = [b + r_4, b]$ , поэтому  $X = [r_1 + r_2 + r_4, r_1 + r_2 - r_4]$  и этот 6-j символ тривиален.

- Два представления сопряжены симметрическим, а одно – симметрическое.

Заметим, что кратность  $R_4$  в разложении  $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$  не меняется при перестановке сомножителей. Поэтому мы всегда можем сначала разложить произведение представлений, сопряженных симметрическим, а затем умножить на симметрическое. Без потери общности будем рассматривать  $\overline{[r_1]} \otimes \overline{[r_2]} \otimes [r_3]$ .

Разложим сначала произведение сопряженных представлений. В общем случае оно содержит диаграмму вида  $[a^{N-2}, b]$ , где  $b \leq a$ . Она получена из  $[(r_1 + r_2)^{N-2}, r_1 + r_2 - c, c]$  за счет удаления столбцов высоты  $N$ . Если  $N > 3$ , то произведение  $[a^{N-2}, b] \otimes [r_3]$  может содержать симметрическую диаграмму только если  $a = b$ , но она будет тривиальной, т.к.  $X = [(r_3 - r_4)^{N-1}]$ . Если  $N = 3$ , из  $[a, b] \otimes [r_3]$  легко получается симметрическая диаграмма с условием  $X = [a, a + r_3 - r_4]$ . Но мы можем найти  $a$  из разложения  $\overline{[r_1]} \otimes \overline{[r_2]}$  и оно единственно для фиксированных  $r_1$  и  $r_2$ .

В результате, не существует нетривиальных 6-j символов с двумя сопряженными симметрическим представлениями и симметрическим  $R_4$ .

- Одно представление, сопряженное симметрическому.

Существует 3 таких 6-j символа с точностью до сопряжения:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{[r_1]} & [r_2] & X \\ & [r_3] & [r_4] & Y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & \overline{[r_2]} & X \\ & [r_3] & [r_4] & Y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [r_2] & X \\ \overline{[r_3]} & [r_4] & Y \end{array} \right\}. \quad (5.14)$$

Можно проверить, что они могут быть нетривиальными.

К этим 6-j символам можно применить тетраэдральную симметрию, в частности, перестановку строк аргументов  $(R_1, R_2) \leftrightarrow (R_3, R_4)$ . После этого преобразования первый и третий 6-j символы меняются местами, а второй остается неизменным. Применяя другие симметрии, можно проверить, что тип I и тип II не переводятся друг в друга тетраэдральными симметриями.  $\square$

Стоит отметить, что внутри каждого типа действуют тетраэдральные симметрии. В частности, 6- $j$  символ типа I по-прежнему остается типом I после перестановок строк и перестановки первых двух столбцов. Тип II сохраняется только перестановкой строк первых двух столбцов. Это единственные тетраэдральные симметрии, которые можно получить, если рассматривать симметрии типа I или типа II. Остальные либо использовались ранее для преобразования 6- $j$  символа в один из типов, либо преобразовывали любой тип в совершенно другой 6- $j$  символ, который содержит несимметрические представления и гораздо более сложную структуру, поэтому они выходят за рамки данного раздела.

Выражение для 6- $j$  символов типов I и II было предложено в [227]. Оно может быть записано следующим образом:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N = \theta_N(r_1, r_2, i) \theta_N(r_3, r_4, i) \theta_N(r_1, r_4, j) \theta_N(r_2, r_3, j) [N-1]_q! [N-2]_q! \times \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{z=z_{\min}}^{z_{\max}} (-1)^z [z+N-1]_q! A_{T,z} \left( [z - \frac{r_1+r_2+i}{2}]_q! [z - \frac{r_3+r_4+i}{2}]_q! [z - \frac{r_1+r_4+j}{2}]_q! \times \right. \\ & \left. \times [z - \frac{r_2+r_3-j}{2}]_q! [\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2} - z]_q! [\frac{i+j+r_1+r_3}{2} - z]_q! [\frac{i+j+r_2+r_4}{2} - z]_q! \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\theta_N(a, b, c) = \sqrt{\frac{[\frac{a+b-c}{2}]_q! [\frac{c+a-b}{2}]_q! [\frac{b+c-a}{2}]_q!}{[\frac{a+b+c}{2} + N - 1]_q!}}, \quad A_{T,z} = \begin{cases} \frac{[k+z_{\min}-z]_q!}{[k+z_{\min}+N-2-z]_q!} & \text{для типа I,} \\ \frac{[k-z_{\max}+z]_q!}{[k-z_{\max}+N-2+z]_q!} & \text{для типа II.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Чтобы записать 6- $j$  символ, мы используем обозначения квантовых чисел. По определению  $[n]_q = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ . Квантовое обобщение факториалов неотрицательных чисел записывается как  $[n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q$ . Также  $k = \frac{1}{2} \min(i - r_1 + r_2, j - r_3 + r_2)$  и  $z_{\min}, z_{\max}$  определены как наименьшее и наибольшее целое число для которых соответствующее слагаемое нетривиально, т.е. нет факториалов отрицательных целых чисел. Формула отличается для двух типов только в выражении  $A_{T,z}$ . Также в исходной статье были наложены следующие условия [227] (как мы покажем ниже, в этом нет необходимости):

$$\begin{cases} 0 \leq r_2 \leq r_1 \leq r_3 & \text{для типа I,} \\ 0 \leq r_1 \leq r_2 & \text{для типа II.} \end{cases} \quad (5.18)$$

### 5.3 Гипергеометрическое выражение для 6-*j* символа

В этом разделе мы выражаем 6-*j* символ в терминах простых *q*-гипергеометрических рядов  ${}_4\Phi_3$ . Сначала мы определяем *q*-гипергеометрические функции и напоминаем их свойства симметрий. После этого мы используем свойства (5.95) чтобы упростить выражение для 6-*j* символа. С помощью тетраэдральных симметрий мы доказываем, что область определения 6-*j* символа может быть продолжена за упомянутые неравенства. Затем мы переписываем полученные ряды как функции  ${}_4\Phi_3$ . В результате, оба типа могут быть записаны как *q*-гипергеометрические ряды  ${}_4\Phi_3$  умноженные на некоторый фактор.

#### 5.3.1 *q*-гипергеометрические симметрии

*q*-символ Похгаммера определяется как  $(a, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k)$ .

**Определение 12.** *q*-гипергеометрический ряд определяется как:

$${}_{p+1}\Phi_p \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; q, z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, q)_n \dots (a_{p+1}, q)_n}{(b_1, q)_n \dots (b_p, q)_n (q, q)_n} z^n. \quad (5.19)$$

Что может быть переписано в более удобном для нас виде:

$${}_{p+1}\Phi_p \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; q, z \right) := {}_{p+1}\Phi_p \left( \begin{matrix} q^{a_1}, \dots, q^{a_p}, q^{a_{p+1}} \\ q^{b_1}, \dots, q^{b_p} \end{matrix}; q, z \right). \quad (5.20)$$

Это гораздо более удобно, потому что может быть переформулировано в терминах *q*-факториалов:

$$\begin{aligned} & {}_{p+1}\Phi_p \left( \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_p + 1, a_{p+1} + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_p + 1 \end{matrix}; q, z \right) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_1 + n]_q!}{[a_1]_q!} \dots \frac{[a_{p+1} + n]_q!}{[a_{p+1}]_q!} \frac{[b_1]_q!}{[b_1 + n]_q!} \dots \frac{[b_p]_q!}{[b_p + n]_q!} \frac{z^n}{[n]_q!}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Это выражение, очевидно, имеет предел  $\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q! = a!$ , при котором весь ряд превращается в обычную гипергеометрическую функцию.

Ряда  ${}_4\Phi_3$  имеет множество известных симметрий. Здесь мы рассматриваем только симметрию перестановок и преобразование Сирса.

**Определение 13.** Симметрия перестановок - очевидное свойство инвариантности функций  ${}_r\Phi_p$  относительно перестановок  $\omega \in \mathbb{S}_r$  и  $u \in \mathbb{S}_p$ :

$${}_r\Phi_p \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; q, z \right) = {}_r\Phi_p \left( \begin{matrix} a_{\omega(1)}, \dots, a_{\omega(r)} \\ b_{u(1)}, \dots, b_{u(p)} \end{matrix}; q, z \right). \quad (5.22)$$

**Определение 14.** Преобразование Сирса [86] - это связь между двумя функциями  ${}_4\Phi_3$ :

$$\begin{aligned} & {}_4\Phi_3 \left( \begin{matrix} x, y, z, n \\ u, v, w \end{matrix}; q, q \right) = \\ &= \frac{[v-z-n-1]_q! [u-z-n-1]_q! [v-1]_q! [u-1]_q!}{[v-z-1]_q! [v-n-1]_q! [u-z-1]_q! [u-n-1]_q!} {}_4\Phi_3 \left( \begin{matrix} w-x, w-y, z, n \\ 1-u+z+n, 1-v+z+n, w \end{matrix}; q, q \right), \end{aligned}$$

где  $x + y + z + n + 1 = u + v + w$ .

### 5.3.2 6-j символ как ряд ${}_5\Phi_4$

Обозначим сумму (5.15) как  $\left[ \begin{matrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{matrix} \right]_T^N = K' \cdot \sum_m I_m = K' \cdot I$ , где  $m = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - z$ . Тогда это можно легко переписать как:

$$\begin{aligned} I = & \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} (-1)^{\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2}-m} \left[ \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2} - m + N - 1 \right]_q! \cdot A_{T,m} \left( [m]_q! \left[ \frac{r_3+r_4-i}{2} - m \right]_q! \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{r_1+r_2-i}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{r_2+r_3-j}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{r_1+r_4-j}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_2-r_4}{2} + m \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_1-r_3}{2} + m \right]_q! \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$K' = \theta_N(r_1, r_2, i) \theta_N(r_3, r_4, i) \theta_N(r_1, r_4, j) \theta_N(r_2, r_3, j) [N-1]_q! [N-2]_q!, \quad (5.24)$$

$$A_{T,m} = \begin{cases} \frac{[k - m_{\max} + m]_q!}{[k - m_{\max} + N - 2 + m]_q!} & \text{для типа I,} \\ \frac{[k + m_{\min} - m]_q!}{[k + m_{\min} + N - 2 - m]_q!} & \text{для типа II.} \end{cases} \quad (5.25)$$

Явные выражения для  $m_{min}$  и  $m_{max}$  могут быть легко найдены из факториалов знаменателя, потому что слагаемое равно нулю тогда и только тогда, когда в знаменателе есть отрицательный факториал:

$$m_{max} = \frac{1}{2} \min \begin{pmatrix} r_1 + r_2 - i \\ r_3 + r_4 - i \\ r_1 + r_4 - j \\ r_2 + r_3 - j \end{pmatrix}, \quad m_{min} = \frac{1}{2} \max \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 + r_3 - i - j \\ r_2 + r_4 - i - j \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Как это может быть получено из правил слияния,  $k, m_{max}, m_{min}$  всегда целые, когда  $6-j$  символ существует. Более того,  $k$  имеет понятный смысл в терминах диаграмм Юнга – это минимальная ширина среди сопряженных частей диаграмм, соответствующих  $X_i$  и  $Y_j$ .

Можно заметить, что рассмотренное выражение соответствует определению  ${}_5\Phi_4$  (5.20), если  $z = q$ . Это позволяет нам сделать следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Оба типа I и II могут быть записаны как  $q$ -гипергеометрические ряды  ${}_5\Phi_4$  умноженные на простой фактор:*

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N = K'' \cdot {}_5\Phi_4 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix}; q, q \right), \quad (5.27)$$

$$2a_i = \begin{pmatrix} 2\{k - m_{max} + 1, -k - m_{min} - N + 2\}_T \\ -r_1 - r_2 + i \\ -r_3 - r_4 + i \\ -r_1 - r_4 + j \\ -r_2 - r_3 + j \end{pmatrix}, \quad 2b_i = \begin{pmatrix} -r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - 2(N - 1) \\ i + j - r_2 - r_4 + 2 \\ i + j - r_1 - r_3 + 2 \\ 2\{k - m_{max} + N - 1, -k - m_{min}\}_T \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$K'' = \frac{K' \cdot A_{T,0} \cdot \left[\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2} + N - 1\right]_q!}{\left[\frac{r_3 + r_4 - i}{2}\right]_q! \left[\frac{r_1 + r_2 - i}{2}\right]_q! \left[\frac{r_2 + r_3 - j}{2}\right]_q! \left[\frac{r_1 + r_4 - j}{2}\right]_q! \left[\frac{i + j - r_2 - r_4}{2}\right]_q! \left[\frac{i + j - r_1 - r_3}{2}\right]_q!}, \quad (5.29)$$

где  $\{e_1, e_2\}_T \equiv e_T$  равно  $e_1$  для типа I и  $e_2$  для типа II.

Это можно доказать прямой подстановкой  $q$ -символов Похгаммера.

### 5.3.3 6-j символ как ряд ${}_4\Phi_3$

Полученное выражение для 6-j символа не совсем удобно для нахождения его симметрий. Выражения для  $k$ ,  $m_{min}$  и  $m_{max}$  можно упростить следующим образом.

**Лемма 6.** Для всех 6-j символов типа I  $k - m_{max} = \frac{i+j-r_1-r_3}{2}$  если выполняются следующие свойства:

$$\begin{cases} r_2 \leq r_1 \leq r_3, \\ r_1 + r_3 = r_2 + r_4. \end{cases} \quad (5.30)$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $k - m_{max} = \frac{i+j-r_1-r_3}{2}$ . Можно проверить, что есть 2 случая, когда это так, поэтому их можно записать как объединение двух систем:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 - i \leq r_3 + r_4 - i, \\ r_1 + r_2 - i \leq r_2 + r_3 - j, \\ r_1 + r_2 - i \leq r_1 + r_4 - j, \\ j - r_3 \leq i - r_1; \end{cases} \quad \begin{cases} r_2 + r_3 - j \leq r_3 + r_4 - i, \\ r_2 + r_3 - j \leq r_1 + r_2 - i, \\ r_2 + r_3 - j \leq r_1 + r_4 - j, \\ i - r_1 \leq j - r_3. \end{cases} \quad (5.31)$$

Если условия (5.30) выполняются, то и первые три неравенства выполняются. Объединение этих двух систем может быть сведено к следующему выражению.

$$\begin{cases} j - i \leq r_4 - r_2, \\ j - i \geq r_4 - r_2. \end{cases} \quad (5.32)$$

Следовательно, любой 6-j символ типа I удовлетворяет условию  $k - m_{max} = \frac{i+j-r_1-r_3}{2}$ .  $\square$

**Лемма 7.** Для всех 6-j символов типа II  $k + m_{min} = \frac{r_1+r_2-i}{2}$  если выполняются условия:

$$\begin{cases} r_1 \leq r_2, \\ r_1 + r_2 = r_3 + r_4. \end{cases} \quad (5.33)$$

*Доказательство.* Доказательство для типа II аналогично доказательству для типа I.  $\square$

**Лемма 8.** *Условия на аргументы 6- $j$  символа (5.95) являются избыточными, то есть выражение (5.15) справедливо, даже если неравенства не выполняются.*

*Доказательство.* Мы можем получить все возможные 6- $j$ -символы типов I и II, используя тетраэдральную симметрию (5.136), которая оставляет тип инвариантным:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [\overline{r_2}] & X \\ [r_3] & [r_4] & Y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [r_3] & [\overline{r_2}] & \overline{Y} \\ [r_1] & [r_4] & \overline{X} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [r_2] & [\overline{r_1}] & \overline{X} \\ [r_4] & [r_3] & Y \end{array} \right\}. \quad (5.34)$$

Можно сразу заметить, что эти симметрии могут преобразовывать 6- $j$  символ из области  $r_2 \leq r_1 \leq r_3$  во все возможные представления. Проблема в том, что выражение для преобразованных 6- $j$  символов может отличаться от исходного выражения. Мы можем проверить это, подставив аргументы, преобразованные по тетраэдральной симметрии. Покажем, что в наших обозначениях она действует на  $r_1, r_2, r_3, r_4, i, j$  как перестановка. Для  $R_n$  симметрия, очевидно, действует как перестановка  $r_n$ . Также существуют сопряженные представления  $X$  и  $Y$ , мы можем рассматривать только диаграмму  $\left[ j, \frac{r_2 - r_3 + j}{2}^{N-2} \right]$  как пример. При сопряжении она преобразуется  $\left[ j, \frac{r_2 - r_3 + j}{2}^{N-2} \right] \rightarrow \left[ j, \frac{r_3 - r_2 + j}{2}^{N-2} \right]$ , но выражение зависит только от  $j$ , инвариантного относительно сопряжения.

Следовательно, тетраэдральная симметрия действует на выражение как перестановка аргументов. Можно проверить, что оно инвариантно относительно записанного преобразования тетраэдральной симметрии. То же верно и для типа II, но нам нужно только одно соотношение (неравенство  $r_1 \leq r_2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [r_2] & X \\ [\overline{r_3}] & [r_4] & Y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [r_3] & [r_4] & X \\ [\overline{r_1}] & [r_2] & Y \end{array} \right\}. \quad (5.35)$$

Симметрия нетривиально действует только на  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , и мы уже показали, почему это перестановка. Легко видеть, что выражение инвариантно относительно такого преобразования.

Следовательно, выражение не меняется, когда мы пишем 6- $j$  символ без дополнительных ограничивающих неравенств (5.95). Тогда мы можем избавиться от этих условий, т.к. даже если они не выполняются, выражение верно.  $\square$

В лемме 6 мы доказали, что для аргументов, удовлетворяющих неравенствам (5.95), существует только одна комбинация  $k - m_{max}$  для 6- $j$  символов

типа I. Это приводит к точному значению  $A_{T,m}$ , которое позволяет упростить весь ряд. После этого мы можем применить тетраэдральные симметрии, чтобы доказать, что утверждение верно для всех  $6-j$  символов типа I. Ту же процедуру можно проделать и для типа II, что позволяет нам упростить оба выражения и записать их следующим образом.

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N &= K' \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} \frac{(-1)^{\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2}-m} \left[ \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2} + N - 1 - m \right]_q!}{\left[ \frac{r_3+r_4-i}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{r_2+r_3-j}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{r_1+r_4-j}{2} - m \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_2-r_4}{2} + m \right]_q!} \times \\ &\times \frac{1}{\left[ m \right]_q! \left[ \frac{r_1+r_2-i}{2} + (N-2)\delta_{T,2} - m \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_1-r_3}{2} + (N-2)\delta_{T,1} + m \right]_q!}. \end{aligned}} \quad (5.36)$$

Мы можем выразить все факториалы как символы  $q$ -Похгаммера. Подстановка отличается для факториалов с  $+m$  и  $-m$ :

$$\begin{aligned} [m_0 + m]_q! &= [m_0]_q! (q^{m_0+1}, q)_m \cdot \frac{q^{-\frac{m}{4}(2m_0+m-1)}}{(1-q)^m}, \\ [m_0 - m]_q! &= \frac{(-1)^m [m_0]_q!}{(q^{-m_0}, q)_m} \cdot \frac{(1-q)^m}{q^{\frac{m}{4}(2m_0+m-1)}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Подставляя все это в основное выражение, можно проверить, что среди зависящих от  $m$  членов остаются только  $q$ -символы Похгаммера. Это позволяет нам записать ряд как гипергеометрическую функцию:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T \sim {}_4\Phi_3 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; q, q \right). \quad (5.38)$$

Аргументы функции  ${}_4\Phi_3$  можно легко получить используя (5.37). Отметим, что существует следующее соотношение на аргументы:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 1 = b_1 + b_2 + b_3. \quad (5.39)$$

И факторизуемая часть выражения:

$$K_T = \frac{\theta_N(r_1, r_2, i) \theta_N(r_3, r_4, i) \theta_N(r_1, r_4, j) \theta_N(r_2, r_3, j) [N-1]_q! [N-2]_q! \left[ \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{2} + N - 1 \right]_q!}{\left[ \frac{r_3+r_4-i}{2} \right]_q! \left[ \frac{r_1+r_2-i}{2} + (N-2)\delta_{T,2} \right]_q! \left[ \frac{r_2+r_3-j}{2} \right]_q! \left[ \frac{r_1+r_4-j}{2} \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_2-r_4}{2} \right]_q! \left[ \frac{i+j-r_1-r_3}{2} + (N-2)\delta_{T,1} \right]_q!}. \quad (5.40)$$

Собирая все вметсе, мы получаем следующее утверждение.

**Предложение 3.** *Рассмотренное выражение для  $6-j$  символа может быть выражено как функция  ${}_4\Phi_3$  для обоих типов. Фактор  $K_T$  такой же, как в (5.40).*

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{array} \right]_T^N &= K_T \cdot {}_4\Phi_3 \left( \begin{array}{c} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{array}; q, q \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$2a_i = \begin{pmatrix} i - r_1 - r_2 - 2(N-2)\delta_{T,2} \\ -r_3 - r_4 + i \\ -r_1 - r_4 + j \\ -r_2 - r_3 + j \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} -r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - 2(N-1) \\ i + j - r_2 - r_4 + 2 \\ i + j - r_1 - r_3 + 2 + 2(N-2)\delta_{T,1} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Это наиболее подходящая запись 6- $j$  символа для наших целей. Как можно видеть, мы свели ряд  ${}_5\Phi_4$  к  ${}_4\Phi_3$ . Это неочевидный результат. Чтобы продолжить эту редукцию, мы использовали тетраэдральную симметрию вместе с особыми свойствами рассмотренных двух типов 6- $j$  символов. В связи с тем, что 6- $j$  символы  $U_q(sl_2)$  выражаются через  ${}_4\Phi_3$ , мы можем использовать те же методы для получения новых результатов, а также, легко получить предел  $N = 2$ . Этот результат наталкивает нас на мысль о сильной связи между 6- $j$  символами и  $q$ -гипергеометрическими рядами. Например, интересно, все ли 6- $j$  символы без кратностей могут быть выражены как ряды  ${}_4\Phi_3$ .

Интересно проанализировать количество независимых параметров в полученном выражении. Пренебрегая  $q$ , с обеих сторон имеем 7 параметров:  $\{r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, N\}$  и  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$ . Они не являются независимыми: как было упомянуто, с одной стороны, каждый тип имеет ограничения для  $N > 2$ , которые фиксируют один параметр. С другой стороны, полученный ряд  ${}_4\Phi_3$  удовлетворяет условию баланса  $\sum_i a_i + 1 = \sum_i b_i$ . Таким образом, при  $N > 2$  есть 6 параметров с обеих сторон. Для  $N = 2$  правила слияния не фиксируют  $r_n$ , поэтому есть 6 параметров с обеих сторон. Естественно спросить, существует ли связь между правилами слияния и условием баланса. Кажется, что эти равенства имеют разный смысл, потому что условие на  $\{a_i, b_i\}$  выполняется, даже если  $r_1 + r_3 \neq r_2 + r_4$ . С такой точки зрения возникает другой вопрос: какой класс 6- $j$  символов можно описать в терминах рядов  ${}_4\Phi_3$  с таким равенством? Этот вопрос не рассматривается в данном исследовании, но важен и интересен для изучения.

### 5.4 Связь с 6-*j* символами $U_q(sl_2)$

В этом разделе мы исследуем связь между 6-*j* символами без кратностей в случаях  $U_q(sl_N)$  и  $U_q(sl_2)$ . Как мы видели, в основе обоих выражений лежат гипергеометрические ряды  ${}_4\Phi_3$ . Мы уже упоминали о количестве независимых параметров в ряде, но теперь разберем это более подробно. После этого мы увидим интересную связь между обычным 6-*j* символом  $U_q(sl_2)$  и рассматриваемыми 6-*j* символами.

Выпишем аргументы  ${}_4\Phi_3$  как векторное пространство с базисом  $(r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, N)$ . Мы заносим все дополнительные ограничения в  $\vec{C}$ , т.к. они не играют роли в дальнейших рассуждениях:

$$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 2(N - 1) \\ r_1 + r_2 - i + 2(N - 2)\delta_{T,2} \\ r_3 + r_4 - i \\ r_1 + r_4 - j \\ r_2 + r_3 - j \\ -r_2 - r_4 + i + j + 2 \\ i + j - r_1 - r_3 + 2(N - 1)\delta_{T,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\delta_{T,2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\delta_{T,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ i \\ j \\ N \end{pmatrix} + \vec{C}. \quad (5.43)$$

Ранг этой матрицы равен 6, поэтому ядро имеет размерность 1. Это ядро описывается нуль-вектором  $\vec{v}$ . Отметим, что (5.39) это совершенно другое условие, которое не зависит от значений параметра. Нуль-вектор может быть записан следующим образом

$$\vec{v} = \begin{cases} (0, 1, 0, 1, 1, 1, -1), & \text{Тип I,} \\ (1, 1, 0, 0, 0, 1, -1), & \text{Тип II,} \end{cases} \quad (5.44)$$

при соответствующем сдвиге параметров

$$\alpha\vec{v} = \begin{cases} \alpha\vec{v} = \alpha(r_2 + r_4 + i + j - N), & \text{Тип I,} \\ \alpha\vec{v} = \alpha(r_1 + r_2 + j - N), & \text{Тип II.} \end{cases} \quad (5.45)$$

Эта свобода позволяет сдвигать значение аргументов без изменения фактического значения гипергеометрического ряда, поэтому его можно рассматривать как симметрию 6-*j* символа, хотя для гипергеометрического ряда это

равенство тавтологическое. Если изучить преобразование для 6-j символа типа I, можно увидеть, что правила слияния находятся в противоречии с ним. В самом деле, нетривиальное преобразование изменяет  $r_2 + r_4$ , но оставляет  $r_1 + r_3$  неизменным, поэтому (5.10) запрещает такое преобразование для  $N > 2$ , как для типа I, так и для типа II. Однако при  $N = 2$  правила слияния исчезают, и мы можем без проблем применять их. Итак, мы берем 6-j символ  $U_q(sl_N)$  и выполняем преобразование (5.44), чтобы получить выражение для 6-j символа  $U_q(sl_2)$ :

$$\begin{aligned} {}_4\Phi_3(r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, \mathbf{N})_1 &= (-1)^N {}_4\Phi_3(r_1, r_2 + N - 2, r_3, r_4 + N - 2, i + N - 2, j + N - 2, \mathbf{2}), \\ {}_4\Phi_3(r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, \mathbf{N})_2 &= (-1)^N {}_4\Phi_3(r_1 + N - 2, r_2 + N - 2, r_3, r_4, i, j + N - 2, \mathbf{2}). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Единственная часть выражения, которая отличается - это множитель  $K_T$ . Он частично повторяет аргументы гипергеометрической функции, поэтому остается лишь несколько членов в соотношении между 6-j символами без кратностей  $U_q(sl_N)$  и 6-j символами  $U_q(sl_2)$ . Для краткости мы запишем гипергеометрическую функцию из (5.41) как  ${}_4\Phi_3(r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, N)_T$ . Фактор  $K'$  меняется после преобразований, запишем его явно:

$$K'(N) = \theta_N(r_1, r_2, i) \theta_N(r_3, r_4, i) \theta_N(r_1, r_4, j) \theta_N(r_2, r_3, j) [N-1]_q! [N-2]_q! , \quad (5.47)$$

$$\Theta_T(N) := \frac{1}{[N-1]_q! [N-2]_q!} \frac{K'(N)}{K'(2)}. \quad (5.48)$$

$$\Theta_1(N) = \left( \prod_{m=1}^{N-2} \left[ \frac{i-r_1+r_2}{2} + m \right]_q \left[ \frac{j+r_2-r_3}{2} + m \right]_q \left[ \frac{j-r_1+r_4}{2} + m \right]_q \left[ \frac{i-r_3+r_4}{2} + m \right]_q \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.49)$$

$$\Theta_2(N) = \left( \prod_{m=1}^{N-2} \left[ \frac{r_1+r_2-i}{2} + m \right]_q \left[ \frac{j+r_2-r_3}{2} + m \right]_q \left[ \frac{j+r_1-r_4}{2} + m \right]_q \left[ \frac{i+r_3+r_4}{2} + 1 + m \right]_q \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.50)$$

Итоговое соотношение между 6- $j$  символами  $U_q(sl_N)$  без кратностей и 6- $j$  символами  $U_q(sl_2)$  следующее.

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N &= \begin{Bmatrix} r_1 & r_2+N-2 & i+N-2 \\ r_3 & r_4+N-2 & j+N-2 \end{Bmatrix} (-)^N [N-1]_q! [N-2]_q! \Theta_1(N), \\ \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_2^N &= \begin{Bmatrix} r_1+N-2 & r_2+N-2 & i \\ & r_3 & r_4 & j+N-2 \end{Bmatrix} (-)^N [N-1]_q! [N-2]_q! \Theta_2(N). \end{aligned}}$$

(5.51)

Легко проверить, что остальные правила слияния для  $N = 2$  (неравенство треугольника и т. д.) всегда выполняются, а полученный 6- $j$  символ нетривиален. С другой стороны, если попытаться преобразовать 6- $j$  символ  $U_q(sl_2)$  в 6- $j$  символ при  $N > 2$ , возникнет ряд проблем, а в общем случае это невозможно. Например, если  $r_1 + r_3 - r_2 - r_4 > 0$ , то нет соответствующего 6- $j$  символа при  $N > 2$ .

Этот результат интересен не только потому, что он выявляет скрытую связь между двумя классами 6- $j$  символов, но и потому, что его можно применить для обобщения многих известных свойств  $U_q(sl_2)$  на произвольные  $N$ . В следующем разделе мы выводим формулу асимптотики для случая без кратностей. Приведем пример такого обобщения.

## 5.5 Асимптотики 6- $j$ символа

Формула асимптотики 6- $j$  символов для  $N = 2, q = 1$  была предположена Дж.Понзано и Т. Редже [254], а затем была доказана Дж. Робертсом [279]. Она сформулирована в терминах тетраэдра, который складывается из ребер длины  $J_n := r_n + 1/2, J_5 := i + 1/2, J_6 := j + 1/2$  и приближает предел  $\lambda \rightarrow \infty$  для

представлений  $\{\lambda r_n, \lambda i, \lambda j\}$ :

$$\begin{Bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{Bmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{12\pi|V(J_n)|}} \cos \left( \sum_{n=1}^6 J_n \cdot \Omega(J_n) + \frac{\pi}{4} \right), \quad (5.52)$$

где  $V$  - объем тетраэдра,  $\Omega_i$  - внешний двугранный угол ребра  $J_i$ .

Рассмотрим 6- $j$  символы при  $q = 1$ . Используя (5.51), мы можем найти асимптотику для 6- $j$  символа  $U(sl_N)$  как асимптотику для соответствующего 6- $j$  символа  $U(sl_2)$ . Он очень похож на (5.52), но с искаженными выражениями для граней, объема и углов. Тетраэдр теперь состоит из ребер  $\tilde{J}_n$ , которые можно найти из  $U(sl_N)$   $J_n$ :

$$\begin{cases} \tilde{J}_m = J_m, \\ \tilde{J}_n = J_n + N - 2, \end{cases} \quad (5.53)$$

где  $m$  и  $n$  определены различно для двух типов:

$$\begin{aligned} m \in \{1, 3\}, \quad n \in \{2, 4, 5, 6\} & \quad \text{Тип I,} \\ m \in \{3, 4, 5\}, \quad n \in \{1, 2, 6\} & \quad \text{Тип II.} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Соответствующие объем и углы обозначаются как  $\tilde{V}$  и  $\tilde{\Omega}_n$ .

Итоговая асимптотика для 6- $j$  символа, соответствующего произвольным симметрическим представлениям  $U_q(sl_N)$ , таким образом, может быть записана в терминах ассоциированного тетраэдра, но теперь тетраэдр зависит от  $N$ :

$$\boxed{\frac{1}{\Theta_T(N)} \begin{Bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{Bmatrix}_T^N \sim \frac{(-1)^N \cdot (N-1)! \cdot (N-2)!}{\sqrt{12\pi \cdot |V(\tilde{J}_n)|}} \cos \left( \sum_{n=1}^6 \tilde{J}_n \cdot \Omega(\tilde{J}_n) + \frac{\pi}{4} \right).} \quad (5.55)$$

Хотя множитель довольно длинный для общего случая, он становится намного проще, когда все  $r_n$  совпадают, например, для типа I это выглядит так:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{i}{2} + N - 2\right)! \left(\frac{j}{2} + N - 2\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j}{2}\right)!} \begin{Bmatrix} r & r & i \\ r & r & j \end{Bmatrix}_{T=1}^N \sim \\ & \sim \frac{(-1)^N (N-1)! (N-2)!}{\sqrt{12\pi |V(\tilde{J}_n)|}} \cos \left( \sum_{i=1}^6 \tilde{J}_n \cdot \Omega(\tilde{J}_n) + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Отметим, что обобщенная формула, когда все параметры 6- $j$  символа совпадают, не соответствует правильному тетраэдру при  $N > 2$ . В связи с этим мы не можем дальше упрощать соотношение. Интересно, что получившийся тетраэдр деформируется для каждого типа по-разному. В частности, тип II соответствует трехгранной пирамиде, а тип I - наклоненному тетраэдру, который состоит из 4 равных равнобедренных треугольников.

## 5.6 Вывод симметрий

### 5.6.1 Гипергеометрическая группа симметрий

В этом подразделе мы не пишем никаких симметрий явно. Здесь мы описываем структуру полученных симметрий. Утверждения в этом подразделе даны без аналитического доказательства, но проверены численно.

Мы используем как симметрию перестановок (5.22), так и преобразование Сирса (5.23), чтобы получить все возможные преобразования 6- $j$  символов. Произвольная композиция преобразований и перестановок Сирса может быть записана как:

$${}_4\Phi_3 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; q, q \right) = \tilde{C} \cdot {}_4\Phi_3 \left( \begin{matrix} \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4 \\ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3 \end{matrix}; q, q \right), \quad (5.57)$$

где переменные с  $\sim$  обозначают результирующие аргументы. Есть множитель  $C$ , который появляется после преобразований Сирса, но пока он нас не интересует. Полученная симметрия имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N = C \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 & \tilde{i} \\ \tilde{r}_3 & \tilde{r}_4 & \tilde{j} \end{bmatrix}_T^M, \quad (5.58)$$

где  $\tilde{r}_n, \tilde{i}, \tilde{j}$  некоторые линейные комбинации  $r_n, i, j$  полученные упомянутыми преобразованиями. Параметры  $N, M$  обозначают ранги соответствующих алгебр.

Для того, чтобы найти симметрии, нам нужно решить линейную систему уравнений на аргументы  $\tilde{r}_n, \tilde{i}, \tilde{j}, M$ . Вначале мы рассматриваем  $M = N$ , чтобы

получить единственное решение. Ранг системы равен 6, т.к. у гипергеометрической функции 7 аргументов с одним дополнительным ограничением. Отметим, что мы не ограничиваем их правилами слияния, когда решаем систему. Это сделано потому, что преобразование Сирса не сохраняет правила слияния, но некоторые из его комбинаций с перестановками сохраняют. Поэтому нам нужно получить все симметрии, а затем восстановить правила слияния, используя (5.46). В этом подразделе мы не рассматриваем соотношение (5.46) как симметрию, т.к. оно используется для того, чтобы удовлетворить правилам слияния, фиксируя параметр  $M$ .

**Предложение 4.** *Полный набор симметрий  $G$ , который содержит все композиции перестановок и преобразований Сирса, образует группу и содержит всего 23040 элементов [303].*

Для случая  $N = M = 2$  эта группа была изучена в [63], где была названа 22.5К группой. Утверждается, что на самом деле это группа Коксетера  $D_6$ , которая возникает в гиперболической геометрии как группа гиперболических тетраэдральных преобразований. Объем гиперболического тетраэдра, как известно, связан с квантовыми 6- $j$  символами  $U_q(sl_2)$  в правильном пределе [221].

Наш результат был получен с помощью системы компьютерной алгебры. Перестановки и преобразования Сирса были запрограммированы явно и применены несколько раз. Установив все ограничения на перестановки и преобразование Сирса, программа получила 23040 элементов. Было проверено, что они замкнуты относительно композиции. Каждая симметрия невырождена из-за невырожденности исходных уравнений, следовательно, все элементы обратимы. В результате 23040 симметрий, включая единичную, образуют группу.

Большинство этих симметрий не могут быть применены к 6- $j$  символам, т.к. они часто не сохраняют положительность  $r_{n,i,j}$ . Также неясна структура ее подгрупп, что усложняет анализ. Поэтому нам интересна только та подгруппа, которая обобщается с  $N = M = 2$  на произвольные  $N$  и  $M$ , назовем ее  $S \subset G$ . В  $S$  144 элемента и она аналогична группе перестановок и преобразований Редже  $U_q(sl_2)$ , которую мы обозначаем как  $H = S|_{N=M=2}$ . Более того, эти группы находятся в биективном соответствии: каждая симметрия для  $N \neq 2 \neq M$  может быть преобразована в  $N = 2 = M$  симметрию и наоборот. Отметим, что найденные симметрии из  $S$  хорошо определены для гипергеометрических рядов, но для 6- $j$  символов они требуют положительности  $r_{n,i,j}, M - 2$ .

Другие симметрии из  $G$  выходят за рамки нашего обсуждения. С переформулировкой симметрий из  $G$  в терминах 6- $j$  символов есть некоторые трудности. С одной стороны, число элементов группы слишком велико для анализа вручную, с другой, структура подгрупп до сих пор неясна. Также существует большое количество симметрий, которые не сохраняют положительность параметров представлений, поэтому большое количество симметрий не может быть применено к 6- $j$  символам. Интересно, что всю группу можно получить как комбинацию симметрий из  $S$  и следующей:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ -r_3 - 1 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N. \quad (5.59)$$

После преобразования (5.46) для нахождения  $M$  естественно рассмотреть два класса симметрий: один для  $N = M$ , а другой - для  $N \neq M$ .

**Определение 15.** Если для симметрии требуется  $N = M$ , мы называем ее внутренней симметрией, иначе - внешней симметрией. Набор внутренних и внешних симметрий обозначается символами  $I$  и  $E$  соответственно.

Приведем к этому определению примеры как внутренней, так и внешней симметрии.

Внутренняя симметрия:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} r_2 & r_1 & i \\ r_4 & r_3 & j \end{bmatrix}_2^N. \quad (5.60)$$

Правила слияния (5.10) формально требуют двух равенств для левой и правой части. Однако в этом случае они линейно зависимы, поэтому равенство для одной стороны дает равенство для другой стороны. Более того, если  $N \neq M \neq 2$ , условия противоречат друг другу.

Внешняя симметрия:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N = C \begin{bmatrix} r_1 & i + N - M & r_2 + N - M \\ r_3 & j + N - M & r_4 + N - M \end{bmatrix}_1^M, \quad (5.61)$$

где  $C$  некоторый фактор. Здесь нам необходимо ограничить представления двумя равенствами:  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$  и  $r_1 + r_3 = i + j + 2(N - M)$ , поэтому мы

должны зафиксировать  $2M = 2N + i + j - r_1 - r_3$ :

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N = C \begin{bmatrix} r_1 & \frac{r_2 + r_4 + i - j}{2} & \frac{3r_2 + r_4 - i - j}{2} \\ r_3 & \frac{r_2 + r_4 - i + j}{2} & \frac{r_2 + 3r_4 - i - j}{2} \end{bmatrix}_1^{N + \frac{i+j-r_2-r_4}{2}}. \quad (5.62)$$

Параметры преобразованного 6- $j$  символа в правой части должны быть неотрицательными. Параметры  $\tilde{r}_n, \tilde{i}, \tilde{j}$  неотрицательны для любой внешней симметрии, как это показано в Приложении. С другой стороны,  $M$  все еще должно быть больше либо равно 2, поэтому не все 6- $j$  символы могут быть преобразованы этой симметрией. Каждая внешняя симметрия индуцирует подмножество 6- $j$  символов, которые удовлетворяют такому соотношению.

**Предложение 5.** Для любого нетривиального 6- $j$  символа  $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_T^N$  внешняя симметрия любого типа преобразует его в 6- $j$  символ с неотрицательными  $\tilde{r}_n, \tilde{i}, \tilde{j}$ .

Доказательство этого утверждения использует явные соотношения для симметрий 6- $j$  символов, и оно приведено в Приложении.

**Предложение 6.** Внутренние симметрии 6- $j$  символов образуют группу  $I$  со следующей структурой. Она изоморфна либо  $\mathbb{S}_4$  для типа I либо  $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$  для типа II.

Если мы рассматриваем только внутренние симметрии, мы получаем подгруппу  $I \subset S$ . Непосредственно можно проверить, что  $|I| = 24$  для типа I,  $|I| = 12$  для типа II и симметрии изоморфны упомянутым группам.

$$\begin{aligned} G &\supset S \supset^{N=M} I, & E &:= S/I, \\ \text{Type I:} & S \cong \mathbb{S}_4 \times \mathbb{S}_3, & I &\cong \mathbb{S}_4, \\ \text{Type II:} & S \cong \mathbb{S}_4 \times \mathbb{S}_3, & I &\cong \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2, \\ & |G| = 23040, & |S| &= 144 \end{aligned}$$

Явные соотношения написаны в следующих подразделах. Внутренние симметрии из  $I$  могут быть применены к любому 6- $j$  символу соответствующего типа. Другими словами, для каждого  $r_n, i, j$  с выполненными правилами слияния можно написать все симметрии из  $I$ .

Внешние симметрии связывают 6- $j$  символы для разных алгебр. Здесь следует отметить два важных момента. Во-первых, 6- $j$  символы и  ${}_4\Phi_3$  отличаются множителем, который не всегда инвариантен относительно внешних симметрий, поэтому нам нужно добавить нормализующий фактор к этой симметрии. Во-вторых, поскольку существует два групповых ранга  $N$  и  $M$ , оба они должны быть больше или равны 2, чтобы симметрия была применимой. В результате она может применяться только к части всех 6- $j$  символов типа I и типа II.

Отметим, что для  $U_q(sl_2)$  нет ограничений из правил слияния, поэтому  $S$  совпадает с  $I$  и мы имеем все 144 симметрии [147].

**Замечание 1.** Как внутренняя, так и внешняя симметрии могут быть получены с помощью соотношения (5.51) между 6- $j$  символами  $U_q(sl_2)$  и СБК.

Данный метод также можно использовать для проверки полученных равенств. Если выразить множество симметрий СБК как равенства 6- $j$  символов  $U_q(sl_2)$ , множители могут быть опущены, и равенства образуют множество симметрий  $U_q(sl_2)$ .

### 5.6.2 Внутренние симметрии типа I

В этом подразделе мы выпишем внутренние симметрии типа I. Эти симметрии очень похожи на известные и могут рассматриваться как естественное обобщение симметрий для  $U_q(sl_2)$ , хотя с точки зрения диаграмм Юнга это неочевидно. В сокращенных обозначениях легко увидеть соответствие между симметриями  $U_q(sl_2)$  и  $U_q(sl_N)$ . Хотя внутренние симметрии типа I по определению требуют выполнения равенства  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ , мы не пишем это явно, потому что в каждом равенстве либо существуют оба 6- $j$  символа, либо обоих не существует. Та же идея используется для внутренних симметрий II типа. Чтобы записать симметрии более компактно, мы используем следующие переменные:

$$\rho = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2} \quad \rho' = \frac{r_2 + i + r_4 + j}{2} = \frac{r_1 + i + r_3 + j}{2} = \rho''. \quad (5.63)$$

Все нижеприведенные 6- $j$  символы равны и образуют группу  $I$ . Столбцы таблицы равенств соответствуют перестановкам строк, строки - аналогу сим-

метрий Редже:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N &= \begin{bmatrix} r_3 & r_4 & i \\ r_1 & r_2 & j \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & j \\ r_3 & r_2 & i \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_3 & r_2 & j \\ r_1 & r_4 & i \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho - r_3 & i \\ \rho - r_2 & \rho - r_1 & j \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho - r_2 & \rho - r_1 & i \\ \rho - r_4 & \rho - r_3 & j \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho - r_1 & j \\ \rho - r_2 & \rho - r_3 & i \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho - r_2 & \rho - r_3 & j \\ \rho - r_4 & \rho - r_1 & i \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_1 & \rho' - j & \rho' - r_4 \\ r_3 & \rho' - i & \rho' - r_2 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_3 & \rho' - i & \rho' - r_4 \\ r_1 & \rho' - j & \rho' - r_2 \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} r_1 & \rho' - i & \rho' - r_2 \\ r_3 & \rho' - j & \rho' - r_4 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_3 & \rho' - j & \rho' - r_2 \\ r_1 & \rho' - i & \rho' - r_4 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho'' - j & r_2 & \rho'' - r_3 \\ \rho'' - i & r_4 & \rho'' - r_1 \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho'' - i & r_4 & \rho'' - r_3 \\ \rho'' - j & r_2 & \rho'' - r_1 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho'' - j & r_4 & \rho'' - r_1 \\ \rho'' - i & r_2 & \rho'' - r_3 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho'' - i & r_2 & \rho'' - r_1 \\ \rho'' - j & r_4 & \rho'' - r_3 \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho'' - j & \rho - r_3 & \rho' - r_4 \\ \rho'' - i & \rho - r_1 & \rho' - r_2 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho'' - i & \rho - r_1 & \rho' - r_4 \\ \rho'' - j & \rho - r_3 & \rho' - r_2 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho'' - j & \rho - r_1 & \rho' - r_2 \\ \rho'' - i & \rho - r_3 & \rho' - r_4 \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho'' - i & \rho - r_3 & \rho' - r_2 \\ \rho'' - j & \rho - r_1 & \rho' - r_4 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho' - j & \rho'' - r_3 \\ \rho - r_2 & \rho' - i & \rho'' - r_1 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho - r_2 & \rho' - i & \rho'' - r_3 \\ \rho - r_4 & \rho' - j & \rho'' - r_1 \end{bmatrix}_1^N \\
&= \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho' - i & \rho'' - r_1 \\ \rho - r_2 & \rho' - j & \rho'' - r_3 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho - r_2 & \rho' - j & \rho'' - r_1 \\ \rho - r_4 & \rho' - i & \rho'' - r_3 \end{bmatrix}_1^N .
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Эти 24 симметрии образуют представление группы  $I$  упомянутой выше. В ней есть 2 выделенные подгруппы: перестановки строк и аналог преобразования Редже. Изоморфизм  $I \cong \mathbb{S}_4$  устроен следующим образом. Перестановки из первой строки соответствуют  $\{(), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ . Симметрии первого столбца соответствуют  $\{(), (12), (23), (13), (123), (132)\}$ . Все остальные можно

получить из таблицы:

( )	(12)(34)	(14)(23)	(13)(24)
(12)	(34)	(1324)	(1423)
(23)	(1243)	(14)	(1342)
(13)	(1432)	(1234)	(24)
(123)	(243)	(134)	(142)
(132)	(143)	(124)	(234)

Мы можем выписать обобщение преобразований Редже (5.115):

$$\boxed{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} r_1 & \rho' - j & \rho' - r_4 \\ r_3 & \rho' - i & \rho' - r_2 \end{bmatrix}_1^N = \begin{bmatrix} \rho' - j & r_2 & \rho' - r_3 \\ \rho' - i & r_4 & \rho' - r_1 \end{bmatrix}_1^N.} \quad (5.66)$$

Приведем пару примеров этих симметрий:

– Аналог симметрий Редже, тип I (первый столбец инвариантен,  $N \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} [8] \quad \overline{[4]} \quad [12, 4^{N-2}] \\ [10] \quad [14] \quad [6] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [8] \quad \overline{[6]} \quad [14, 6^{N-2}] \\ [10] \quad [12] \quad [4] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [10] \quad \overline{[8]} \quad [18, 8^{N-2}] \\ [12] \quad [14] \quad [6, 5^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [10] \quad \overline{[5]} \quad [15, 5^{N-2}] \\ [12] \quad [17] \quad [9, 8^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [12] \quad \overline{[6]} \quad [16, 5^{N-2}] \\ [14] \quad [20] \quad [8] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [12] \quad \overline{[9]} \quad [19, 8^{N-2}] \\ [14] \quad [17] \quad [5, 5^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [12] \quad \overline{[8]} \quad [10, 3^{N-2}] \\ [14] \quad [18] \quad [6] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [12] \quad \overline{[11]} \quad [13, 6^{N-2}] \\ [14] \quad [15] \quad [3] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

– Аналог симметрий Редже, тип I (второй столбец инвариантен,  $N \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad \overline{[6]} \quad [2, 2^{N-2}] \\ [3] \quad [1] \quad [5, 4^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [2] \quad \overline{[6]} \quad [4, 4^{N-2}] \\ [5] \quad [1] \quad [3, 2^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [6] \quad \overline{[5]} \quad [7, 3^{N-2}] \\ [3] \quad [4] \quad [2, 2^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [7] \quad \overline{[5]} \quad [6, 2^{N-2}] \\ [2] \quad [4] \quad [3, 3^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad \overline{[6]} \quad [7, 4^{N-2}] \\ [4] \quad [3] \quad [8, 5^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad \overline{[6]} \quad [8, 5^{N-2}] \\ [5] \quad [3] \quad [7, 4^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad \overline{[6]} \quad [2, 2^{N-2}] \\ [5] \quad [3] \quad [7, 4^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [2] \quad \overline{[6]} \quad [4, 4^{N-2}] \\ [7] \quad [3] \quad [5, 2^{N-2}] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

### 5.6.3 Внутренние симметрии типа II

Аналогично можно рассматривать тип II, всего 12 симметрий. Для краткости мы используем следующие переменные:

$$\rho = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2} \quad \rho' = \frac{r_2 + i + r_4 + j}{2} \quad \rho'' = \frac{r_1 + i + r_3 + j}{2}. \quad (5.67)$$

Все 6-j символы ниже равны. Столбцы таблицы соответствуют перестановке столбцов, строки соответствуют симметриям Редже.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} r_2 & r_1 & i \\ r_4 & r_3 & j \end{bmatrix}_2^N \\ & = \begin{bmatrix} \rho - r_3 & \rho - r_4 & i \\ \rho - r_1 & \rho - r_2 & j \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho - r_3 & i \\ \rho - r_2 & \rho - r_1 & j \end{bmatrix}_2^N \\ & = \begin{bmatrix} r_1 & \rho' - r_4 & \rho' - j \\ r_3 & \rho' - r_2 & \rho' - i \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} \rho' - r_4 & r_1 & \rho' - j \\ \rho' - r_2 & r_3 & \rho' - i \end{bmatrix}_2^N \\ & = \begin{bmatrix} \rho'' - r_3 & r_2 & \rho'' - j \\ \rho'' - r_1 & r_4 & \rho'' - i \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} r_2 & \rho'' - r_3 & \rho'' - j \\ r_4 & \rho'' - r_1 & \rho'' - i \end{bmatrix}_2^N \\ & = \begin{bmatrix} \rho - r_3 & \rho' - r_4 & \rho'' - j \\ \rho - r_1 & \rho' - r_2 & \rho'' - i \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} \rho' - r_4 & \rho - r_3 & \rho'' - j \\ \rho' - r_2 & \rho - r_1 & \rho'' - i \end{bmatrix}_2^N \\ & = \begin{bmatrix} \rho'' - r_3 & \rho - r_4 & \rho' - j \\ \rho'' - r_1 & \rho - r_2 & \rho' - i \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho' - r_3 & \rho' - j \\ \rho - r_2 & \rho' - r_1 & \rho' - i \end{bmatrix}_2^N. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Структура изоморфизма  $I \cong \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$  следующая:

$()()$	$(12)()$
$(12)(ab)$	$()(ab)$
$(13)(ab)$	$(132)(ab)$
$(23)(ab)$	$(123)(ab)$
$(123)()$	$(23)()$
$(132)()$	$(13)()$

Преобразование Редже - единственное новое соотношение здесь:

$$\boxed{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} r_1 & \rho' - r_4 & \rho' - j \\ r_3 & \rho' - r_2 & \rho' - i \end{bmatrix}_2^N = \begin{bmatrix} \rho'' - r_3 & r_2 & \rho'' - j \\ \rho'' - r_1 & r_4 & \rho'' - i \end{bmatrix}_2^N} \quad (5.69)$$

Приведем пару примеров этих симметрий.

– Аналог симметрий Редже, тип II (первый столбец инвариантен,  $N \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [6] \quad [10,1] \\ \overline{[3]} \quad [8] \quad [7,5^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [7] \quad [10,2] \\ \overline{[3]} \quad [9] \quad [6,5^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [6] \quad [11] \\ \overline{[1]} \quad [10] \quad [7,6^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [7] \quad [11,1] \\ \overline{[1]} \quad [11] \quad [6,6^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad [6] \quad [10] \\ \overline{[1]} \quad [9] \quad [7,6^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad [7] \quad [10,1] \\ \overline{[1]} \quad [10] \quad [6,6^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [3] \quad [6] \quad [8,1] \\ \overline{[4]} \quad [5] \quad [8,5^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [3] \quad [8] \quad [8,3] \\ \overline{[4]} \quad [7] \quad [6,5^{N-2}] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

– Аналог симметрий Редже, тип II (второй столбец инвариантен,  $N \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad [2] \quad [6] \\ \overline{[1]} \quad [5] \quad [3,2^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [6] \quad [2] \quad [6,2] \\ \overline{[3]} \quad [5] \quad [1] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad [3] \quad [6,1] \\ \overline{[1]} \quad [6] \quad [2,2^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [3] \quad [6,2] \\ \overline{[2]} \quad [6] \quad [1,1^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [6] \quad [10,1] \\ \overline{[4]} \quad [7] \quad [10,6^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [10] \quad [6] \quad [10,6] \\ \overline{[9]} \quad [7] \quad [5,1^{N-2}] \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} [5] \quad [6] \quad [9,2] \\ \overline{[2]} \quad [9] \quad [4,4^{N-2}] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} [7] \quad [6] \quad [9,4] \\ \overline{[4]} \quad [9] \quad [2,2^{N-2}] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

#### 5.6.4 Внешние симметрии типа I

В этом пункте мы рассматриваем внешние симметрии из группы  $S$ .

**Обозначение 1.** Обозначим за  $\cong$  внешнюю симметрию между двумя  $6$ - $j$  символами с дополнительным ограничением  $M \geq 2$ . Для краткости мы также отбрасываем множители, которые встречаются в равенствах и могут быть записаны как  $C = (-1)^{N-M} \frac{K_T(r_1, r_2, r_3, r_4, i, j, N)}{K_T(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4, i, j, M)}$ .

Рассмотрим внешние симметрии типа I. Удобнее выписать не все множество  $S \setminus I$ , а его фактор  $E = S/I$ . В  $U_q(sl_2)$  есть подгруппа преобразований Редже, перестановки строк и столбцов. Можно заметить, что и здесь имеются похожие подгруппы. Внешние симметрии для типа I аналогичны перестановкам столбцов и могут быть легко записаны в обозначениях  $\Delta_i = N - M_i$ ,  $n_i = M_i - 2$ ,  $n_0 = N - 2$ .

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_1^N \cong \begin{bmatrix} r_1 & i + \Delta_1 & r_2 + \Delta_1 \\ r_3 & j + \Delta_1 & r_4 + \Delta_1 \end{bmatrix}_1^{M_1} \cong \begin{bmatrix} i + n_0 & r_2 + \Delta_2 & r_1 - n_2 \\ j + n_0 & r_4 + \Delta_2 & r_3 - n_2 \end{bmatrix}_1^{M_2} \quad (5.70)$$

$$\cong \begin{bmatrix} i + n_0 & r_1 - n_3 & r_2 + \Delta_3 \\ j + n_0 & r_3 - n_3 & r_4 + \Delta_3 \end{bmatrix}_1^{M_3} \cong \begin{bmatrix} r_2 + n_0 & i + \Delta_4 & r_1 - n_4 \\ r_4 + n_0 & j + \Delta_4 & r_3 - n_4 \end{bmatrix}_1^{M_4} \quad (5.71)$$

$$\stackrel{N=M_5=2}{\cong} \begin{bmatrix} r_2 + n_0 & r_1 - n_5 & i + \Delta_5 \\ r_4 + n_0 & r_3 - n_5 & j + \Delta_5 \end{bmatrix}_1^{M_5}, \quad (5.72)$$

где  $n_i$ ,  $\Delta_i$  и  $M_i$  фиксированы правилами слияния.

Отметим, что  $E$  изоморфно  $\mathbb{S}_3$  только для  $N = M_5 = 2$ . В этом случае 6 элементов выше представлены  $\{(), (23), (13), (132), (123), (12)\}$  соответственно. В общем случае, невозможно удовлетворить правилам слияния, поэтому  $E$  содержит только 4 преобразования, которые не замкнуты относительно композиции и  $E \cong \mathbb{S}_3 \setminus \{(12)\}$ .

Эти симметрии интересны, потому что они не могут быть выражены как комбинация каких-либо известных симметрий. С гипергеометрической точки зрения эти символы имеют одинаковое значение -  ${}_4\Phi_3$ , но при этом  $K_T$  меняется этим преобразованием.

Выпишем несколько примеров этих симметрий:

– Первая симметрия,  $N = M_1 = 4$ :

$$\begin{Bmatrix} [3] & \overline{[1]} & [4,1^2] \\ [6] & [8] & [5,1^2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [3] & \overline{[4]} & [1,1^2] \\ [6] & [5] & [8,3^2] \end{Bmatrix}.$$

– Вторая симметрия,  $N = 4, M_2 = 3$ :

$$\begin{Bmatrix} [5] & \overline{[4]} & [1] \\ [7] & [8] & [9,3^2] \end{Bmatrix} = -\sqrt{\frac{[2]_q[3]_q}{[5]_q[8]_q}} \begin{Bmatrix} [3] & \overline{[5]} & [4,3] \\ [11] & [9] & [6] \end{Bmatrix}.$$

– Третья симметрия,  $N = 4, M_3 = 2$ :

$$\begin{Bmatrix} [7] & \overline{[3]} & [4] \\ [2] & [6] & [1,1^2] \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{[2]_q[3]_q}{[5]_q[6]_q}} \begin{Bmatrix} [6] & \overline{[7]} & [5] \\ [3] & [2] & [8] \end{Bmatrix}.$$

– Четвертая симметрия,  $N = 4, M_4 = 5$ :

$$\begin{Bmatrix} [6] & \overline{[4]} & [8,3^2] \\ [5] & [7] & [9,4^2] \end{Bmatrix} = -\frac{[2]_q[3]_q}{[7]_q} \sqrt{\frac{1}{[6]_q^3}} \begin{Bmatrix} [6] & \overline{[7]} & [3,2^3] \\ [9] & [8] & [2] \end{Bmatrix}.$$

### 5.6.5 Внешние симметрии типа II

Аналогичным образом мы можем рассматривать симметрии типа II  $E = S/I$  и зафиксировать  $M$  преобразованием (5.46). Эти симметрии аналогичны

перестановке столбцов и перестановке строк:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & i \\ r_3 & r_4 & j \end{bmatrix}_2^N \cong \begin{bmatrix} j+\Delta_1 & r_1+\Delta_1 & r_4 \\ i & r_3 & r_2+\Delta_1 \end{bmatrix}_2^{M_1} \cong \begin{bmatrix} r_2+\Delta_2 & j+\Delta_2 & r_3 \\ r_4 & i & r_1+\Delta_2 \end{bmatrix}_2^{M_2} \cong \\
& \cong \begin{bmatrix} i-n_3 & r_1+\Delta_3 & r_2+n_0 \\ j+n_0 & r_3 & r_4-n_3 \end{bmatrix}_2^{M_3} \cong \begin{bmatrix} r_2+\Delta_4 & i-n_4 & r_1+n_0 \\ r_4 & j+n_0 & r_3-n_4 \end{bmatrix}_2^{M_4} \cong \\
& \cong \begin{bmatrix} r_4-n_5 & j+\Delta_5 & r_1+n_0 \\ r_2+n_0 & i & r_3-n_5 \end{bmatrix}_2^{M_5} \cong \begin{bmatrix} j+\Delta_6 & r_3-n_6 & r_2+n_0 \\ i & r_1+n_0 & r_4-n_6 \end{bmatrix}_2^{M_6} \cong \\
& \cong \begin{bmatrix} r_1+\Delta_7 & r_4-n_7 & j+n_0 \\ r_3 & r_2+n_0 & i-n_7 \end{bmatrix}_2^{M_7} \cong \begin{bmatrix} r_3-n_8 & r_2+\Delta_8 & j+n_0 \\ r_1+n_0 & r_4 & i-n_8 \end{bmatrix}_2^{M_8} \cong \\
& \cong \begin{bmatrix} r_4-n_9 & i-n_9 & r_3 \\ r_2+n_0 & j+n_0 & r_1+\Delta_9 \end{bmatrix}_2^{M_9} \cong \begin{bmatrix} i-n_{10} & r_3-n_{10} & r_4 \\ j+n_0 & r_1+n_0 & r_2+\Delta_{10} \end{bmatrix}_2^{M_{10}} \cong \\
& \cong \begin{bmatrix} r_3-n_{11} & r_4-n_{11} & i \\ r_1+n_0 & r_2+n_0 & j+\Delta_{11} \end{bmatrix}_2^{M_{11}}.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Отметим, что последний 6-й символ существует только для  $N = M_{11} = 2$  поскольку иначе удовлетворить неравенства невозможно. Изоморфизм  $E|_{N=M_{11}=2} \cong \mathbb{A}_4$  имеет следующую структуру. Первая строка соответствует элементам  $\{(), (143), (134)\}$ . Первый столбец представлен элементами  $\{(), (132), (234), (243)\}$ . Остальные элементы можно получить из таблицы:

$()$	$(143)$	$(134)$
$(132)$	$(123)$	$(142)$
$(234)$	$(14)(23)$	$(13)(24)$
$(243)$	$(124)$	<b><math>(12)(34)</math></b>

Если мы рассматриваем произвольное  $N$ , то  $E$  не замкнуто относительно композиции и  $E \cong \mathbb{A}_4 \setminus \{(12)(34)\}$ .

Выпишем несколько примеров этих симметрий:

– Первая симметрия,  $N = M_1 = 4$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [5] & [2] & [7] \\ \overline{[4]} & [3] & [6, 2^2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [6] & [5] & [7, 4] \\ \overline{[7]} & [4] & [2, 2^2] \end{array} \right\}.$$

– Третья симметрия,  $N = 4, M_3 = 5$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [8] & [1] & [9] \\ \overline{[5]} & [4] & [6, 1^2] \end{array} \right\} = -\sqrt{\frac{[10]_q [8]_q}{[4]_q [3]_q}} \left\{ \begin{array}{ccc} [6] & [7] & [8, 5] \\ \overline{[8]} & [5] & [1, 1^3] \end{array} \right\}.$$

– Седьмая симметрия,  $N = 4, M_7 = 5$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [8] & [1] & [9] \\ \overline{[5]} & [4] & [6, 1^2] \end{array} \right\} = -\sqrt{\frac{[10]_q [8]_q}{[4]_q [3]_q}} \left\{ \begin{array}{ccc} [7] & [1] & [8] \\ \overline{[5]} & [3] & [6, 1^3] \end{array} \right\}.$$

– Девятая симметрия,  $N = 4, M_9 = 3$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [8] & [4] & [6, 3] \\ \overline{[3]} & [9] & [5, 3^2] \end{array} \right\} = -\sqrt{\frac{[2]_q^2 [3]_q [6]_q^2 [10]_q}{[4]_q^3 [5]_q [11]_q [12]_q}} \left\{ \begin{array}{ccc} [8] & [5] & [8, 5] \\ \overline{[6]} & [7] & [9, 5] \end{array} \right\}.$$

### Доказательство утверждения 5

*Доказательство.* Докажем неотрицательность следующих выражений:

$$\begin{cases} r_1 + r_3 + i - j \geq 0, \\ 3r_2 + r_4 - i - j \geq 0, \end{cases} \quad T \in \{1, 2\}, \quad (5.74)$$

$$i + r_1 - r_3 \geq 0, \quad T = 2. \quad (5.75)$$

Неотрицательность можно доказать с помощью неравенств на  $i, j$ . Эти неравенства являются тавтологическим обобщением случая  $U_q(sl_2)$  [8]:

$$\max \begin{pmatrix} |r_1 - r_2| \\ |r_3 - r_4| \end{pmatrix} \leq i \leq \min \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ r_3 + r_4 \end{pmatrix}, \quad \max \begin{pmatrix} |r_2 - r_3| \\ |r_1 - r_4| \end{pmatrix} \leq j \leq \min \begin{pmatrix} r_2 + r_3 \\ r_1 + r_4 \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

При подходящей подстановке доказательство очевидно:

$$r_1 + r_3 + i - j \geq r_1 + r_3 + (-r_3 + r_4) - (r_1 + r_4) \geq 0, \quad (5.77)$$

$$3r_2 + r_4 - i - j \geq 3r_2 + r_4 - (r_1 + r_2) - (r_2 + r_3) \geq r_2 + r_4 - r_1 - r_3 = 0, \quad (5.78)$$

$$i + r_1 - r_3 \geq \max \begin{pmatrix} r_2 - r_1 + r_1 - r_3 \\ r_3 - r_4 + r_1 - r_3 \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} r_2 - r_3 \\ r_1 - r_4 \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} r_2 - r_3 \\ r_3 - r_2 \end{pmatrix} \geq 0. \quad (5.79)$$

Точно так же неотрицательность всех выражений можно вывести из внешних симметрий. Поскольку в этих случаях вывод аналогичен, он опускается.  $\square$

## 5.7 $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы, коэффициенты Рака и гипотеза о собственных значениях

Гипотеза о собственных значениях [71] может быть получена из уравнения Янга-Бакстера для  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц и записана аналогично [18] в терминах коэффициентов Рака. В этом уравнении матрица  $\hat{\mathcal{R}}$  считается известной, а матрица Рака – нет. Итак, мы рассматриваем матрицу Рака как решение уравнения Янга-Бакстера. Проблема в том, что уравнение Янга-Бакстера имеет множество решений. По определению матрица Рака является невырожденной матрицей, поэтому мы должны рассматривать только невырожденные решения уравнения Янга-Бакстера. К сожалению, это не гарантирует единственность решения. Гипотеза о собственных значениях утверждает, что матрица Рака однозначно определяется собственными значениями соответствующей  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы. В этом разделе мы даем определения  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц и б $\hat{j}$ -символов, а затем формулируем гипотезу о собственных значениях.

### 5.7.1 $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы и коэффициенты Рака

Напомним конструкцию из главы 1.1. Мы работаем с представлениями алгебры  $U_q(sl_N)$ , обозначаемыми  $R_i$ , каждое из которых действует в векторном пространстве  $V_i$ . Операторы  $\hat{\mathcal{R}}_1 \dots \hat{\mathcal{R}}_m$  называются  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицами, они действуют в тензорном произведении  $V_i$ . По определению они решают уравнение Янга-Бакстера, поэтому их также можно рассматривать как представление группы

кос. Каждое  $\hat{\mathcal{R}}_i$  может быть записано как комбинация перестановки  $P$  двух векторных пространств  $(V_i, V_{i+1})$  и универсальной  $\check{\mathcal{R}}$ -матрицы:

$$\hat{\mathcal{R}}_i = 1_{V_1} \otimes 1_{V_2} \otimes \dots \otimes P\check{\mathcal{R}}_{i,i+1} \otimes \dots \otimes 1_{V_n} \quad (5.80)$$

Матричный вид  $\hat{\mathcal{R}}_i$  зависит от выбора базиса в тензорном произведении  $V_i$  с определенным порядком. Наиболее удобный базис можно построить с использованием векторов старшего веса. Зафиксируем порядок в тензорном произведении. Действуя понижающими операторами на вектора старшего веса, мы создаем базис в полученном пространстве, поэтому мы будем называть этот базис  $B_{i_1 \dots i_m}$  с индексами, соответствующими порядку множителей.

Выберем базис в  $R_1 \otimes \dots \otimes R_m$ , который соответствует следующему порядку в тензорном произведении:

$$B_{1,2,3 \dots m} = (\dots ((R_1 \otimes R_2) \otimes R_3) \otimes \dots) \otimes R_m \quad (5.81)$$

$\hat{\mathcal{R}}_1$  в выбранном базисе диагональная, каждая строка и столбец соответствует представлению  $X_\alpha$  в разложении

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}^{R_1, R_2} \otimes X_{\alpha} \quad (5.82)$$

Если  $\dim \mathcal{M}_{\alpha}^{R_1, R_2} > 1$ , тогда выбор базиса, диагонализующего  $\hat{\mathcal{R}}_1$ , более сложный, у нас есть дополнительное незафиксированное вращение в подпространстве  $X_{\alpha}$ . Однако всегда возможно зафиксировать его так, чтобы  $\hat{\mathcal{R}}_1$  была диагональной. Но если мы рассмотрим  $\hat{\mathcal{R}}_2$ , она может быть диагональной только в базисе соответствующем

$$B_{1,2,3,4 \dots m} = (\dots (R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3)) \otimes \dots) \otimes R_m \quad (5.83)$$

Поэтому чтобы диагонализировать матрицу  $\hat{\mathcal{R}}_2$ , мы должны сделать преобразование с помощью  $U$ -матрицы, которое является естественным изоморфизмом между пространствами с разным порядком в тензорном произведении:

$$U : (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \rightarrow R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) \quad (5.84)$$

Мы можем переписать его в неприводимых компонентах, где  $M$  – кратность представления в разложении.

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes X_i \\ R_2 \otimes R_3 &= \bigoplus_j M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes Y_j \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
(R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 &= \bigoplus_{i,k} M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_{4_k}}^{X_i, R_3} \otimes R_{4_k} \\
R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) &= \bigoplus_{j,k} M_{R_{4_k}}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes R_{4_k}
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Ассоциативность векторных пространств требует изоморфизма  $U$  между двумя слияниями. Это преобразование определяется матрицей Рака или  $6j$ -символами Рака-Вигнера.

**Определение 16.** Коэффициенты Рака являются элементами матрицы Рака, которая является отображением:

$$U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} : \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_4}^{X_i, R_3} \rightarrow \bigoplus_j M_{R_4}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3} \tag{5.87}$$

**Определение 17.**  $6j$ -символ Вигнера является элементом нормированной  $U$ -матрицы:

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & X_i \\ R_3 & R_4 & Y_j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\dim(X_i) \dim(Y_j)}} U_{i,j} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \tag{5.88}$$

### 5.7.2 Инклюзивные и эксклюзивные коэффициенты Рака

Мы делим матрицы Рака на два разных класса: инклюзивный и эксклюзивный. Эта классификация естественным образом следует из двух различных способов вычисления инвариантов ХОМФЛИ. Следуя подходу Решетихина-Тураева [273; 276; 277; 308; 331], в процессе вычисления инвариантов узлов необходимо вычислить матрицы для всех возможных  $R_4$ . Зафиксируем первые три аргумента  $R_1, R_2, R_3$  в матрице Рака. Для каждого  $R_4 \subset R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$  мы можем выписать нетривиальные матрицы Рака как  $U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}$ . Эти матрицы Рака называются инклюзивными.

С другой стороны, есть другой способ вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, основанный на конформной теории поля Весса-Зумино Виттена [102]. В

случае арборесцентных зацеплений требуется только две матрицы Рака, которые мы называем эксклюзивными:  $U \begin{bmatrix} R_1 & \overline{R_2} \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}$  и  $U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ \overline{R_3} & R_4 \end{bmatrix}$ . В этих матрицах Рака используются сопряженные представления  $U_q(sl_N)$ . Основное различие между инклюзивными и эксклюзивными матрицами Рака состоит в том, что инклюзивные матрицы перестают зависеть от  $N$ , когда они достаточно велики. С другой стороны, эксклюзивные матрицы Рака зависят от  $N$ , хотя зависимость всегда алгебраическая в терминах  $q$  и  $A = q^N$ .

### 5.7.3 Гипотеза о собственных значениях

Запишем выражения, которые приводят к гипотезе. Гипотеза о собственных значениях происходит из уравнения Янга-Бакстера для зацеплений, которое является алгебраической формой третьего движения Рейдемейстера в теории узлов. Для узлов оно определяется уравнением

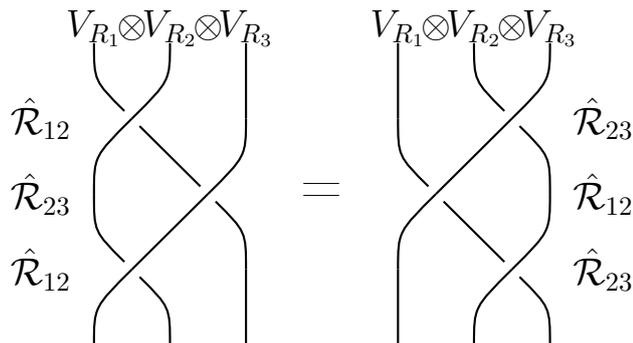
$$\hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{R}}_1 = \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{R}}_2 \quad (5.89)$$

$U$ -матрица действует в тензорном кубе представления  $R$ :

$$U : (R \otimes R) \otimes R \rightarrow R \otimes (R \otimes R) \quad U^\dagger = U^{-1} \quad (5.90)$$

Выберем базис, в котором  $\hat{\mathcal{R}}_1$  диагональна, тогда  $\hat{\mathcal{R}}_2$  может быть не диагональной, но мы можем выразить ее как  $\hat{\mathcal{R}}_2 = U^\dagger \hat{\mathcal{R}}_1 U$  где  $\hat{\mathcal{R}}_1$  диагональная. Подставляя  $\hat{\mathcal{R}}_2$  в (5.89), получаем:

$$\hat{\mathcal{R}}_1 U^\dagger \hat{\mathcal{R}}_1 U \hat{\mathcal{R}}_1 = U^\dagger \hat{\mathcal{R}}_1 U \hat{\mathcal{R}}_1 U^\dagger \hat{\mathcal{R}}_1 U \quad (5.91)$$



Мы можем рассматривать это уравнение как выражение, определяющее  $U$ -матрицу. Прежде всего, выберем базис, в котором  $\hat{\mathcal{R}}$  диагональна. Собственные значения  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы хорошо известны [194] [147] и выражаются как действительная степень  $q$ , поэтому мы можем отсортировать собственные значения в порядке убывания этих степеней  $q$ . Уравнение (5.91) однородно относительно  $\hat{\mathcal{R}}$ , поэтому мы можем отнормировать  $\hat{\mathcal{R}}$  - матрицу, чтобы получить  $\det \hat{\mathcal{R}} = \prod_i \lambda_i = 1$ . Если этих соотношений достаточно для определения  $U$ -матрицы, то она зависит только от набора нормированных собственных значений. Рассмотрим две независимые матрицы Рака  $U$  и  $\tilde{U}$ , каждая из которых зависит от набора собственных значений  $\hat{\mathcal{R}}$  и  $\hat{\tilde{\mathcal{R}}}$  соответственно. Гипотеза о собственных значениях утверждает, что  $U$ -матрица полностью определяется набором нормированных собственных значений  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы.

**Гипотеза 2** (Гипотеза о собственных значениях для узлов). *Для двух равных наборов нормированных собственных значений двух  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц, действующих на произведение представлений  $R \otimes R \otimes R$ , матрицы Рака равны в соответствующих базисах, где  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы диагональные.*

В этой работе нас интересует это соотношение для случая зацепления с 3-х нитевой косой, где ситуация немного иная. Каждая нить может нести свое собственное представление в зацеплении, тогда как в узле есть только одно представление. Начальный порядок нитей может быть произвольным, поэтому возникают 3 разных уравнения, которые соответствуют разному начальному порядку представлений. Есть три уравнения, которые можно записать как:

$$\begin{aligned}
 U_{xyz} &: (R_x \otimes R_y) \otimes R_z \rightarrow R_x \otimes (R_y \otimes R_z) & U_{xyz}^\dagger &= U_{xyz}^{-1} \\
 \hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} &: (R_x \otimes R_y) \otimes R_z \rightarrow (R_y \otimes R_x) \otimes R_z \\
 \hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} \hat{\mathcal{R}}_{y(xz)} \hat{\mathcal{R}}_{(yz)x} &= \hat{\mathcal{R}}_{x(yz)} \hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} \hat{\mathcal{R}}_{z(xy)} \\
 \hat{\mathcal{R}}_{(yz)x} \hat{\mathcal{R}}_{z(yx)} \hat{\mathcal{R}}_{(zx)y} &= \hat{\mathcal{R}}_{y(zx)} \hat{\mathcal{R}}_{(yx)z} \hat{\mathcal{R}}_{x(yz)} \\
 \hat{\mathcal{R}}_{(zx)y} \hat{\mathcal{R}}_{x(zy)} \hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} &= \hat{\mathcal{R}}_{z(xy)} \hat{\mathcal{R}}_{(zy)x} \hat{\mathcal{R}}_{y(zx)}
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Выберем базис, в котором  $\hat{\mathcal{R}}_{(xy)z}$  диагональна, тогда  $\hat{\mathcal{R}}_{x(yz)}$  может быть не диагональной, но мы можем выразить ее как  $\hat{\mathcal{R}}_{x(yz)} = U_{xyz}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{x(yz)} U_{xyz}$ , где  $\hat{\mathcal{R}}'_{x(yz)}$

диагональная. Диагонализуя все  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} U_{yxz}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{y(xz)} U_{yzx} \hat{\mathcal{R}}_{(yz)x} &= U_{xyz}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{x(yz)} U_{xzy} \hat{\mathcal{R}}_{(xz)y} U_{zxy}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{z(xy)} U_{zyx} \\
\hat{\mathcal{R}}_{(yz)x} U_{zyx}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{z(yx)} U_{zxy} \hat{\mathcal{R}}_{(zx)y} &= U_{yzx}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{y(zx)} U_{yxz} \hat{\mathcal{R}}_{(yx)z} U_{xyz}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{x(yz)} U_{xzy} \\
\hat{\mathcal{R}}_{(zx)y} U_{xzy}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{x(zy)} U_{xyz} \hat{\mathcal{R}}_{(xy)z} &= U_{zxy}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{z(xy)} U_{zyx} \hat{\mathcal{R}}_{(zy)x} U_{yxz}^\dagger \hat{\mathcal{R}}'_{y(zx)} U_{yxz}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Ситуация аналогична случаю узла, поэтому мы можем обобщить гипотезу о собственных значениях для зацеплений. Удобно использовать обозначение  $\hat{\mathcal{R}}_1 \sim \hat{\mathcal{R}}_2$ , если две  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы имеют тот же набор нормированных собственных значений. Существует 12 различных  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц (5.93), но только три из них имеют разные наборы собственных значений. Обозначим эти три  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы как  $L = (\hat{\mathcal{R}}_1, \hat{\mathcal{R}}_2, \hat{\mathcal{R}}_3)$ .  $L$  и  $L'$  называются эквивалентными, если  $\forall i \hat{\mathcal{R}}_i \sim \hat{\mathcal{R}}'_i$ , эту эквивалентность можно обозначить как  $L \sim L'$ .

Подчеркнем, что если у нас  $L \sim L'$ , то  $L$  состоит из тройки  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц, которая отличается от другой тройки  $L'$  только на нормировку и конкретное унитарное вращение. Следовательно, можно сказать, что мы используем нормировку  $\det \hat{\mathcal{R}}_i = 1$  и ищем одинаковые наборы собственных значений для каждого  $i$ .

**Гипотеза 3** (Гипотеза о собственных значениях для случая зацеплений). *Для двух эквивалентных наборов  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц  $L \sim L'$ , соответствующие матрицы Рака (которые имеют одну и ту же область определения) равны в базисах, где  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрицы диагональные.*

Переформулируем теперь гипотезу в случае симметрических представлений в более удобной форме.

### 5.8 Гипотеза о собственных значениях для симметрических представлений

Пусть  $R_1, R_2, R_3$  – симметрические представления  $U_q(sl_N)$  и представление  $R_4 \subset R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$ . Обозначим за  $X, Y, Z$  все неприводимые представления,

которые удовлетворяют следующим правилам слияния:

$$\begin{aligned}
 R_1 \otimes R_2 &= \bigoplus_{\alpha=0}^{d(X)} X_\alpha \\
 R_2 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\beta=0}^{d(Y)} Y_\beta \\
 R_1 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\gamma=0}^{d(Z)} Z_\gamma
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

Чтобы получить ненулевые бj-символы, мы должны наложить на эти представления следующие условия:

$$\begin{aligned}
 R_4 &\subset X_\alpha \otimes R_3 \\
 R_4 &\subset Y_\beta \otimes R_1 \\
 R_4 &\subset Z_\gamma \otimes R_2
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Тогда, в зависимости от  $R_4$ , не все слагаемые правой части разложений (5.94) удовлетворяют условиям (5.95). Согласно теории представлений, количество неприводимых компонент для каждого слияния в (5.94), которое удовлетворяет (5.95), одинаково, и мы будем обозначать это число как  $d$ . В (5.94) мы рассматриваем тензорное произведение двух симметрических представлений. Следовательно, диаграммы Юнга результирующих неприводимых представлений имеют количество строк не больше двух. Таким образом, мы можем ввести следующие обозначения для диаграмм Юнга  $X, Y, Z$ :

$$\begin{aligned}
 X_\alpha &= [\mu_X - \alpha, \mu_X - \delta_X + \alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq d \\
 Y_\beta &= [\mu_Y - \beta, \mu_Y - \delta_Y + \beta], \quad 0 \leq \beta \leq d \\
 Z_\gamma &= [\mu_Z - \gamma, \mu_Z - \delta_Z + \gamma], \quad 0 \leq \gamma \leq d
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

где  $\mu$  и  $\delta$  – неотрицательные целые числа и зависят от конкретного выбора  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Для представлений  $U_q(sl_2)$ , мы будем использовать переменные  $x_\alpha = \delta_X - 2\alpha$ , которые соответствуют  $X_\alpha$  с удаленными столбцами длины 2; то же самое для  $Y$  и  $Z$ .

В качестве примера наших обозначений, ниже мы виписываем последовательность диаграмм Юнга с  $R_1 = [4], R_2 = [3], R_3 = [2], R_4 = [6, 3]$  для  $X_\alpha$ . Параметризация  $d = 2, \mu_X = 6, \delta_X = 5$ . Элементы серого цвета обозначают универсальную часть всех диаграмм, а остальные часть отличаются для разных  $\alpha$ . Для  $U_q(sl_2)$ ,  $\{x_\alpha\} = \{5, 3, 1\}$ . Для  $U_q(sl_N)$ , последовательность  $X_\alpha$  следующая:

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & & \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}$$

**Гипотеза 4.** Если есть две<sup>1</sup> матрицы Рака  $U = U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}$  и  $\tilde{U} = U \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 & \tilde{R}_4 \end{bmatrix}$  с симметрическими представлениями  $R_i, \tilde{R}_i, i = 1..3$ , определенные в (5.94), (5.95), (5.96) и выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ \delta_X = \tilde{\delta}_X \\ \delta_Y = \tilde{\delta}_Y \\ \delta_Z = \tilde{\delta}_Z \end{cases} \quad (5.97)$$

тогда соответствующие матрицы Рака  $U$  и  $\tilde{U}$  равны.

**Предложение 4.** Гипотеза 3 в случае трех симметрических входящих представлений  $R_1, R_2, R_3$  эквивалентна гипотезе 4.

*Доказательство.* Для  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , мы можем найти все собственные значения. Сначала мы находим последовательности  $X_\alpha, Y_\beta, Z_\gamma$ , каждое представление из этих последовательностей соответствует собственному значению. Известны выражения для собственных значений  $\hat{\mathcal{R}}$ -матриц [194] [147]:

$$\lambda_{X_\alpha} = \varepsilon_{X_\alpha} q^{\varkappa(X_\alpha) - \varkappa(R_1) - \varkappa(R_2)}$$

$$\varkappa(\lambda) = \sum_i \frac{\lambda_i}{2} (\lambda_i - 2i + 1) \quad R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\alpha=0}^d X_\alpha \quad (5.98)$$

где  $\varepsilon$  – либо 1, либо  $-1$ . Из множества примеров известно, что  $\varepsilon$  в случае симметрических представлений – это просто  $(-1)^\alpha$ . Следовательно, при одинаковом количестве нормированных собственных значений они всегда совпадают. Таким образом, ниже мы пренебрегаем знаком, так как он не влияет на доказательство.

Пусть три набора нормированных собственных значений  $(\lambda_{X_\alpha}, \lambda_{Y_\beta}, \lambda_{Z_\gamma})$  равны другим наборам  $(\lambda_{\tilde{X}_\alpha}, \lambda_{\tilde{Y}_\beta}, \lambda_{\tilde{Z}_\gamma})$ . Мы будем рассматривать только одно

<sup>1</sup>Все параметры, соответствующие второй матрице мы обозначаем  $\tilde{\phantom{x}}$ .

уравнение  $\lambda_{X_\alpha} = \lambda_{\tilde{X}_\alpha}$ , остальные решаются аналогичным образом. Если мы разделим каждый элемент первой последовательности на элемент из второй последовательности, мы должны получить одинаковое значение для всех  $\alpha$ . Из уравнения (5.98) мы видим, что единственная переменная, зависящая от  $\alpha$ , – это  $\varkappa(X_\alpha)$ . Другими словами, нормированные собственные значения будут такими же, если разница между  $\varkappa(X_\alpha)$  и  $\varkappa(\tilde{X}_\alpha)$  не зависит от  $\alpha$ :

$$\varkappa(X_\alpha) - \varkappa(\tilde{X}_\alpha) = \text{const} \quad (5.99)$$

Если в  $\hat{\mathcal{R}}$ -матрице ( $d > 0$ ) имеется более одного собственного значения, это уравнение дает нетривиальные условия. Мы можем использовать свойство монотонности функции  $\varkappa$  для симметрических представлений. Рассмотрим произвольное произведение симметрического представления как последовательность диаграмм Юнга  $X_\alpha = [\mu - \alpha, \mu - \delta + \alpha]$ , где  $0 \leq \alpha \leq d$ :

$$2\varkappa(X_\alpha) = \sum_j \mu_j(\alpha)(\mu_j(\alpha) - 2j + 1) = 2\alpha^2 - 2(1 + \delta)\alpha + \text{const} \quad (5.100)$$

Эта функция монотонно убывает от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \frac{1+\delta}{2}$ . Очевидно, что в диаграммах Юнга  $d \leq \frac{\delta}{2}$  в противном случае вторая строка будет больше первой. В этом случае все собственные значения разные. Это позволяет нам записывать упорядоченные последовательности диаграмм Юнга  $\mu(\alpha) = [\mu - \alpha, \mu - \delta + \alpha]$ ,  $\tilde{\mu}(\alpha) = [\tilde{\mu} - \alpha, \tilde{\mu} - \tilde{\delta} + \alpha]$ . Разность  $\varkappa$  должна быть постоянной:

$$\varkappa(X_\alpha) - \varkappa(\tilde{X}_\alpha) = (\tilde{\delta} - \delta)\alpha + \text{const} \quad (5.101)$$

В результате мы получаем следующую ситуацию: если количество собственных значений больше 1, то условия гипотезы о собственных значениях требуют, чтобы оба  $\delta$  были одинаковыми для двух диаграмм  $X_0, \tilde{X}_0$ . Также равенство  $d$  необходимо, чтобы количество элементов было равным. Очевидно, что при равенстве  $\delta$  и  $d$  для пары матриц условия гипотезы выполнены. В случае  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ ,  $N > 2$  это эквивалентно условиям:

$$[\mu, \mu - \delta] = [\tilde{\mu} + C, \tilde{\mu} - \tilde{\delta} + C], \quad d = \tilde{d} \quad (5.102)$$

Или в более компактном виде:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ \delta = \tilde{\delta} \end{cases} \quad (5.103)$$

Для двух других слияний доказательство такое же.  $d$  одинаково для всех трех тензорных произведений, как это может быть показано из теории представлений.  $\square$

**Следствие 4.** В случае  $U_q(sl_2)$  система (5.97) редуцируется следующим образом:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ x_0 = \tilde{x}_0 \\ y_0 = \tilde{y}_0 \\ z_0 = \tilde{z}_0 \end{cases} \quad (5.104)$$

Таким образом, гипотеза 4 в случае  $U_q(sl_2)$  принимает следующий вид.

**Гипотеза 5.** Если есть две матрицы Рака  $U = U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [r_4] \end{bmatrix}$  и  $\tilde{U} = U \begin{bmatrix} [\tilde{r}_1] & [\tilde{r}_2] \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{r}_4] \end{bmatrix}$  с симметрическими представлениями  $[r_i]$ ,  $[\tilde{r}_i]$ ,  $i = 1..3$ , определенные в (5.94)-(5.96)<sup>2</sup> и следующие условия выполнены:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ x_0 = \tilde{x}_0 \\ y_0 = \tilde{y}_0 \\ z_0 = \tilde{z}_0 \end{cases} \quad (5.105)$$

тогда соответствующие матрицы Рака  $U$  и  $\tilde{U}$  равны.

Этот подход также может быть применен к случаю  $U_q(sl_N)$ , когда представления симметрические и сопряженные к симметрическим, а именно к эксклюзивному случаю. Аналог предложения 4 для эксклюзивного случая доказывается аналогично. Вместо параметризации (5.96)  $X_\alpha$  определяется как  $[\mu_1 - \alpha, (\mu_2)^{N-2}, \mu_N + \alpha]$  и  $\delta$  следует определять как  $\mu_1 - \mu_N$ , отсюда следует следующее следствие.

---

<sup>2</sup> $R_i = [r_i]$ ,  $\tilde{R}_i = [\tilde{r}_i]$

**Следствие 5.** Для эксклюзивного случая  $U_q(sl_N)$  с  $\delta = \mu_1 - \mu_N$ , система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ \delta_X = \tilde{\delta}_X \\ \delta_Y = \tilde{\delta}_Y \\ \delta_Z = \tilde{\delta}_Z \end{cases} \quad (5.106)$$

### 5.9 Доказательство гипотезы о собственных значениях для $U_q(sl_2)$

Для  $U_q(sl_2)$  все представления могут быть пронумерованы диаграммами Юнга с одной строкой, а именно, мы имеем  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$ ,  $R_3 = [r_3]$ ,  $R_4 = [r_4]$  с некоторыми целыми числами  $r_i$ . Удобно обозначить  $U_q(sl_2)$  матрицы Рака как  $U \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ . Мы хотим доказать симметрии матриц Рака

$$U \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 \\ \tilde{r}_3 & \tilde{r}_4 \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

которые вытекают из гипотезы о собственных значениях, т. е. из системы (5.105).

Напомним, что  $X_\alpha = [x_\alpha]$ ,  $Y_\alpha = [y_\alpha]$ ,  $Z_\alpha = [z_\alpha]$ ,  $\alpha = 0 \dots d$ , определены в (5.94), (5.95) как 3 последовательности представлений со следующими свойствами. Для каждого  $\alpha$  представления  $X_\alpha$ ,  $Y_\alpha$ ,  $Z_\alpha$ , с одной стороны, получаются из разложения тензорного произведения для  $[r_1] \otimes [r_2]$ ,  $[r_2] \otimes [r_3]$  и  $[r_1] \otimes [r_3]$  соответственно. С другой стороны, каждое разложение  $[x_\alpha] \otimes [r_3]$ ,  $[y_\alpha] \otimes [r_1]$ ,  $[z_\alpha] \otimes [r_2]$  должно содержать представление  $[r_4]$ . Каждая последовательность может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} [x_\alpha] &= [x_0 - 2\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq d, \\ [y_\alpha] &= [y_0 - 2\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq d, \\ [z_\alpha] &= [z_0 - 2\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq d \end{aligned} \quad (5.108)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  и  $d$  зависят от  $r_1, r_2, r_3, r_4$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

### 5.9.1 набросок доказательства

Гипотеза о собственных значениях изначально сформулирована в терминах собственных значений  $\mathcal{R}$ -матрицы, которые задаются квадратичным оператором Казимира. Он сводится к системе *квадратных* уравнений относительно параметров диаграмм Юнга. В предыдущем разделе мы доказали, что гипотеза о собственных значениях для  $U_q(sl_2)$  эквивалентно формулируется в терминах системы (5.105), которая является *линейной* по параметрам диаграммы Юнга.

В этом разделе мы докажем гипотезу 5. А именно, мы выражаем параметры  $d, x_0, y_0, z_0$  из системы (5.105) через  $r_i$ . Это дает нам систему линейных уравнений на  $\tilde{r}_i$ . Мы решаем эту систему и показываем, что  $\tilde{r}_i$  связаны с  $r_i$  хорошо известными симметриями бж-символов – симметриями тетраэдра и Редже. Чтобы упростить доказательство, разделим его на 4 этапа и сначала сделаем набросок.

**Набросок доказательства.** Мы докажем гипотезу, используя следующие шаги.

1. Получим выражения для  $d(r_i), x_0(r_i), y_0(r_i), z_0(r_i)$  из теории представлений. То же самое для  $\tilde{d}(\tilde{r}_i)$  и т.д.
2. Полученные выражения представим в терминах минимумов и максимумов наборов линейных функций, поэтому зависимость от параметров  $r_i$  будет кусочно линейна. Мы делим выражения на несколько случаев (*типов слияний*), где зависимость линейная.
3. Решаем систему (5.105) для каждого типа слияний отдельно относительно  $\tilde{r}_i$ .
4. Соотнесем решения  $\tilde{r}_i(r_1, \dots, r_4)$  с матричными симметриями Рака. Фактически, есть 8 различных решений, которые соответствуют 8 симметриям матрицы Рака.

**Шаг 1.** Выразим параметры матрицы Рака  $d, x_0, y_0, z_0$  через  $r_i$ . Выражения получены из правил слияния, вытекающих из теории представлений. С одной стороны,  $[x_\alpha]$  получаются из  $[r_1] \otimes [r_2]$ , следовательно  $\max(r_1 - r_2, r_2 - r_1) \leq x_\alpha \leq r_1 + r_2$ . С другой стороны, умноженные на  $[r_3]$  они должны давать  $[r_4]$ ,

поэтому  $\max(r_3 - r_4, r_4 - r_3) \leq x_\alpha \leq r_3 + r_4$ . Итак, мы имеем

$$\max \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_4 \\ r_4 - r_3 \end{pmatrix} \leq x_\alpha \leq \min \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ r_3 + r_4 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq d. \quad (5.109)$$

Очевидно,  $x_0 = \min(r_1 + r_2, r_3 + r_4)$  и  $d = \min(r_1 + r_2, r_3 + r_4) - \max(|r_1 - r_2|, |r_3 - r_4|)$  кусочно линейные функции по  $r_i$ .

**Шаг 2.** Теперь разделим полученные выражения для  $x_0$  и  $d$  на несколько случаев, когда зависимость в  $r_i$  линейна. Всего существует 8 возможных случаев диапазонов  $x$ . Для заданных значений представлений имеет место один из 8 возможных случаев. Следовательно, мы можем разбить все  $x$  на 8 *типов слияний* с различными выражениями минимумов и максимумов, где тип определяется условиями неравенства.

Ясно, что

$$d = \min_i(d_i), \quad \text{где} \quad 2d_i = \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 - r_4, \\ r_1 + r_2 - r_3 + r_4, \\ r_1 - r_2 + r_3 + r_4, \\ -r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \\ 2r_4, \\ 2r_3, \\ 2r_2, \\ 2r_1. \end{cases} \quad (5.110)$$

Заметим, что выражение для  $x_0$  полностью определяется выражением для  $d$  для общего выбора  $r_i$ , то есть  $x_0 = r_1 + r_2$ , если  $d$  принимает значения  $\{1, 2, 7, 8\}$  и  $x_0 = r_3 + r_4$  в противном случае.

Случаи для  $y$  и  $z$  аналогичны случаю для  $x$ :

$$\max \begin{pmatrix} r_3 - r_2 \\ r_2 - r_3 \\ r_1 - r_4 \\ r_4 - r_1 \end{pmatrix} \leq y_\alpha \leq \min \begin{pmatrix} r_3 + r_2 \\ r_1 + r_4 \end{pmatrix}, \quad \max \begin{pmatrix} r_1 - r_3 \\ r_3 - r_1 \\ r_2 - r_4 \\ r_4 - r_2 \end{pmatrix} \leq z_\alpha \leq \min \begin{pmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_4 \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

Как можно видеть в (5.110),  $d = \min(d_i)$  инвариантно относительно перестановок  $r_1, r_2, r_3$ . Длины  $d(Y)$ ,  $d(Z)$  последовательностей  $y$  и  $z$  получаются из двух выражений (5.111), которые отличаются от  $x$  случая (5.109) только перестановкой  $r_3 \leftrightarrow r_1$  и  $r_3 \leftrightarrow r_2$  соответственно. Поэтому все три длины имеют то же самое выражение  $d = d(Y) = d(Z) = \min(d_i)$ , как и должно быть для каждой матрицы Рака в соответствии с теорией представлений.

Если мы рассмотрим слияния  $y$  и  $z$ , есть также 8 возможностей, но они не добавляют никаких новых типов слияний. Как мы отметили выше,  $d$  имеет одно и то же выражение (5.110) для  $x, y$  и  $z$ . Кроме того, мы заметили, что типа слияния достаточно, чтобы определить, как задаются условия неравенства. Следовательно, 8 типов слияний  $x$  находятся во взаимно однозначном соответствии с типами слияний  $y$  и  $z$ , и логично сказать, что матрица Рака может иметь один из 8 типов слияний. Действительно, как только  $d$  фиксируется для  $x$ , это также фиксирует неравенства для  $y$  и  $z$ , поэтому количество типов слияний для матриц Рака равно 8. Единственная разница между последовательностями  $x, y, z$  состоит в значениях  $y_0$  и  $z_0$ . В результате полная таблица типов слияний отражена в таблице 1.

**Шаги 3 и 4.** Теперь мы готовы решить систему (5.105). Для того, чтобы она была перед глазами, выпишем эту систему еще раз:

$$\begin{cases} d = \tilde{d}, \\ x_0 = \tilde{x}_0, \\ y_0 = \tilde{y}_0, \\ z_0 = \tilde{z}_0. \end{cases} \quad (5.112)$$

Прежде всего, рассмотрим два частных примера, которые прекрасно иллюстрируют нашу идею. Например, левая часть относится к типу 1, а правая часть –

ТИП	$2d$	$x_0$	$y_0$	$z_0$	УСЛОВИЯ
1	$r_1 + r_2 + r_3 - r_4$	$r_1 + r_2$	$r_2 + r_3$	$r_1 + r_3$	$d_1 = \min(d_i)$
2	$r_1 + r_2 - r_3 + r_4$	$r_1 + r_2$	$r_1 + r_4$	$r_2 + r_4$	$d_2 = \min(d_i)$
3	$r_1 - r_2 + r_3 + r_4$	$r_3 + r_4$	$r_1 + r_4$	$r_1 + r_3$	$d_3 = \min(d_i)$
4	$-r_1 + r_2 + r_3 + r_4$	$r_3 + r_4$	$r_2 + r_3$	$r_2 + r_4$	$d_4 = \min(d_i)$
5	$2r_4$	$r_3 + r_4$	$r_1 + r_4$	$r_2 + r_4$	$d_5 = \min(d_i)$
6	$2r_3$	$r_3 + r_4$	$r_2 + r_3$	$r_1 + r_3$	$d_6 = \min(d_i)$
7	$2r_2$	$r_1 + r_2$	$r_2 + r_3$	$r_2 + r_4$	$d_7 = \min(d_i)$
8	$2r_1$	$r_1 + r_2$	$r_1 + r_4$	$r_1 + r_3$	$d_8 = \min(d_i)$

Таблица 1 — Типы  $U_q(sl_2)$  матриц Рака в зависимости от значения  $d$

к типу 2:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 - r_4 = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 - \tilde{r}_3 + \tilde{r}_4, \\ r_1 + r_2 = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, \\ r_2 + r_3 = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_4, \\ r_1 + r_3 = \tilde{r}_2 + \tilde{r}_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{r}_1 = r_2, \\ \tilde{r}_2 = r_1, \\ \tilde{r}_3 = r_4, \\ \tilde{r}_4 = r_3. \end{cases} \quad (5.113)$$

Понятно, что мы получаем перестановку. Рассмотрим второй пример, когда левая часть имеет тип 1, а правая часть — тип 5:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 - r_4 = 2\tilde{r}_4, \\ r_1 + r_2 = \tilde{r}_3 + \tilde{r}_4, \\ r_2 + r_3 = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_4, \\ r_1 + r_3 = \tilde{r}_2 + \tilde{r}_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{r}_1 = \frac{-r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2}, \\ \tilde{r}_2 = \frac{r_1 - r_2 + r_3 + r_4}{2}, \\ \tilde{r}_3 = \frac{r_1 + r_2 - r_3 + r_4}{2}, \\ \tilde{r}_4 = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r_4}{2}. \end{cases} \quad (5.114)$$

Это знаменитая симметрия Редже в этом решении. А предыдущее решение — не что иное, как симметрия тетраэдра. Таким же образом легко проверить, что все 64 решения системы (5.112) соответствуют реджевским и/или симметриям тетраэдра. Однако давайте обсудим эти симметрии более подробно и выпишем все решения системы в компактном виде.

**Определение 18.** Уравнения (5.115) и их композиции называются симметриями Редже или преобразованиями Редже ( $\rho = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2}$ ,  $\rho' =$

$\frac{r_1+r_3+r_{12}+r_{23}}{2}, \rho'' = \frac{r_2+r_4+r_{12}+r_{23}}{2}$ ). Первое соотношение также может быть записано как симметрия матриц Рака [145].

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_{12} \\ r_3 & r_4 & r_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho - r_3 & \rho - r_4 & r_{12} \\ \rho - r_1 & \rho - r_2 & r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' - r_3 & r_2 & \rho' - r_{23} \\ \rho' - r_1 & r_4 & \rho' - r_{12} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1 & \rho'' - r_4 & \rho'' - r_{23} \\ r_3 & \rho'' - r_2 & \rho'' - r_{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.115)$$

**Определение 19.** Симметрия тетраэдра – известная симметрия  $6j$ -символов [145; 291]. Для  $U_q(sl_2)$ , она выражается как перестановка аргумента:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_{12} \\ r_3 & r_4 & r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 & r_4 & r_{12} \\ r_1 & r_2 & r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 & r_1 & r_{12} \\ r_4 & r_3 & r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 & r_2 & r_{23} \\ r_1 & r_4 & r_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_{12} & r_2 \\ r_3 & r_{23} & r_4 \end{pmatrix}$$

Однако нам не нужны все эти симметрии, а только те, которые связаны с матрицами Рака, то есть симметрии не должны влиять на матричные индексы  $r_{12}$  и  $r_{23}$ . Таким образом, все интересующие нас симметрии в матричных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} U \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} r_4 & r_3 \\ r_2 & r_1 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} r_3 & r_4 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} r_2 & r_1 \\ r_4 & r_3 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \rho - r_1 & \rho - r_2 \\ \rho - r_3 & \rho - r_4 \end{bmatrix} = \\ &= U \begin{bmatrix} \rho - r_4 & \rho - r_3 \\ \rho - r_2 & \rho - r_1 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \rho - r_3 & \rho - r_4 \\ \rho - r_1 & \rho - r_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \rho - r_2 & \rho - r_1 \\ \rho - r_4 & \rho - r_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Легко видеть, что эти симметрии образуют группу, которую мы обозначим как  $\Omega$ .

**Определение 20.** Группа симметрий  $\Omega$  матрицы Рака определяется следующим образом:

$$\Omega \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \Omega = \langle \text{Id}, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle,$$

$$\begin{cases} \omega_1 : (r_1, r_2, r_3, r_4) \rightarrow (r_3, r_4, r_1, r_2), \\ \omega_2 : (r_1, r_2, r_3, r_4) \rightarrow (r_2, r_1, r_4, r_3), \\ \omega_3 : (r_1, r_2, r_3, r_4) \rightarrow (\rho - r_1, \rho - r_2, \rho - r_3, \rho - r_4), \quad \rho = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{2} \end{cases} \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= \omega_2 \omega_1, & \omega_1^2 &= \text{Id}, \\ \omega_2 \omega_3 &= \omega_3 \omega_2, & \omega_2^2 &= \text{Id}, \\ \omega_3 \omega_1 &= \omega_1 \omega_3, & \omega_3^2 &= \text{Id} \end{aligned}$$

Теперь видно, что наш первый пример (5.113) соответствует  $\omega_2$ , а наш второй пример (5.114) соответствует  $\omega_3$ . Наконец, выпишем все решения системы (5.112) в терминах группы симметрии  $\Omega$ :

тип \ симметрия	Id	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1 \omega_2$	$\omega_1 \omega_3$	$\omega_2 \omega_3$	$\omega_1 \omega_2 \omega_3$
1	1	3	2	5	4	7	6	8
2	2	4	1	6	3	8	5	7
3	3	1	4	7	2	5	8	6
4	4	2	3	8	1	6	7	5
5	5	7	6	1	8	3	2	4
6	6	8	5	2	7	4	1	3
7	7	5	8	3	6	1	4	2
8	8	6	7	4	5	2	3	1

Таблица 2 — Решения системы (5.112)

**Замечание 1.** Несложно проверить, что любое вырождение типа  $d_i = d_j = \min_k(d_k)$  для некоторых  $i$  и  $j$  не приводит к неоднозначности выбора  $x_0, y_0, z_0$  из таблицы 1.

### 5.10 Симметрии для симметрических представлений $U_q(sl_N)$

Для  $U_q(sl_N)$  рассмотрим пару матриц Рака с симметрическими представлениями  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_2]$ ,  $R_3 = [r_3]$ ,  $R_4 = [m_1, m_2, m_3]$ ,  $\tilde{R}_1 = [\tilde{r}_1]$ ,  $\tilde{R}_2 = [\tilde{r}_2]$ ,  $\tilde{R}_3 = [\tilde{r}_3]$ ,  $\tilde{R}_4 = [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3]$ , где  $r_1, r_2, r_3, m_1, m_2, m_3$  – целые числа, обозначающие длину строки в диаграмме Юнга. Также иногда мы будем обозначать  $[m_1, m_2, m_3]$  как  $r_4$  и  $X, Y$  и  $Z$  как они определены в (5.94, 5.95).

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [\tilde{r}_1] & [\tilde{r}_3] \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3] \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

Наша цель – найти такие  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4$ , чтобы равенство выполнялось для всех возможных  $r_1, r_2, r_3, r_4$  из гипотезы о собственных значениях.

Как мы получили в (5.97), нам надо найти выражения для  $d$  и  $\delta$ . Найдем диапазон значений  $X, Y, Z$  с помощью правила слияния.

**Лемма 9.** *Для 3 произвольных симметрических представлений  $U_q(sl_N)$   $R_1, R_2, R_3$ , представление  $R_4 = [m_1, m_2, m_3] \subset R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$  и  $X, Y, Z$  определены выше, тогда типы слияний  $d, \delta$  могут быть выражены как в таблице 3.*

*Доказательство.* Посмотрим на диаграммы Юнга в разложениях  $X_k \subset R_1 \otimes R_2$  и  $R_4 \subset X_k \otimes R_3$ . Правила Литтлвуда-Ричардсона для разложения тензорного произведения  $sl_N$  говорят, что в произведении произвольной диаграммы Юнга  $\mu$  и симметрической диаграммы  $\nu$  может быть получена любая неприводимая компонента  $\rho \subset \mu \otimes \nu$  при помощи добавления элементов  $\nu$  в  $\mu$  таким образом, чтобы никакие два блока  $\nu$  не попадали в один столбец [83]. Тензорное произведение симметрических представлений легко представить в виде суммы представлений, соответствующих двухстрочным диаграммам Юнга  $X_k = [r_1 + r_2 - k, k]$ , где  $0 \leq k \leq \min(r_1, r_2)$ . С одной стороны,  $R_4 = [m_1, m_2, m_3]$ , но с другой стороны, мы можем получить его из произведения  $X_k = [r_1 + r_2 - k, k]$  и  $R_3$ . В общем виде это можно записать как  $[r_1 + r_2 + r_3 - kl - m_3, k + l, m_3]$ , где  $l$  и  $m_3$  – неотрицательные целые числа, параметризующие тензорное произведение  $X_k \otimes R_3$  и соответствуют количеству элементов, добавленных ко второй и третьей строкам  $X_k$ , тогда как элементы  $r_3 - l - m_3$  добавляются к первой строке  $X_k$ .

тип	$d$	$\delta_X$	$\delta_Y$	$\delta_Z$	условия
1	$m_1 - m_2$	$a + r_3$	$a + r_1$	$a + r_2$	$d_1 = \min(d_i)$
2	$r_1 - m_3$	$A - r_3$	$a + r_1$	$A - r_2$	$d_2 = \min(d_i)$
3	$r_2 - m_3$	$A - r_3$	$A - r_1$	$a + r_2$	$d_3 = \min(d_i)$
4	$r_3 - m_3$	$a + r_3$	$A - r_1$	$A - r_2$	$d_4 = \min(d_i)$
5	$m_2 - m_3$	$A - r_3$	$A - r_1$	$A - r_2$	$d_5 = \min(d_i)$
6	$m_1 - r_1$	$a + r_3$	$A - r_1$	$a + r_2$	$d_6 = \min(d_i)$
7	$m_1 - r_2$	$a + r_3$	$a + r_1$	$A - r_2$	$d_7 = \min(d_i)$
8	$m_1 - r_3$	$A - r_3$	$a + r_1$	$a + r_2$	$d_8 = \min(d_i)$

Таблица 3 — Типы  $U$ -матриц  $U_q(sl_N)$  в зависимости от значения  $d$ . Здесь  $a := 2m_1 - r_1 - r_2 - r_3$ ,  $A := r_1 + r_2 + r_3 - 2m_3$  и  $r_1 + r_2 + r_3 = m_1 + m_2 + m_3$  взято из правила слияния.

Из равенства двух выражений для  $R_4$  сразу находим, что  $l = m_2 - k$ ,  $m_3 = r_1 + r_2 + r_3 - m_1 - m_2$ . Поскольку  $l$  определяется значением  $k$ ,  $k$  — единственный целочисленный параметр в тензорном произведении, но мы оставим этот параметр, чтобы найти условия из правил слияния. Определение  $l$  требует, чтобы  $l \geq 0$  и  $l + m_3 \leq r_3$ . Также правила дают нам дополнительные неравенства  $l + k \leq r_1 + r_2 - k$  и  $m_3 \leq k$ . После упрощения неравенств получаем:

$$\max \begin{pmatrix} m_3 \\ r_1 + r_2 - m_1 \end{pmatrix} \leq k \leq \min \begin{pmatrix} r_1 + r_2 - m_2 \\ m_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

$d$  можно получить как длину диапазона,  $\delta$  соответствует левой части неравенств:  $\delta_X = r_1 + r_2 - 2k_{min}$ . Найти выражения для  $Y, Z$  несложно в силу симметрии задачи. Нам нужно только изменить переменные:  $r_3 \leftrightarrow r_1$  и  $r_3 \leftrightarrow r_2$  для  $k_Y$  и  $k_Z$  соответственно. Подобно  $U_q(sl_2)$ , все типы слияния могут быть

выражены следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} m_1 - m_2 \\ r_1 - m_3 \\ r_2 - m_3 \\ r_3 - m_3 \\ m_2 - m_3 \\ m_1 - r_1 \\ m_1 - r_2 \\ m_1 - r_3 \end{cases} \quad (5.120)$$

где  $d = \min(d_i)$ . Заметим, что  $d_X = d_Y = d_Z$  и выражения для  $\delta_X, \delta_Y, \delta_Z$  могут быть получены для каждого  $d_i$ , поэтому возможно переписать неравенства для  $X, Y, Z$  как в таблице типов слияний.

□

**Предложение 5.** Система (5.97) при  $N > 3$  имеет 8 различных решений, которые образуют группу из 3 независимых симметрий. Каждая симметрия определена для всех целых чисел  $C \geq C_0$ , где  $C_0$  – наименьшее число, при котором количество элементов в строках диаграмм Юнга остается неотрицательным.

$$\begin{aligned}
U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} [r_1 + C] & [r_2 + C] \\ [r_3 + C] & [m_1 + C, m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} = (5.121) \\
&= U \begin{bmatrix} [r_2 + C] & [r_1 + C] \\ [m_1 - m_2 + m_3 + C] & [m_1 + C, r_1 + r_2 - m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [r_3 + C] & [m_1 - m_2 + m_3 + C] \\ [r_1 + C] & [m_1 + C, r_1 + r_3 - m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [m_1 - m_2 + m_3 + C] & [r_3 + C] \\ [r_2 + C] & [m_1 + C, r_2 + r_3 - m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [C - r_1] & [C - r_2] \\ [C - r_3] & [C - m_3, C - m_2, C - m_1] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [C - r_2] & [C - r_1] \\ [C - m_1 + m_2 - m_3] & [C - m_3, C + m_2 - r_1 - r_2, C - m_1] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [C - r_3] & [C - m_1 + m_2 - m_3] \\ [C - r_1] & [C - m_3, C + m_2 - r_1 - r_3, C - m_1] \end{bmatrix} = \\
&= U \begin{bmatrix} [C - m_1 + m_2 - m_3] & [C - r_3] \\ [C - r_2] & [C - m_3, C + m_2 - r_2 - r_3, C - m_1] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**Замечание 2.** Кроме того, можно получить случай  $U_q(sl_3)$  из вышеприведенного решения, удалив столбцы высотой три, например  $[m_1, m_2, m_3] \rightarrow [m_1 - m_3, m_2 - m_3]$ .

В качестве примера мы напишем несколько равных матриц Рака для  $sl(3)$  и  $U_q(sl_N)$ ,  $N > 3$ :

•  $U_q(sl_3)$ ,  $C_1 \geq -2$ ,  $C_2 \geq 11$ . Заметим, что неравенства для  $C$  найдены из выражения для  $U_q(sl_N)$ .

$$\begin{aligned}
& U \begin{bmatrix} [6] & [5] \\ [7] & [9,3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [6+C_1] & [5+C_1] \\ [7+C_1] & [9,3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [5+C_1] & [6+C_1] \\ [8+C_1] & [9,4] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [7+C_1] & [5+C_1] \\ [6+C_1] & [9,6] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [8+C_1] & [7+C_1] \\ [5+C_1] & [9,5] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-6] & [C_2-5] \\ [C_2-7] & [9,6] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [C_2-5] & [C_2-6] \\ [C_2-8] & [9,5] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-7] & [C_2-5] \\ [C_2-6] & [9,3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-8] & [C_2-7] \\ [C_2-5] & [9,4] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.122}$$

•  $U_q(sl_N)$ ,  $N > 3$ ,  $C_1 \geq -1$ ,  $C_2 \geq 16$ .

$$\begin{aligned}
& U \begin{bmatrix} [7] & [8] \\ [11] & [16,9,1] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [7+C_1] & [8+C_1] \\ [11+C_1] & [16+C_1, 9+C_1, 1+C_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-7] & [C_2-8] \\ [C_2-11] & [C_2-1, C_2-9, C_2-16] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [8+C_1] & [7+C_1] \\ [8+C_1] & [16+C_1, 6+C_1, 1+C_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-8] & [C_2-7] \\ [C_2-24] & [C_2-1, -6+C_1, C_2-16] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [11+C_1] & [8+C_1] \\ [7+C_1] & [16+C_1, 9+C_1, 1+C_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-11] & [C_2-8] \\ [C_2-7] & [C_2-1, C_2-9, C_2-16] \end{bmatrix} = \\
& = U \begin{bmatrix} [8+C_1] & [11+C_1] \\ [8+C_1] & [16+C_1, 10+C_1, 1+C_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C_2-8] & [C_2-11] \\ [C_2-8] & [C_2-1, C_2-10, C_2-16] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.123}$$

### 5.10.1 Вывод симметрий (5.121)

Мы должны рассмотреть все возможные значения  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , поэтому существует 8 разных типов матриц Рака с разными  $d$ . Из леммы 9 мы знаем выражение для  $d, \delta_X, \delta_Y, \delta_Z$ , тогда как выражения для  $\delta$  определяются выбором

конкретных  $d$ , так что у нас есть 8 типов для разных  $d$  и 8 типов для разных  $\tilde{d}$ , всего 64 возможности.

Мы будем обозначать каждую систему с типами, определенными в таблице 3, следующим образом. Система  $c_{ij}$  имеет тип  $i$  слева и тип  $j$  справа,  $1 \leq i, j \leq 8$ . Например, система с  $d, \delta_X, \delta_Y, \delta_Z$  из типа слияния 2 и  $\tilde{d}, \tilde{\delta}_X, \tilde{\delta}_Y, \tilde{\delta}_Z$  из типа 5 обозначается как  $c_{25}$ . Мы можем просто начать решать все 64 системы уравнений, но есть более удобный способ решить эту систему.

**Предложение 6.** Решения  $c_{ij}$  удовлетворяют следующим свойствам

1. Решение всегда существует (без учета условий неравенств) и имеет один свободный параметр  $C$ ;
2. Если  $\tilde{r}_i, \tilde{m}_i$  – решение, то  $\tilde{r}_i + C, \tilde{m}_i + C$  тоже решает систему;
3. Каждая система из  $\{c_{ii}, c_{12}, c_{13}, c_{15}\}$  индуцирует симметрию, применимую к каждому типу;
4. Симметрия, индуцированная  $c_{ij}$ , может быть выражена как композиция симметрий, индуцированных  $c_{11}, c_{12}, c_{13}$  и  $c_{15}$ .

*Доказательство.*

1. Можно проверить, что  $d, \delta_X, \delta_Y$  и  $\delta_Z$  линейно независимы для каждого типа слияния. Другими словами, система не вырождена, следовательно, существует решение для каждого  $d$ . Поскольку у нас есть 4 уравнения и 5 независимых переменных  $r_1, r_2, r_3, m_1, m_2$  ( $m_3$  фиксируется условием сохранения количества элементов), решение имеет один свободный параметр.
2. Можно заметить, что таблица 3 имеет одно особое свойство. Мы будем называть  $r_i, m_i$  атомарными переменными. Каждое выражение  $d$  и  $\delta$  представляет собой линейную комбинацию атомарных переменных с целыми коэффициентами. Видно, что сумма положительных коэффициентов равна сумме отрицательных. Если увеличить все атомарные переменные на  $C$ , значения в таблице 3 не изменятся. Следовательно, у каждого решения есть свободный параметр, который добавляется к  $r_i, m_i$ .

Запишем решение  $c_{11}$  в качестве примера, назовем его *базовым решением*. Система для этого решения:

$$\begin{cases} m_1 - m_2 = \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 \\ 2m_1 - r_1 - r_2 = 2\tilde{m}_1 - \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 \\ 2m_1 - r_2 - r_3 = 2\tilde{m}_1 - \tilde{r}_2 - \tilde{r}_3 \\ 2m_1 - r_1 - r_3 = 2\tilde{m}_1 - \tilde{r}_1 - \tilde{r}_3 \end{cases} \quad (5.124)$$

Очевидно, система будет выполнена, если  $r_i = \tilde{r}_i, m_i = \tilde{m}_i, 0 \leq i \leq 3$ . Также мы можем заметить, что каждая сторона уравнений представляет собой замену атомарных переменных,  $C$  встречается как аддитивная константа к атомарным переменным. Основное решение:

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_1 + C] & [r_2 + C] \\ [r_3 + C] & [m_1 + C, m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Мы знаем, что свободный параметр входит в решение как аддитивная константа, поэтому система  $c_{ii}$  с совпадающими сторонами уравнений имеет такое же решение. Следовательно, (5.125) удовлетворяет не только системе  $c_{11}$ , но и  $\forall i c_{ii}$ . Другими словами, любая матрица Рака может быть преобразована, как в уравнении (5.125), следовательно, она может применяться для всех возможных типов и, следовательно, для всех  $r_i, m_i$  без каких-либо ограничений неравенства.

3. Решая системы  $c_{12}, c_{13}, c_{15}$  и опуская неравенства на  $d$ , получаем

$$c_{15} : \begin{cases} r_1 = C - \tilde{r}_1 \\ r_2 = C - \tilde{r}_2 \\ r_3 = C - \tilde{r}_3 \\ m_1 = C - \tilde{m}_3 \\ m_2 = C - \tilde{m}_2 \\ m_3 = C - \tilde{m}_1 \end{cases} \quad c_{12} : \begin{cases} r_1 = \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + C \\ r_2 = \tilde{r}_3 + C \\ r_3 = \tilde{r}_2 + C \\ m_1 = \tilde{m}_1 + C \\ m_2 = \tilde{r}_2 + \tilde{r}_3 - \tilde{m}_2 + C \\ m_3 = \tilde{m}_3 + C \end{cases} \quad (5.126)$$

$$c_{13} : \begin{cases} r_1 = \tilde{r}_3 + C \\ r_2 = \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 + \tilde{m}_3 + C \\ r_3 = \tilde{r}_1 + C \\ m_1 = \tilde{m}_1 + C \\ m_2 = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_3 - \tilde{m}_2 + C \\ m_3 = \tilde{m}_3 + C \end{cases} \quad (5.127)$$

Рассмотрим  $c_{15}$ , остальные уравнения решаются аналогично. Решение  $c_{15}$  может использоваться как оператор  $\hat{c}_{15}$ , который преобразует  $r_i, m_i$  в  $\tilde{r}_i, \tilde{m}_i$ , то есть просто как замена переменных. Как видно из определения, это преобразование меняет выражения типа 1 на выражения типа 5, но все еще неясно, что происходит с условиями неравенства. Чтобы их проверить, мы можем подставить переменные в неравенства  $d_1 = \min(d_i)$ :

$$d_1 = \min \begin{pmatrix} m_1 - m_2 \\ r_1 - m_3 \\ r_2 - m_3 \\ r_3 - m_3 \\ m_2 - m_3 \\ m_1 - r_1 \\ m_1 - r_2 \\ m_1 - r_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{d}_5 = \min \begin{pmatrix} \tilde{m}_2 - \tilde{m}_3 \\ \tilde{m}_1 - \tilde{r}_1 \\ \tilde{m}_1 - \tilde{r}_2 \\ \tilde{m}_1 - \tilde{r}_3 \\ \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 \\ \tilde{r}_1 - \tilde{m}_3 \\ \tilde{r}_2 - \tilde{m}_3 \\ \tilde{r}_3 - \tilde{m}_3 \end{pmatrix} = \min \begin{pmatrix} \tilde{d}_5 \\ \tilde{d}_6 \\ \tilde{d}_7 \\ \tilde{d}_8 \\ \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \tilde{d}_3 \\ \tilde{d}_4 \end{pmatrix} \quad (5.128)$$

Это преобразование сохраняет неравенства. Область определения  $\hat{c}_{15}$  полностью типа 1, в то время как область значений – типа 5.

Однако есть важное свойство этого решения. Как мы видели выше,  $\hat{c}_{15}$  действует на набор  $d$  выражений как перестановка. Полное утверждение состоит в том, что  $\hat{c}_{15}$  действует на строки таблицы 3 как перестановка, одновременно перемещая  $d_i, \delta_x, \delta_y, \delta_z$ . Если мы применим  $\hat{c}_{15}$  к произвольному типу  $i$ ,  $d_i \rightarrow \tilde{d}_{j(i)}$ , и неравенства также будут выполнены. Это изменение обозначений, а не значений, поэтому  $d_i = \tilde{d}_{j(i)}$ ,  $\delta_x = \tilde{\delta}_x$  и так далее, следовательно, это просто  $\hat{c}_{ij}$ . Для  $c_{15}$  перестановка типов –  $(1,2,3,4,5,6,7,8) \rightarrow (5,6,7,8,1,2,3,4)$ . Следовательно,  $\hat{c}_{15}$  преобразует каждую матрицу Рака в другую с упомянутым изменением типа, и нет никаких ограничивающих неравенств, потому что неравенства на правую часть эквивалентны неравенствам на левую часть для каждого типа. Как мы покажем позже,  $\hat{c}_{15}$  равно  $\hat{c}_{26}, \hat{c}_{37}$  и т.д.

Третье утверждение доказано. Ниже мы описываем эти преобразования как симметрии и называем их так, как если бы они были в  $U_q(sl_2)$ . Хотя они другие, они являются прямыми аналогами к случаю  $U_q(sl_2)$ . Выпишем перестановки.

- а)  $\hat{c}_{ii}$ ,  $1 \leq i \leq 8$  не меняет тип;
- б)  $\hat{c}_{15}$  – симметрия Редже, и переставляет  $(1,2,3,4) \leftrightarrow (5,6,7,8)$ ;
- в)  $\hat{c}_{12}$  переставляет  $(r_2, r_3)$ , поэтому  $(1,3,5,7) \leftrightarrow (2,4,6,8)$ ;
- г)  $\hat{c}_{13}$  переставляет  $(r_1, r_3)$ , поэтому  $(1,2,5,6) \leftrightarrow (3,4,7,8)$ .

4. Сделаем композицию полученных симметрий, чтобы получить  $c_{11}$  из произвольного  $c_{ij}$ . Во-первых, мы преобразуем  $c_{ij}$  в  $1 \leq i', j' \leq 4$  используя то, что  $\hat{c}_{15}$  перемещает типы из второй половины в первую. Если  $4 < i, j \leq 8$ , мы применяем его для обеих сторон  $c_{ij}$ . Если только один индекс больше 4, преобразование требуется только на одной стороне. В результате получаем  $c_{i'j'}$ , где  $1 \leq i', j' \leq 4$ . Теперь мы проделаем аналогичную операцию, чтобы преобразовать  $c_{i'j'}$  в  $1 \leq i'', j'' \leq 2$ , используя то, что  $\hat{c}_{13}$  перемещает типы  $(3,4)$  в  $(1,2)$ . Затем мы можем использовать  $\hat{c}_{12}$ , чтобы получить  $c_{11}$ . Таким образом, каждый  $c_{ij}$  может быть выражен как композиция базового решения и 3 дополнительных симметрий. Полученные выражения верны для всех  $r_i, m_i$  без дополнительных условий.

Если мы посмотрим на них как на группу из 8 симметрий, пренебрегая прибавлением  $C$ , в ней есть единица, 3 независимых элемента и еще 4 элемента могут быть получены композициями. Каждое преобразование, возведенное в квадрат, дает базовое, поэтому для конкретного  $C$  это инволюция ( $C = 0$  для  $c_{11}$  или  $\forall C \geq m_1$  для  $c_{15}$ ). Это очень похоже на ситуацию в  $U_q(sl_2)$ , поэтому мы можем называть новые симметрии аналогично случаю  $U_q(sl_2)$ . Симметрия от  $c_{15}$  явно является аналогом преобразования Редже, еще два действуют аналогично перестановкам в  $U_q(sl_2)$ . В общей сложности мы нашли, что 64 случая  $c_{ij}$  – это всего лишь 8 решений, которые разбиты на 8 различных типов. Эти симметрии образуют группу из 8 элементов (при фиксированном  $C$ ).

□

Доказательство утверждения 5 также позволяет обобщить симметрию Редже, которая в случае симметрических представлений  $sl(N)$  может быть записана следующим образом ( $C > m_1$ ):

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [C - r_1] & [C - r_2] \\ [C - r_3] & [C - m_3, C - m_2, C - m_1] \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

Кроме того, вторую и третью симметрию можно рассматривать как обобщение симметрии тетраэдра из  $U_q(sl_2)$  для инклюзивного класса матриц Рака. Например, аналог перестановки  $r_1 \leftrightarrow r_2$ :

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_2 + C] & [r_1 + C] \\ [m_1 - m_2 + m_3 + C] & [m_1 + C, r_1 + r_2 - m_2 + C, m_3 + C] \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

### 5.10.2 Другой подход к выводу (5.121)

Есть еще один способ вывести эти симметрии. В [219] была получена новая связь между  $U_q(sl_N)$  и  $U_q(sl_2)$  симметрическими матрицами Рака из гипотезы о собственных значениях:

$$U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} r_1 - m_3 & r_2 - m_3 \\ r_3 - m_3 & m_1 - m_2 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Это позволяет нам выводить симметрии для  $U_q(sl_N)$  как продолжение известных симметрий для  $U_q(sl_2)$  до произвольных  $N$ . Ответы, полученные с помощью обоих подходов, одинаковы, потому что оба вывода используют гипотезу о собственных значениях, только по-разному. Выведем симметрию Редже и одну перестановку, все остальные симметрии могут быть получены таким же образом.

Теперь мы можем применить симметрию Редже, а затем повторно выразить символ как символ для  $U_q(sl_N)$ :

$$\begin{aligned} U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} r_1 - m_3 & r_2 - m_3 \\ r_3 - m_3 & m_1 - m_2 \end{bmatrix} &= U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} m_1 - r_1 & m_1 - r_2 \\ m_1 - r_3 & m_2 - m_3 \end{bmatrix} = \\ &= U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [\tilde{r}_1] & [\tilde{r}_2] \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Решая систему уравнений для  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$  с правилами слияния, мы получаем следующую симметрию  $U_q(sl_N)$  матриц Рака:

$$U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [C-r_1] & [C-r_2] \\ [C-r_3] & [C-m_3, C-m_2, C-m_1] \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

Это та же самая симметрия, которую мы вывели выше. Теперь рассмотрим перестановку строк:

$$\begin{aligned} U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} r_1 - m_3 & r_2 - m_3 \\ r_3 - m_3 & m_1 - m_2 \end{bmatrix} &= U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} r_3 - m_3 & m_1 - m_2 \\ r_1 - m_3 & r_2 - m_3 \end{bmatrix} = \\ &= U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [\tilde{r}_1] & [\tilde{r}_2] \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.134)$$

Решение:

$$U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_3] & [m_1, m_2, m_3] \end{bmatrix} = U_{U_q(sl_N)} \begin{bmatrix} [r_1+C] & [m_1-m_2+m_3+C] \\ [r_3+C] & [m_1+C, r_1+r_3-m_2+C, m_3+C] \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

Она также совпадает с симметриями (5.121).

### 5.11 Симметрии для эксклюзивного случая $U_q(sl_N)$

Симметрии тетраэдра хорошо известны как для случая  $U_q(sl_N)$ , так и для  $U_q(sl_2)$ . Однако известное обобщение для  $U_q(sl_N)$  связывает только матрицы Рака определенного типа, включая эксклюзивные. Это обобщение выражается следующим образом:

**Определение 21.** *Симметрия тетраэдра – это известное свойство бj-символа быть инвариантным относительно преобразований [102] ( $\rho_i, \mu, \nu$  – произвольные диаграммы Юнга):*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} \rho_1 & \rho_2 & \mu \\ \rho_3 & \rho_4 & \nu \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\rho}_3 & \bar{\rho}_2 & \bar{\nu} \\ \bar{\rho}_1 & \bar{\rho}_4 & \bar{\mu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho_3 & \bar{\rho}_4 & \bar{\mu} \\ \rho_1 & \bar{\rho}_2 & \bar{\nu} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \rho_1 & \bar{\mu} & \bar{\rho}_2 \\ \bar{\rho}_3 & \bar{\nu} & \bar{\rho}_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho_2 & \rho_1 & \mu \\ \bar{\rho}_4 & \bar{\rho}_3 & \bar{\nu} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.136)$$

В этом разделе мы исследуем, используя пример эксклюзивных матриц Рака, есть ли у гипотезы о собственных значениях возможности для получения симметрий матриц Рака с несимметрическими представлениями. В результате получаются только симметрии тетраэдра. Затем мы делаем то же самое для более общего класса бj-символов и получаем некоторые новые симметрии. К сожалению, мы не можем проверить эти симметрии на конкретных примерах, поскольку соответствующие бj-символы пока неизвестны. Однако наша цель – показать, что гипотеза о собственных значениях может применяться к широкому классу бj-символов.

#### 5.11.1 Симметрическое $R_4$

**Определение 22.** *Мы будем называть два бj-символа ниже типом I и типом II [227].*

$$I \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & \overline{[r_2]} & X \\ [r_3] & [r_4] & Y \end{array} \right\} \quad II \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [r_1] & [r_2] & X \\ \overline{[r_3]} & [r_4] & Y \end{array} \right\} \quad (5.137)$$

где  $r_1, r_2, r_3, r_4$  – целые числа, обозначающие количество блоков для симметрических представлений  $U_q(sl_N)$   $R_1, R_2, R_3, R_4$ .  $X, Y$  – диаграммы Юнга, удовлетворяющие правилам слияния.

**Предложение 7.** *Каждый эксклюзивный коэффициент Рака с симметрическими и сопряженными симметрическим представлениями принадлежит к одному из двух видов: типу I или типу II.*

Рассмотрим пару бј-символов типа I, где  $r_4 = r_1 + r_3 - r_2$ .

$$\begin{Bmatrix} [r_1] & \overline{[r_2]} & X \\ [r_3] & [r_4] & Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\tilde{r}_1] & \overline{[\tilde{r}_2]} & \tilde{X} \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{r}_4] & \tilde{Y} \end{Bmatrix} \quad (5.138)$$

Правила слияния для  $X, Y$  и  $Z$  получены для более общего случая в следующем подразделе, где  $R_4 = [k_1 + r_2, r_2^{N-2}, k_2]$ . Для нашего случая следует положить  $k_1 = r_4, k_2 = r_2$  в таблице 4. Система может быть решена вручную из-за небольшого количества случаев. Решения:

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & \overline{[r_2]} \\ [r_3] & [r_4] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_4] & \overline{[r_3]} \\ [r_2] & [r_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_2] & \overline{[r_1]} \\ [r_4] & [r_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_3] & \overline{[r_4]} \\ [r_1] & [r_2] \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

Легко проверить, что указанные выше симметрии – это просто симметрии тетраэдра. То же самое и с бј-символами типа II.

### 5.11.2 $R_4$ – комбинация симметрического и сопряженного к симметрическому

В этом пункте мы рассмотрим еще один класс бј-символов, который отличается выражением для  $R_4$ . Ключевое этого вывода – показать, что гипотеза о собственных значениях может дать нам нетривиальные симметрии в более сложных ситуациях, чем симметрические представления. По этой причине мы обобщили предыдущий случай, заменив  $R_4 = [\alpha, \beta^{N-1}]$  на  $R_4 = [\alpha, \beta^{N-2}, \gamma]$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – некоторые неотрицательные целые числа.

Рассмотрим пару обобщенных бј-символов типа I, где  $r_1, r_2, r_3, k_1, k_2$  и  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  – целые числа, обозначающие длину строки в диаграмме Юнга. Заметим, что из правил слияния  $r_1 + r_3 = k_1 + k_2$  должно выполняться для

нетривиальных бj-символов.

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & \overline{[r_2]} \\ [r_3] & [k_1 + r_2, r_2^{N-2}, k_2] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [\tilde{r}_1] & \overline{[\tilde{r}_3]} \\ [\tilde{r}_3] & [\tilde{k}_1 + \tilde{r}_2, \tilde{r}_2^{N-2}, \tilde{k}_2] \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

**Лемма 10.** *Типы матриц Рака, полученные из правил слияния, описаны в таблице 4.*

type	$d$	$\delta_X$	$\delta_Y$	$\delta_Z$
1	$r_1$	$r_1 + r_2$	$2k_1 + r_2 - r_3$	$r_1 + r_3$
2	$r_3$	$2k_1 - r_1 + r_2$	$r_2 + r_3$	$r_1 + r_3$
3	$k_1$	$2k_1 - r_1 + r_2$	$2k_1 + r_2 - r_3$	$r_1 + r_3$
4	$k_2$	$r_1 + r_2$	$r_2 + r_3$	$r_1 + r_3$

Таблица 4 — Типы слияния в матрице Рака обобщенного типа I  $U_q(sl_N)$

*Доказательство.* Доказательство этой леммы такое же, как и в предыдущем разделе, поэтому оно опускается.  $\square$

Система решается вручную из-за небольшого количества случаев. Решения:

$$\begin{aligned} U \begin{bmatrix} [r_1] & \overline{[r_2]} \\ [r_3] & [k_1 + r_2, r_2^{N-2}, k_2] \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} [r_3] & \overline{[r_2 + k_1 - k_2]} \\ [r_1] & [k_1 + r_2, (r_2 + k_1 - k_2)^{N-2}, k_1] \end{bmatrix} = (5.141) \\ &= U \begin{bmatrix} [k_1] & \overline{[k_1 - r_1 + r_2]} \\ [k_2] & [k_1 + r_2, (k_1 - r_1 + r_2)^{N-2}, r_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [k_2] & \overline{[k_1 - r_3 + r_2]} \\ [k_1] & [k_1 + r_2, (k_1 - r_3 + r_2)^{N-2}, r_1] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Мы всегда можем использовать  $r_1 + r_3 = k_1 + k_2$ , чтобы выразить  $k_2$ :

$$U \begin{bmatrix} [r_1] & \overline{[r_2]} \\ [r_3] & [k_1 + r_2, r_2^{N-2}, r_1 + r_3 - k_1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_3] & \overline{[r_2 + 2k_1 - r_1 - r_3]} \\ [r_1] & [k_1 + r_2, (r_2 + 2k_1 - r_1 - r_3)^{N-2}, k_1] \end{bmatrix} = (5.142)$$

$$U \begin{bmatrix} [k_1] & \overline{[k_1 - r_1 + r_2]} \\ [r_1 + r_3 - k_1] & [k_1 + r_2, (k_1 - r_1 + r_2)^{N-2}, r_3] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [r_1 + r_3 - k_1] & \overline{[k_1 - r_3 + r_2]} \\ [k_1] & [k_1 + r_2, (k_1 - r_3 + r_2)^{N-2}, r_1] \end{bmatrix}$$

Как видим, появились новые соотношения для бj-символов типа I. Аналогичным образом можно получить соотношения для типа II.

## Заключение

В данной диссертационной работе были получены следующие результаты:

1. Разработан алгоритм (метод старшего веса) вычисления квантовых  $\mathfrak{b}_j$ -символов произвольных конечномерных представлений алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  для произвольного  $N$  и при общих значениях параметра квантовой деформации  $q$ . Алгоритм опирается на развитый автором подход с использованием пространств кратностей представлений и построением специальных ортонормированных базисов в этих пространствах. Применение алгоритма позволило впервые вычислить квантовые матрицы  $\mathfrak{b}_j$ -символов для ряда представительных примеров несимметрических представлений с кратностями.
2. Предложенный алгоритмический метод старшего веса использован для явного вычисления квантовых инвариантов узлов и зацеплений в частном, но представительном классе, для которого эти инварианты ранее не были известны (3-нитевые узлы и зацепления, раскрашенные несимметрическими представлениями алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  для любых  $N$ , отвечающими диаграммам Юнга с двумя крюками и не более чем шестью клетками). Результаты согласуются с несколькими известными, но остающимися недоказанными, гипотезами о квантовых инвариантах 3-нитевых узлов, раскрашенных несимметрическими представлениями: гипотеза факторизации, гипотеза универсальности, дифференциальное разложение и разложение эт Хофта.
3. Предложен метод, позволяющий установить наличие бесконечного числа симметрий  $\mathfrak{b}_j$ -символов для конечномерных представлений  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  при  $N \geq 3$ .
  - 3.1. Для представлений без кратностей показано, что найденные симметрии содержат нетривиальные обобщения конечной группы симметрий, известной для  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  (симметрии тетраэдра и Редже, продолжение которых на общий случай  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  ранее не ожидалось).
  - 3.2. Для представлений с кратностями выдвинута гипотеза о существовании симметрий  $\mathfrak{b}_j$ -символов, которые индуцируются двухпараметрическим семейством перестроек диаграмм Юнга,

определяющих представления  $U_q(sl_N)$ . Эти перестройки, названные тяни-крюк в соответствии с их диаграммной реализацией, порождают отображения между шестерками представлений, оставляющие  $\mathfrak{b}_j$ -символы инвариантными. Для семейства перестроек тяни-крюк найдены явные формулы.

4. Установлено, что квантовые  $\mathfrak{b}_j$ -символы для симметрических и сопряженных к ним  $U_q(sl_N)$ -представлений при произвольном  $N$  пропорциональны квантовым  $\mathfrak{b}_j$ -символам для представлений алгебры  $U_q(sl_2)$ , определяемых перестройками диаграмм Юнга, которые отвечают исходным  $U_q(sl_N)$ -представлениям. Коэффициенты пропорциональности, вообще говоря, нетривиальны и зависят от  $q$ , от  $N$  и от представлений; установлено, тем не менее, что указанные  $\mathfrak{b}_j$ -символы при произвольном  $N$  обладают тем же набором свойств, что и в случае  $N = 2$ . В частности, они являются ортогональными многочленами  $q$ -Рака и обладают асимптотикой Понцано-Редже, что открывает возможности приложения полученных в диссертации результатов к теории специальных функций и трехмерной квантовой гравитации.
5. Для обширного класса  $g$ -параметрических крендельных узлов найдена конструкция их квантовых инвариантов в виде сверток универсальных  $R$ -матриц, которые реализуют представление 2-нитевых узлов на косах специального вида (ширины 4). В сочетании с полученными в диссертации результатами для  $\mathfrak{b}_j$ -символов отсюда получены явные аналитические формулы квантовых инвариантов всех крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями алгебры  $U_q(sl_N)$ .
6. Показано, что симметрии  $\mathfrak{b}_j$ -символов тяни-крюк индуцируют класс симметрий квантовых инвариантов узлов и зацеплений, раскрашенных  $U_q(sl_N)$ -представлениями. Установлено происхождение этих симметрий в пертурбативном и непертурбативном построении вильсоновских средних в теориях Черна-Саймонса соответственно с калибровочной группой  $SU(N)$  и супергруппой  $SU(N + M|M)$ . Это дает прямое описание открытых нами новых симметрий квантовых инвариантов через известные симметрии в соответствующих теориях Черна-Саймонса, а также дополнительное свидетельство в поддержку сформулированной нами гипотезы о  $\mathfrak{b}_j$ -символах.

7. Построенные симметрии квантовых инвариантов типа тяни-крюк позволили установить взаимно однозначное соответствие между групповыми структурами квантовых инвариантов узлов в конкретной специализации и подмножеством дисперсионных соотношений для солитонных решений в интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили. С использованием методов теории интегрируемых систем отсюда получены явные аналитические выражения для всех групповых структур в теории Черна-Саймонса в специализации, отвечающей цветным полиномам Александра. Это, в частности, дает аналитическую зависимость групповых структур от представлений  $SU(N)$ , что существенно облегчает вычисления важных классов инвариантов узлов и зацеплений (инвариантов Васильева).

В данной работе разработаны различные эффективные подходы к вычислению вильсоновских средних в трехмерной теории Черна-Саймонса и полиномов узлов. Эти методы позволяют эффективным образом вычислять вильсоновские средние для различных представлений и калибровочных групп. Полученные с помощью разработанных методов результаты позволяют изучать свойства и зависимости таких вильсоновских средних от представлений и параметров теории. Особо можно выделить подход гиперкуба к вычислению полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Этот метод позволяет определить и вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ виртуальных узлов – обобщения обычных узлов на пространства сложной топологии.

В рамках диссертации рассмотрены применения полученных выражений к рассмотрению дифференциального разложения для полиномов ХОМФЛИ-ПТ, описывающего их групповые свойства. Также описано применение разработанных подходов для описания топологического квантового компьютера, основанного на применении  $\mathcal{R}$ -матриц в качестве универсальных операций-вентилей.

Результаты данной работы опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах [7; 8; 43; 48–50; 87; 117; 165; 202–206; 212; 219; 240; 259; 264; 292; 294].

## Благодарности

Я выражаю благодарность своим соавторам В.А.Алексееву, А.В.Андрееву, Ч.Баю, Л.В.Бишлер, Д.М.Галахову, П.И.Дунину-Барковскому, С.Дхаре, А.А.Жабину, М.Э.Казаряну, Е.С.Ланиной, Ц.Лянь, Д.Г.Мельникову, А.Д.Миронову, С.А.Миронову, В.В.Мишнякову, А.А.Морозову, А.Ю.Морозову, А.В.Пополитову, П.Рамадеви, В.К.Сингху, Ч.-Т. Чаню, Н.С.Целоусову, Ц.Цзяню, Г.Б.Шабату, С.В.Шадрину, Ш.Р.Шакирову, А.Штерну. Также я выражаю признательность за полезные обсуждения и замечания А.С.Анохиной, Г.А.Аминову, С.М.Апенко, С.Б.Артамонову, Э.Т.Ахмедову, Д.В.Васильеву, Е.А.Горскому, И.А.Даниленко, В.В.Долотину, Е.А.Зенкевичу, А.В.Зотову, В.В.Киселеву, Я.Кононову, И.М.Кричеверу, А.В.Малютину, А.В.Маршакову, С.Навате, Н.А.Немкову, М.А.Ольшанецкому, И.В.Полюбину, Ф.К.Попову, А.А.Рослomu, А.В.Смирнову, С.В.Соколову, П.Сулковскому, В.Г.Тураеву, Е.А.Фоминых, С.М.Харчеву и С.М.Хорошкину. Кроме того, я благодарен коллективу Лаборатории методов математической физики ИТЭФ им.А.И.Алиханова, коллективу Лаборатории методов математической физики и теории информации ИППИ РАН и коллективу Лаборатории математической и теоретической физики МФТИ за создание уникальной творческой и рабочей атмосферы, продуктивные обсуждения и замечательные семинары.

Я признателен Е.С.Сусловой за помощь и поддержку, оказанную в процессе подготовки этой работы.

Я выражаю свою глубочайшую благодарность своей семье за их неизменную поддержку во всех моих начинаниях.

## Список литературы

1. 3d analogs of Argyres-Douglas theories and knot homologies / H Fuji, S Gukov, M Stošić, P Sulkowski // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Vol. 2013, no. 1. — Pp. 1–38.
2. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste et al. // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1985. — Vol. 12. — Pp. 239–246.
3. ABC of instantons / A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, V.A. Novikov, M.A. Shifman // *Instantons in Gauge Theories*. — World Scientific, 1994. — Pp. 468–488.
4. *Adams C.C.* The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. — Providence: AMS, 2004. — 307 pp.
5. *Aganagic M., Vafa C.* Mirror symmetry, D-branes and counting holomorphic discs // *arXiv preprint hep-th/0012041*. — 2000.
6. *Akutsu Y., Deguchi T., Ohtsuki T.* Invariants of colored links // *J. Knot Theory Ramifications*. — 1992. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 161–184.
7. *Alekseev V., Morozov An., Sleptsov A.* Multiplicity-free  $U_q(sl_N)$  6-j symbols: Relations, asymptotics, symmetries // *Nuclear Physics B*. — 2020. — Vol. 960. — P. 115164.
8. *Alekseev V., Morozov An., Sleptsov A.* Interplay between symmetries of quantum 6j-symbols and the eigenvalue hypothesis // *Letters in Mathematical Physics*. — 2021. — Vol. 111, no. 2. — Pp. 1–29.
9. *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1928. — Vol. 30. — Pp. 275–306.
10. *Alisauskas S.* Biorthogonal coupling coefficients of  $U_q(n)$  // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1995. — Vol. 28, no. 4. — P. 985.
11. *Alisauskas S.* 6j-symbols for symmetric representations of  $SO(n)$  as the double series // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2002. — Vol. 35, no. 48. — P. 10229.

12. *Altschuler D., Freidel L.* On universal Vassiliev invariants // *Communications in mathematical physics.* — 1995. — Vol. 170, no. 1. — Pp. 41–62.
13. *Altschuler D., Freidel L.* Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders // *Communications in mathematical physics.* — 1997. — Vol. 187, no. 2. — Pp. 261–287.
14. *Alvarez M., Labastida J.M.F.* Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory // *Nuclear Physics B.* — 1993. — Vol. 395, no. 1-2. — Pp. 198–238.
15. *Alvarez M., Labastida JMF.* Numerical knot invariants of finite type from Chern-Simons perturbation theory // *Nuclear Physics B.* — 1995. — Vol. 433, no. 3. — Pp. 555–596.
16. *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Sierra G.* Quantum group interpretation of some conformal field theories // *Physics Letters B.* — 1989. — Vol. 220, no. 1-2. — Pp. 142–152.
17. *Alvarez-Gaume L., Gómez C., Sierra G.* Duality and quantum groups // *Nuclear Physics B.* — 1990. — Vol. 330, no. 2-3. — Pp. 347–398.
18. *Anokhina A., Morozov An.* Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials // *Teor. Mat. Fiz.* — 2014. — Vol. 178. — Pp. 3–68.
19. *Arnold P.* Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in sequential bremsstrahlung: From large- $N$  QCD to  $N = 3$  via the  $SU(N)$  analog of Wigner 6-j symbols // *Physical Review D.* — 2019. — Vol. 100, no. 3. — P. 034030.
20. *Aroca J. M., Fort H., Gambini R.* On the Path Integral Loop Representation of (2+1) Lattice Non-Abelian Theory // *Physical Review D.* — 1998. — Vol. 58. — P. 045007.
21. *Arthamonov SB, Mironov AD, Morozov A Yu.* Differential hierarchy and additional grading of knot polynomials // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2014. — Vol. 179, no. 2. — Pp. 509–542.
22. *Askey R., Wilson J.* A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6-j symbols // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* — 1979. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 1008–1016.

23. *Atiyah M.* Topological quantum field theories // *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques.* — 1988. — Vol. 68, no. 1. — Pp. 175–186.
24. *Atiyah M.F.* Topological quantum field theory // *Publications Mathématiques de l'IHES.* — 1988. — Vol. 68. — Pp. 175–186.
25. *Atiyah M.* The geometry and physics of knots. — Cambridge University Press, 1990.
26. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants // *Topology.* — 1995. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 423–472.
27. *Bar-Natan D.* Perturbative chern-simons theory // *Journal of Knot Theory and its Ramifications.* — 1995. — Vol. 4, no. 04. — Pp. 503–547.
28. *Bar-Natan D., Scott M., et al.* The Knot Atlas. <http://katlas.org>.
29. *Bars I., Morel B., Ruegg H.* Kac–Dynkin diagrams and supertableaux // *Journal of mathematical physics.* — 1983. — Vol. 24, no. 9. — Pp. 2253–2262.
30. *Belavin A.A., Knizhnik V.G.* Algebraic geometry and the geometry of quantum strings // *Physics Letters B.* — 1986. — Vol. 168, no. 3. — Pp. 201–206.
31. *Berele A., Regev A.* Hook Young diagrams, combinatorics and representations of Lie superalgebras // *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society.* — 1983. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 337–339.
32. *Berele A., Regev A.* Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras // *Advances in mathematics.* — 1987. — Vol. 64, no. 2. — Pp. 118–175.
33. *Birman J.S., Lin X.-S.* Knot polynomials and Vassiliev's invariants // *Inventiones mathematicae.* — 1993. — Vol. 111, no. 1. — Pp. 225–270.
34. *Blau M., Thompson G.* Chern-Simons theory on Seifert 3-manifolds // *Journal of High Energy Physics.* — 2013. — Vol. 2013, no. 9. — Pp. 1–26.
35. *Bonahon F., Siebenmann L.* New geometric splittings of classical knots, and the classification and symmetries of arborescent knots // *preprint.* — 2010. <http://dornsife.usc.edu/assets/sites/1191/docs/Preprints/BonSieb.pdf>.

36. *Borhade P., Ramadevi P.*  $SO(N)$  reformulated link invariants from topological strings // *Nuclear Physics B.* — 2005. — Vol. 727, no. 3. — Pp. 471–498.
37. *Borhade P., Ramadevi P., Sarkar T.*  $U(N)$  framed links, three-manifold invariants, and topological strings // *Nuclear Physics B.* — 2004. — Vol. 678, no. 3. — Pp. 656–681.
38. *Bouchard V., Florea B., Marino M.* Counting higher genus curves with crosscaps in Calabi-Yau orientifolds // *Journal of High Energy Physics.* — 2005. — Vol. 2004, no. 12. — P. 035.
39. *Brézin E., Gross D.J.* The external field problem in the large  $N$  limit of QCD // *Physics Letters B.* — 1980. — Vol. 97, no. 1. — Pp. 120–124.
40. *Butler P.H., Wybourne B.G.* Calculation of  $j$  and  $jm$  symbols for arbitrary compact groups. I. Methodology // *International Journal of Quantum Chemistry.* — 1976. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 581–598.
41. *Caudron A.* Classification des noeuds et des enlacements. — Université de Paris-Sud, Dép. de mathématique, 1982. — Vol. 81.
42. *Chang F.S., French J.B., Thio T.H.* Distribution methods for nuclear energies, level densities, and excitation strengths // *Annals of Physics.* — 1971. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 137–188.
43. Checks of integrality properties in topological strings / A Mironov, A Morozov, An Morozov et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2017. — Vol. 2017, no. 8. — Pp. 1–42.
44. *Chern S.-S., Simons J.* Characteristic forms and geometric invariants // *Annals of Mathematics.* — 1974. — Vol. 99. — Pp. 48–69.
45. *Chmutov S., Duzhin S.* The Kontsevich integral // *Acta Applicandae Mathematicae.* — 2001. — Vol. 66, no. 2. — Pp. 155–190.
46. *Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev Knot Invariants. — Cambridge: Cambridge University Press, 2012. — 520 pp.
47. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2015. — Vol. 2015, no. 7. — Pp. 1–70.

48. Colored knot polynomials for arbitrary pretzel knots and links / D Galakhov, D Melnikov, A Mironov et al. // *Physics Letters B*. — 2015. — Vol. 743. — Pp. 71–74.
49. Colored knot polynomials: HOMFLY in representation [2,1] / A Mironov, A Morozov, An Morozov, A Sleptsov // *International Journal of Modern Physics A*. — 2015. — Vol. 30, no. 26. — P. 1550169.
50. Coloured Alexander polynomials and KP hierarchy / A Mironov, S Mironov, V Mishnyakov et al. // *Physics Letters B*. — 2018. — Vol. 783. — Pp. 268–273.
51. *Conway J.H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // *Computational problems in abstract algebra* / Elsevier. — 1970. — Pp. 329–358.
52. *Cowan R.D.* The theory of atomic structure and spectra / Los Alamos Series in Basic and Applied Sciences. No. 3. — Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1981. — 650 pp.
53. *Cromwell P.R.* Knots and links. — Cambridge university press, 2004.
54. *Cvitanovic P.* Group theory. — Princeton University Press, 2008.
55.  $d$ -dimensional SYK, AdS Loops, and  $6j$  Symbols / J. Liu, E. Perlmutter, V. Rosenhaus, D. Simmons-Duffin // *JHEP*. — 2019. — Vol. 03. — P. 052.
56. *Derkachov S.E., Sarkissian G.A., Spiridonov V.P.* The elliptic hypergeometric function and  $6j$ -symbols for  $SL(2, \mathbb{C})$  group // *arXiv preprint arXiv:2111.06873*. — 2021.
57. *Derkachov S.E., Spiridonov V.P.* The  $6j$ -Symbols for the  $SL(2, \mathbb{C})$  Group // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2019. — Vol. 198, no. 1. — Pp. 29–47.
58. *Dijkgraaf R.H., Faber C., van der Geer G.B.M.* The moduli space of curves. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 129.
59. *Dimofte T., Gukov S.* Quantum field theory and the volume conjecture // *Contemp. Math*. — 2011. — Vol. 541. — P. 41.
60. Distinguishing mutant knots / L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev et al. // *Journal of Geometry and Physics*. — 2021. — Vol. 159. — P. 103928.

61. *Dolotin V, Morozov A.* Introduction to Non-Linear Algebra. — 2007.
62. *Donaldson S.* An application of gauge theory to four-dimensional topology // *Journal of Differential Geometry.* — 1983. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 279–315.
63. *Doyle P., Leibon G.* 23040 symmetries of hyperbolic tetrahedra // *arXiv preprint math/0309187.* — 2003.
64. *Dubrovin B.A., Natanzon S.M.* Real theta-function solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation // *Mathematics of the USSR-Izvestiya.* — 1989. — Vol. 32, no. 2. — P. 269.
65. *Duistermaat J.J., Heckman G.J.* On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space // *Inventiones Mathematicae.* — 1982. — Vol. 69, no. 2. — Pp. 259–268.
66. *Duistermaat J.J., Heckman G.J.* Addendum to "on the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space-// *Inventiones Mathematicae.* — 1983. — Vol. 72, no. 1. — Pp. 153–158.
67. *Dunfield N.M., Gukov S., Rasmussen J.* The superpolynomial for knot homologies // *Experimental Mathematics.* — 2006. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 129–159.
68. *Dunin-Barkowski P., Sleptsov A., Smirnov A.* Kontsevich integral for knots and vassiliev invariants // *International Journal of Modern Physics A.* — 2013. — Vol. 28, no. 17. — P. 13300251.
69. *Durst A.C., Yang-Mejia G., Bhatt R.N.* Quadrupolar interactions between acceptor pairs in p-doped semiconductors // *Physical Review B.* — 2020. — Vol. 101, no. 3. — P. 035202.
70. Eigenvalue hypothesis for multistrand braids / Saswati Dhara, A. Mironov, A. Morozov et al. // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D97, no. 12. — P. 126015.
71. Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov // *Int. J. Mod. Phys.* — 2013. — Vol. A28. — P. 1340009.

72. *Faddeev L.D., Korchemsky G.P.* High energy QCD as a completely integrable model // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 342, no. 1-4. — Pp. 311–322.
73. *Figueroa-O’Farrill J.M., Kimura T., Vaintrob A.* The Universal Vassiliev Invariant for the Lie Superalgebra // *Communications in mathematical physics*. — 1997. — Vol. 185, no. 1. — Pp. 93–127.
74. *Fiol B., Martínez-Montoya J., Fukelman A.R.* Wilson loops in terms of color invariants // *Journal of High Energy Physics*. — 2019. — Vol. 2019, no. 5. — Pp. 1–31.
75. *Floer A.* An instanton-invariant for 3-manifolds // *Communications in mathematical physics*. — 1988. — Vol. 118, no. 2. — Pp. 215–240.
76. *Freidel L., Krasnov K.* Discrete spacetime volume for three-dimensional BF theory and quantum gravity // *Classical and Quantum Gravity*. — 1999. — Vol. 16, no. 2. — P. 351.
77. *Freidel L., Louapre D.* Asymptotics of 6j and 10j symbols // *Classical and Quantum Gravity*. — 2003. — Vol. 20. — Pp. 1267–1294.
78. *Freidel L., Louapre D.* Ponzano–Regge model revisited: I. Gauge fixing, observables and interacting spinning particles // *Classical and Quantum Gravity*. — 2004. — Vol. 21, no. 24. — P. 5685.
79. *Frenkel I.B., Turaev V.G.* Elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions // *The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars* / Springer. — 1997. — Pp. 171–204.
80. From topological to quantum entanglement / D Melnikov, A Mironov, S Mironov et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2019. — Vol. 2019, no. 5. — Pp. 1–12.
81. *Fuji H, Gukov S, Sulkowski P.* Super-A-polynomial for knots and BPS states // *Nuclear Physics B*. — 2013. — Vol. 867, no. 2. — Pp. 506–546.
82. *Fulton W.* Young tableaux: with applications to representation theory and geometry. No. 35. — Cambridge University Press, 1997.
83. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course. — Springer, 1991.

84. *Galakhov D, Mironov A, Morozov A.* Wall-crossing invariants: from quantum mechanics to knots // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2015. — Vol. 120, no. 3. — Pp. 549–577.
85. *Garoufalidis S.* On the characteristic and deformation varieties of a knot // *Geom. Topol. Monogr.* — 2004. — Vol. 7. — Pp. 291–304.
86. *Gasper G., Rahman M.* Basic hypergeometric series. — Cambridge University Press, 1990.
87. Gaussian distribution of LMOV numbers / A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov // *Nuclear Physics B.* — 2017. — Vol. 924. — Pp. 1–32.
88. *Gawedzki K.* Classical origin of quantum group symmetries in Wess-Zumino-Witten conformal field theory // *Communications in mathematical physics.* — 1991. — Vol. 139, no. 1. — Pp. 201–213.
89. *Geer N.* The Kontsevich integral and quantized Lie superalgebras // *Algebraic & Geometric Topology.* — 2005. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 1111–1139.
90. *Gelca R.* On the relation between the A-polynomial and the Jones polynomial // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 2002. — Vol. 130, no. 4. — Pp. 1235–1241.
91. Generalized Kazakov-Migdal-Kontsevich model: group theory aspects / S Kharchev, A Marshakov, A Mironov, A Morozov // *International Journal of Modern Physics A.* — 1995. — Vol. 10, no. 14. — Pp. 2015–2051.
92. *Gomez C., Sierra G.* The quantum symmetry of rational conformal field theories // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Vol. 352, no. 3. — Pp. 791–828.
93. *Gopakumar R., Vafa C.* M-Theory and Topological Strings–II. — 1998.
94. *Gopakumar R., Vafa C.* On the Gauge Theory/Geometry Correspondence // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics.* — 1999. — Vol. 3. — Pp. 1415–1443.
95. *Gould M.D.* Quantum groups and diagonalization of the braid generator // *letters in mathematical physics.* — 1992. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 183–196.

96. *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite-type invariants of classical and virtual knots // *Topology*. — 2000. — Vol. 39, no. 5. — Pp. 1045–1068.
97. *Govindarajan T.R., Kaul R.K., Ramadevi P.* Three Dimensional Chern-Simons Theory as a Theory of Knots and Links III : Compact Semi-simple Group // *Nuclear Physics B*. — 1993. — Vol. 402. — Pp. 548–566.
98. *Groenevelt W.* Wilson function transforms related to Racah coefficients // *Acta Applicandae Mathematica*. — 2006. — Vol. 91, no. 2. — Pp. 133–191.
99. *Gromov M.* Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds // *Inventiones mathematicae*. — 1985. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 307–347.
100. *Gross D.J., Witten E.* Possible third-order phase transition in the large-N lattice gauge theory // *Physical Review D*. — 1980. — Vol. 21, no. 2. — P. 446.
101. Group-level duality of WZW fusion coefficients and Chern-Simons link observables / E.J. Mlawer, S.G. Naculich, H.A. Riggs, H.J. Schnitzer // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 352, no. 3. — Pp. 863–896.
102. *Gu J., Jockers H.* A Note on Colored HOMFLY Polynomials for Hyperbolic Knots from WZW Models // *Communications in Mathematical Physics*. — 2015. — Vol. 338, no. 1. — Pp. 393–456.
103. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Perturbative aspects of the Chern-Simons field theory // *Physics Letters B*. — 1989. — Vol. 227, no. 1. — Pp. 111–117.
104. *Guadagnini Enore, Martellini M, Mintchev M.* Chern-Simons field theory and quantum groups // *Quantum groups*. — Springer, 1990. — Pp. 307–317.
105. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Chern-Simons holonomies and the appearance of quantum groups // *Physics Letters B*. — 1990. — Vol. 235, no. 3-4. — Pp. 275–281.
106. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants // *Nuclear Physics B*. — 1990. — Vol. 330, no. 2-3. — Pp. 575–607.

107. *Gukov S., Stosic M.* Homological algebra of knots and BPS states // *Geometry & Topology Monographs.* — 2012. — Vol. 18. — Pp. 309–367.
108. *Gustafson R.A.* A Whipple’s Transformation for Hypergeometric Series in  $U(n)$  and Multivariable Hypergeometric Orthogonal Polynomials // *SIAM journal on mathematical analysis.* — 1987. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 495–530.
109. *Hamermesh M.* Group Theory and Its Application to Physical Problems. — Courier Corporation, 2012.
110. *Hansen S.K.* Reshetikhin–Turaev invariants of Seifert 3–manifolds and a rational surgery formula // *Algebraic & Geometric Topology.* — 2001. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 627–686.
111. *Hansen S.K., Takata T.* Reshetikhin–Turaev invariants of Seifert 3-manifolds for classical simple Lie algebras // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* — 2004. — Vol. 13, no. 05. — Pp. 617–668.
112. *Hara M., Yamamoto M.* On Jones polynomials of alternating pretzel knots // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* — 2012. — Vol. 21, no. 14. — P. 1250127.
113. *Hecht K.T.* A simple class of  $U(N)$  Racah coefficients and their application // *Communications in Mathematical Physics.* — 1975. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 135–156.
114. *Hikami K.* Hyperbolic structure arising from a knot invariant // *International Journal of Modern Physics A.* — 2001. — Vol. 16, no. 19. — Pp. 3309–3333.
115. *Hikami K.* Quantum invariant for torus link and modular forms // *Communications in mathematical physics.* — 2004. — Vol. 246, no. 2. — Pp. 403–426.
116. HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Vol. 2012, no. 7. — P. 131.
117. HOMFLY polynomials in representation  $[3,1]$  for 3-strand braids / A Mironov, A Morozov, An Morozov, A Sleptsov // *Journal of High Energy Physics.* — 2016. — Vol. 2016, no. 9. — Pp. 1–35.

118. *Hormeß M., Junker G.* More on coupling coefficients for the most degenerate representations of  $SO(n)$  // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1999. — Vol. 32, no. 23. — P. 4249.
119. *Hou B., Hou B., Ma Z.* Clebsch-Gordan Coefficients, Racah Coefficients and Braiding Fusion of Quantum  $sl(2)$  Enveloping Algebra (I) // *Communications in Theoretical Physics*. — 1990. — Vol. 13, no. 2. — P. 181.
120. Integrability of Hurwitz partition functions / A Alexandrov, A Mironov, A Morozov, S Natanzon // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2012. — Vol. 45, no. 4. — P. 045209.
121. *Ismagilov R.S.* On Racah operators // *Functional Analysis and Its Applications*. — 2006. — Vol. 40, no. 3. — Pp. 222–224.
122. *Ismagilov R.S.* Racah operators for principal series of representations of the group // *Sbornik: Mathematics*. — 2007. — Vol. 198, no. 3. — P. 369.
123. *Jahn H.A., Howell K.M., Mott N.F.* New (Regge) symmetry relations for the Wigner 6j-symbol // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* / Cambridge University Press. — Vol. 55. — 1959. — Pp. 338–340.
124. *Jimbo M.* A q-analogue of  $U(gl_{N+1})$ , Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation // *Letters in Mathematical Physics*. — 1986. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 247–252.
125. *Jimbo M., Miwa T.* Solitons and infinite dimensional Lie algebras // *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*. — 1983. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 943–1001.
126. *Jones V.F.R.* A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1985. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 103–111.
127. *Jones V.F.R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // *Annals of Mathematics*. — 1987. — Vol. 126, no. 2. — Pp. 335–388.
128. *Joyce D.* A classifying invariant of knots, the knot quandle // *Journal of Pure and Applied Algebra*. — 1982. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 37–65.

129. *Judd B.R., Lister G.M.S., Suskin M.A.* Some 6-j symbols for symplectic and orthogonal groups by Cerkaski's method // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1990. — Vol. 23, no. 24. — P. 5707.
130. *Judd B.R., Lo E., Velkov D.* Algebraic forms for the leading factor of the two-electron coefficients of fractional parentage for the atomic l shell // *Molecular Physics*. — 2000. — Vol. 98, no. 16. — Pp. 1151–1157.
131. *Kachurik II, Klimyk AU.* On Racah coefficients of the quantum algebra  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1990. — Vol. 23, no. 13. — P. 2717.
132. *Kameyama M., Nawata S.* Refined large N duality for knots // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 2020. — P. 2041001.
133. *Kashaev R.M.* A link invariant from quantum dilogarithm // *Modern Physics Letters A*. — 1995. — Vol. 10, no. 19. — Pp. 1409–1418.
134. *Kashaev R.M.* The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm // *Letters in mathematical physics*. — 1997. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 269–275.
135. *Kassel C, Rosso M, Turaev V.* Quantized enveloping algebras and knot invariants // *Panoramas et Synthèses*. — 1997. — no. 5.
136. *Katz S., Liu C.-C.M.* Enumerative geometry of stable maps with Lagrangian boundary conditions and multiple covers of the disc // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. — 2001. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 1–49.
137. *Kauffman L.H.* Witten's integral and the Kontsevich integral // *AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics*. — Vol. 453. — 1998. — Pp. 368–381.
138. *Kauffman L. H, Saleur H.* Free fermions and the Alexander-Conway polynomial // *Communications in mathematical physics*. — 1991. — Vol. 141, no. 2. — Pp. 293–327.
139. *Kaul R.K.* Chern-Simons theory, coloured-oriented braids and link invariants // *Communications in Mathematical Physics*. — 1994. — Vol. 162, no. 2. — Pp. 289–319.

140. *Kaul R.K.* Chern-Simons theory, knot invariants, vertex models and three-manifold invariants // *arXiv preprint hep-th/9804122*. — 1998.
141. *Kaul R.K., Govindarajan T.R.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links // *Nuclear Physics B*. — 1992. — Vol. 380, no. 1-2. — Pp. 293–333.
142. *Kawauchi A.* A survey on knot theory. — Springer Science & Business Media, 1996.
143. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix factorizations and link homology // *Fundamenta Mathematicae*. — 2008. — Vol. 199, no. 1. — Pp. 1–91.
144. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix factorizations and link homology II // *Geometry and Topology*. — 2008. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 1387–1425.
145. *Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu.* Representations of the algebra  $U_q(sl(2))$ ,  $q$ -orthogonal polynomials and invariants of links // *New Developments in the Theory of Knots. Advanced Series in Mathematical Physics*. — 1990. — Vol. 11. — Pp. 202–256.
146. *Kirk P.A., Klassen E.P.* Chern-Simons invariants of 3-manifolds and representation spaces of knot groups // *Mathematische Annalen*. — 1990. — Vol. 287, no. 1. — Pp. 343–367.
147. *Klimyk A., Schmudgen K.* Quantum groups and their representations. — Berlin Heidelberg: Springer, 2012. — 552 pp.
148. *Kneissler J.A.* The number of primitive Vassiliev invariants up to degree 12 // *arXiv preprint q-alg/9706022*. — 1997.
149. Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots / D Galakhov, D Melnikov, A Mironov, A Morozov // *Nuclear Physics B*. — 2015. — Vol. 899. — Pp. 194–228.
150. The Knotbook. <http://knotbook.org>.
151. The Knotbook. <http://knotbook.org.s3-website-us-west-2.amazonaws.com/knotbook/HOMFLY/colored.htm>.

152. The Knotbook. <http://knotbook.org.s3-website-us-west-2.amazonaws.com/knotbook/HOMFLY/kauffman.htm>.
153. The Knotbook. <http://knotbook.org.s3-website-us-west-2.amazonaws.com/knotbook/HOMFLY/universal.htm>.
154. *Koike K.* On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: by means of the universal characters // *Advances in Mathematics*. — 1989. — Vol. 74, no. 1. — Pp. 57–86.
155. *Kononov Ya., Morozov A.* Colored HOMFLY and generalized Mandelbrot set // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Vol. 2015, no. 11. — Pp. 1–22.
156. *Kononov Ya., Morozov A.* Factorization of colored knot polynomials at roots of unity // *Physics Letters B*. — 2015. — Vol. 747. — Pp. 500–510.
157. *Kononov Ya., Morozov A.* On the defect and stability of differential expansion // *JETP letters*. — 2015. — Vol. 101, no. 12. — Pp. 831–834.
158. *Kontsevich M.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // *Communications in Mathematical Physics*. — 1992. — Vol. 147, no. 1. — Pp. 1–23.
159. *Kontsevich M.* Vassiliev’s knot invariants // *Advances in Soviet Mathematics*. — 1993. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 137–150.
160. *Labastida J.M.F., Mariño M.* Polynomial invariants for torus knots and topological strings // *Communications in Mathematical Physics*. — 2001. — Vol. 217, no. 2. — Pp. 423–449.
161. *Labastida J.M.F., Mariño M., Vafa C.* Knots, links and branes at large N // *Journal of High Energy Physics*. — 2000. — Vol. 4, no. 11. — P. 007.
162. *Labastida J.M.F., Pérez E.* Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light-cone gauge // *Journal of Mathematical Physics*. — 1998. — Vol. 39, no. 10. — Pp. 5183–5198.
163. *Labastida J.M.F., Perez E.* Combinatorial formulas for Vassiliev invariants from Chern–Simons gauge theory // *Journal of Mathematical Physics*. — 2000. — Vol. 41, no. 5. — Pp. 2658–2699.

164. *Labastida Jose MF, Marino Marcos.* A new point of view in the theory of knot and link invariants // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* — 2002. — Vol. 11, no. 02. — Pp. 173–197.
165. *Lanina E., Sleptsov A., Tselousov N.* Chern-Simons perturbative series revisited // *Physics Letters B.* — 2021. — Vol. 823. — P. 136727.
166. *Lawrence R., Rozansky L.* Witten–Reshetikhin–Turaev Invariants of Seifert Manifolds // *Communications in mathematical physics.* — 1999. — Vol. 205, no. 2. — Pp. 287–314.
167. *Le T.T.Q., Tran A.T.* On the AJ conjecture for knots // *Indiana University Mathematics Journal.* — 2015. — Pp. 1103–1151.
168. *Li J., Song Y.S.* Open string instantons and relative stable morphisms // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics.* — 2001. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 67–91.
169. *Lieberum J.* The Drinfeld associator of  $gl(1|1)$  // *Quantum groups.* — 2008. — Vol. 12. — Pp. 39–80.
170. *Lienert C.R., Butler P.H.* Racah-Wigner algebra for q-deformed algebras // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1992. — Vol. 25, no. 5. — P. 1223.
171. Link polynomial calculus and the AENV conjecture / S Arthamonov, A Mironov, A Morozov, An Morozov // *Journal of High Energy Physics.* — 2014. — Vol. 2014, no. 4. — Pp. 1–28.
172. *Lipatov L.N.* High energy asymptotics of multi-colour QCD and two-dimensional conformal field theories // *Physics Letters B.* — 1993. — Vol. 309, no. 3-4. — Pp. 394–396.
173. *Lipatov L.N.* Asymptotic behavior of multicolor QCD at high energies in connection with exactly solvable spin models // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters.* — 1994. — Vol. 59. — P. 596.
174. *Littlewood D.E.* The theory of group characters and matrix representations of groups. — American Mathematical Soc., 1977. — Vol. 357.

175. *Liu K., Peng P.* Proof of the Labastida-Marino-Ooguri-Vafa conjecture // *Journal of Differential Geometry*. — 2010. — Vol. 85, no. 3. — Pp. 479–525.
176. *Liu K., Peng P.* New structures of knot invariants // *Communications in Number Theory and Physics*. — 2011. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 601–615.
177. *Livine E.R.* 3d Quantum Gravity: Coarse-Graining and q-Deformation // *Ann. Henri Poincare*. — 2017. — Vol. 18. — Pp. 1465–1491.
178. *Manturov V.O.* Knot theory. — CRC press, 2018.
179. *Mariño M., Vafa C.* Framed knots at large N // *Contemporary Mathematics*. — 2002. — Vol. 310. — Pp. 185–204.
180. *Marino M.* Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three-manifold invariants // *Communications in Mathematical Physics*. — 2005. — Vol. 253, no. 1. — Pp. 25–49.
181. *Mariño M.* String theory and the Kauffman polynomial // *Communications in Mathematical Physics*. — 2010. — Vol. 298, no. 3. — Pp. 613–643.
182. *Matveev S.V.* Distributivnye gruppoidy v teorii uzlov // *Mat. Sbornik*. — 1982. — Vol. 119, no. 1. — Pp. 78–88.
183. *Matveev S.V.* Distributive groupoids in knot theory // *Mathematics of the USSR-Sbornik*. — 1984. — Vol. 47, no. 1. — P. 73.
184. *Mikhaylov V.* Aspects of supergroup Chern-Simons theories: Ph.D. thesis / Princeton University. — 2015.
185. *Mikhaylov V., Witten E.* Branes and supergroups // *Communications in Mathematical Physics*. — 2015. — Vol. 340, no. 2. — Pp. 699–832.
186. *Mironov A., Mkrtchyan R., Morozov A.* On universal knot polynomials // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Vol. 2016, no. 2. — P. 078.
187. *Mironov A, Morozov A.* Equations on knot polynomials and 3d/5d duality // *AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics*. — Vol. 1483. — 2012. — Pp. 189–211.

188. *Mironov A., Morozov A.* Towards effective topological field theory for knots // *Nuclear Physics B.* — 2015. — Vol. 899. — Pp. 395–413.
189. *Mironov A., Morozov A.* Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots // *Physics Letters B.* — 2016. — Vol. 755. — Pp. 47–57.
190. *Mironov A., Morozov A.* Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots // *Phys. Lett.* — 2016. — Vol. B755. — Pp. 47–57.
191. *Mironov A., Morozov A.* On determinant representation and integrability of Nekrasov functions // *Physics Letters B.* — 2017. — Vol. 773. — Pp. 34–46.
192. *Mironov A., Morozov A.* Eigenvalue conjecture and colored Alexander polynomials // *Eur. Phys. J.* — 2018. — Vol. C78, no. 4. — P. 284.
193. *Mironov A, Morozov A et al.* Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — Pp. 1–34.
194. *Mironov A., Morozov A., Morozov An.* Character expansion for HOMFLY polynomials I: Integrability and difference equations // *Strings, gauge fields, and the geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer.* — World Scientific, 2013. — Pp. 101–118.
195. *Mironov A., Morozov A., Morozov And.* Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials // *AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics.* — Vol. 1562. — 2013. — Pp. 123–155.
196. *Mironov A., Morozov A., Morozov An.* On colored HOMFLY polynomials for twist knots // *Modern Physics Letters A.* — 2014. — Vol. 29, no. 34. — P. 1450183.
197. *Mironov A, Morozov A, Morozov An.* Tangle blocks in the theory of link invariants // *Journal of High Energy Physics.* — 2018. — Vol. 2018, no. 9. — Pp. 1–45.
198. *Mironov A., Morozov A., Natanzon S.* Complete set of cut-and-join operators in the Hurwitz-Kontsevich theory // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2011. — Vol. 166, no. 1. — Pp. 1–22.

199. *Mironov A, Morozov A, Natanzon S.* Algebra of differential operators associated with Young diagrams // *Journal of Geometry and Physics.* — 2012. — Vol. 62, no. 2. — Pp. 148–155.
200. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On genus expansion of knot polynomials and hidden structure of Hurwitz tau-functions // *The European Physical Journal C.* — 2013. — Vol. 73, no. 7. — Pp. 1–7.
201. *Mironov A, Morozov A, Sleptsov A.* On genus expansion of knot polynomials and hidden structure of Hurwitz tau-functions // *The European Physical Journal C.* — 2013. — Vol. 73, no. 7. — Pp. 1–7.
202. *Mironov A, Morozov A, Sleptsov A.* Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links // *Journal of High Energy Physics.* — 2015. — Vol. 2015, no. 7. — Pp. 1–35.
203. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On 6j-symbols for symmetric representations of  $U_q(su_N)$  // *JETP Letters.* — 2017. — Vol. 106, no. 10. — Pp. 630–636.
204. *Mishnyakov V, Sleptsov A.* Perturbative analysis of the colored Alexander polynomial and KP soliton  $\tau$ -functions // *Nuclear Physics B.* — 2021. — Vol. 965. — P. 115334.
205. *Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N.* A new symmetry of the colored Alexander polynomial // *Annales Henri Poincaré / Springer.* — Vol. 22. — 2021. — Pp. 1235–1265.
206. *Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N.* A Novel Symmetry of Colored HOMFLY Polynomials Coming from  $\mathfrak{sl}(N|M)$  Superalgebras // *Communications in Mathematical Physics.* — 2021. — Vol. 384, no. 2. — Pp. 955–969.
207. *Miwa T., Jimbo M., Date E.* Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras. — Cambridge university press, 2000. — Vol. 135.
208. *Moore G., Reshetikhin N.* A comment on quantum group symmetry in conformal field theory // *Nuclear Physics B.* — 1989. — Vol. 328, no. 3. — Pp. 557–574.
209. *Moore G., Seiberg N.* Classical and quantum conformal field theory // *Communications in Mathematical Physics.* — 1989. — Vol. 123, no. 2. — Pp. 177–254.

210. *Morozov A.* Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Vol. 2016, no. 9. — Pp. 1–31.
211. *Morozov A.* Factorization of differential expansion for non-rectangular representations // *Modern Physics Letters A*. — 2018. — Vol. 33, no. 12. — P. 1850062.
212. *Morozov An., Sleptsov A.* New Symmetries for the  $U_q(sl_N)$  6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture // *JETP Letters*. — 2018. — Vol. 108, no. 10. — Pp. 697–704.
213. *Morozov A., Smirnov A.* Chern-Simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix // *Nuclear Physics B*. — 2010. — Vol. 835, no. 3. — Pp. 284–313.
214. *Morton H.R.* Integrality of Homfly 1–tangle invariants // *Algebraic & Geometric Topology*. — 2007. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 327–338.
215. *Morton H.R.* Mutant knots with symmetry // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 2009. — Vol. 146, no. 1. — Pp. 95–107.
216. *Morton H.R., Cromwell P.R.* Distinguishing mutants by knot polynomials // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. — 1996. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 225–238.
217. *Morton H., Ryder H.* Mutants and  $SU(3)$  q invariants // *Geometry and Topology Monographs*. — 1998. — Vol. 1. — Pp. 365–381.
218. *Morton H., Ryder H.* Relations between Kauffman and Homfly satellite invariants // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society / Cambridge University Press*. — Vol. 149. — 2010. — Pp. 105–114.
219. Multi-colored links from 3-strand braids carrying arbitrary symmetric representations / S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov et al. // *Annales Henri Poincaré / Springer*. — Vol. 20. — 2019. — Pp. 4033–4054.
220. *Murakami J.* Colored Alexander invariants and cone-manifolds // *Osaka Journal of Mathematics*. — 2008. — Vol. 45, no. 2. — Pp. 541–564.

221. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // *Communications in Analysis and Geometry*. — 2005. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 379–400.
222. *Naculich S.G., Riggs H.A., Schnitzer H.J.* Group-level duality in WZW models and Chern-Simons theory // *Physics Letters B*. — 1990. — Vol. 246, no. 3-4. — Pp. 417–422.
223. *Naculich S.G., Schnitzer H.J.* Duality between  $SU(N)_k$  and  $SU(k)_N$  WZW models // *Nuclear Physics B*. — 1990. — Vol. 347, no. 3. — Pp. 687–742.
224. *Nawata S., Ramadevi P., Singh V.K.* Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 2017. — Vol. 26, no. 14. — P. 1750096.
225. *Nawata S., Ramadevi P., Singh V.K.* Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. — 2017. — Vol. 26, no. 14. — P. 1750096.
226. *Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia.* Colored homfly polynomials from chern-simons theory // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. — 2013. — Vol. 22, no. 13. — P. 1350078.
227. *Nawata Satoshi, Ramadevi P., Zodinmawia.* Multiplicity-free quantum 6j-symbols for  $U_q(sl_N)$  // *Lett. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 103. — Pp. 1389–1398.
228. *Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia.* Colored Kauffman homology and super-A-polynomials // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Vol. 2014, no. 1. — Pp. 1–70.
229. *Nimmo J.J.C.* Wronskian determinants, the KP hierarchy and supersymmetric polynomials // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1989. — Vol. 22, no. 16. — P. 3213.
230. *Nomura M.* A Jordan-Schwinger representation of quadratic relations for  $SU_q(2)$  operators and of the q-analog Wigner-Eckart theorem // *Journal of the Physical Society of Japan*. — 1990. — Vol. 59, no. 7. — Pp. 2345–2354.
231. *Novikov S.P.* Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory // *Soviet Math. Dokl / Citeseer*. — Vol. 24. — 1981. — Pp. 222–226.

232. *Novikov S.P.* The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory // *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* — 1982. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 3–49.
233. *O’Loughlin M.* Boundary actions in Ponzano–Regge discretization, quantum groups and  $AdS_3$  // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics.* — 2002. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 795–826.
234. *Okounkov A.* Toda equations for Hurwitz numbers // *Mathematical Research Letters.* — 2000. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 447–453.
235. *Okounkov A., Pandharipande R.* Gromov–Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles // *Annals of mathematics.* — 2006. — Pp. 517–560.
236. On Knots, Complements, and 6  $j$ -Symbols / H.E. Wang, Y.J. Yang, H.D. Zhang, S. Nawata // *Annales Henri Poincaré* / Springer. — 2021. — Pp. 1–30.
237. On the block structure of the quantum  $\mathcal{R}$ -matrix in the three-strand braids / L. Bishler, An. Morozov, A. Sleptsov, Sh. Shakirov // *Int. J. Mod. Phys.* — 2018. — Vol. A33, no. 17. — P. 1850105.
238. *Ooguri H., Vafa C.* Knot invariants and topological strings // *Nuclear Physics B.* — 2000. — Vol. 577, no. 3. — Pp. 419–438.
239. *Orlov A.Yu., Scherbin D.M.* Multivariate hypergeometric functions as  $\tau$ -functions of Toda lattice and Kadomtsev–Petviashvili equation // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2001. — Vol. 152. — Pp. 51–65.
240. Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics / C.-T. Chan, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov // *Reviews in Mathematical Physics.* — 2018. — Vol. 30, no. 06. — P. 1840005.
241. *Pan F.* Racah coefficients of quantum group  $U_q(n)$  // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1993. — Vol. 26, no. 18. — P. 4621.
242. *Paul C., Borhade P., Ramadevi P.* Composite representation invariants and unoriented topological string amplitudes // *Nuclear Physics B.* — 2010. — Vol. 841, no. 3. — Pp. 448–462.

243. *Pawelkiewicz M., Schomerus V., Suchanek P.* The universal Racah-Wigner symbol for  $U_q(\mathfrak{osp}(1|2))$  // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Vol. 2014, no. 4. — Pp. 1–26.
244. *Peskin M.* An introduction to quantum field theory. — CRC press, 2018.
245. *Pestun V.* Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops // *Communications in Mathematical Physics*. — 2012. — Vol. 313, no. 1. — Pp. 71–129.
246. *Pestun V., Zabzine M.* Introduction to localization in quantum field theory // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2017. — Vol. 50, no. 44. — P. 443001.
247. Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds / D. Cooper, M. Culler, H. Gillet et al. // *Inventiones mathematicae*. — 1994. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 47–84.
248. *Polyak M., Viro O.* Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // *International Mathematics Research Notices*. — 1994. — Vol. 1994, no. 11. — Pp. 445–453.
249. *Polyakov A.M.* Quark confinement and topology of gauge theories // *Nuclear Physics B*. — 1977. — Vol. 120, no. 3. — Pp. 429–458.
250. *Polyakov A.M.* Quantum geometry of bosonic strings // *Physics Letters B*. — 1981. — Vol. 103, no. 3. — Pp. 207–210.
251. *Polyakov A.M.* Gauge fields and strings. — Taylor & Francis, 1987.
252. *Polyakov A.M.* Fermi-Bose transmutations induced by gauge fields // *Modern Physics Letters A*. — 1988. — Vol. 3, no. 03. — Pp. 325–328.
253. *Ponsot B., Tschner J.* Clebsch–Gordan and Racah–Wigner Coefficients for a Continuous Series of Representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$  // *Communications in Mathematical Physics*. — 2001. — Vol. 224, no. 3. — Pp. 613–655.
254. *Ponzano G., Regge T.E.* Semiclassical limit of Racah coefficients // Spectroscopic and group theoretical methods in physics: Racah memorial volume. — Amsterdam: North-Holland, 1968. — Pp. 1–58.

255. *Prasolov V.V.* Elements of homology theory / Graduate Studies in Mathematics. — American Mathematical Soc., 2007. — Vol. 81.
256. Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions / A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Smirnov // *Nuclear Physics B*. — 2012. — Vol. 855, no. 1. — Pp. 128–151.
257. *Przytycki J.H., Traczyk P.* Invariants of links of Conway type // *J. Knot Theor.* — 1987. — Vol. 4. — Pp. 115–139.
258. Quantum field theory and link invariants / P. Cotta-Ramusino, E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev // *Nuclear Physics B*. — 1990. — Vol. 330, no. 2-3. — Pp. 557–574.
259. Quantum Racah matrices and 3-strand braids in irreps  $R$  with  $|R| = 4$  / A Mironov, A Morozov, An Morozov, A Sleptsov // *JETP letters*. — 2016. — Vol. 104, no. 1. — Pp. 56–61.
260. Quantum Racah matrices up to level 3 and multicolored link invariants / C Bai, J Jiang, J Liang et al. // *Journal of Geometry and Physics*. — 2018. — Vol. 132. — Pp. 155–180.
261. Quantum toroidal  $gl_1$ -algebra: plane partitions / B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin // *Kyoto Journal of Mathematics*. — 2012. — Vol. 52, no. 3. — Pp. 621–659.
262. *Queffelec H., Sartori A.* A note on  $gl(m|n)$  link invariants and the HOMFLY-PT polynomial // *Knots, Low-Dimensional Topology and Applications*. — 2019. — Vol. 284. — Pp. 277–286.
263. *Racah G.* Theory of complex spectra. II // *Physical Review*. — 1942. — Vol. 62, no. 9-10. — Pp. 438–462.
264. Racah matrices and hidden integrability in evolution of knots / A Mironov, A Morozov, An Morozov, A Sleptsov // *Physics Letters B*. — 2016. — Vol. 760. — Pp. 45–58.
265. *Rajeswari V., Rao K. S.* Generalized basic hypergeometric functions and the  $q$ -analogues of 3- $j$  and 6- $j$  coefficients // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1991. — Vol. 24, no. 16. — P. 3761.

266. *Rama Devi P., Govindarajan T.R., Kaul R.K.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links (III). Compact semi-simple group // *Nuclear Physics B.* — 1993. — Vol. 402, no. 1-2. — Pp. 548–566.
267. *Ramadevi P., Govindarajan T.R., Kaul R.K.* Knot invariants from rational conformal field theories // *Nuclear Physics B.* — 1994. — Vol. 422, no. 1-2. — Pp. 291–306.
268. *Ramadevi P., Sarkar T.* On link invariants and topological string amplitudes // *Nuclear Physics B.* — 2001. — Vol. 600, no. 3. — Pp. 487–511.
269. *Ramadevi P., Zodinmawia.* Reformulated invariants for non-torus knots and links. — 2012.
270. *Ramadevi P., Zodinmawia.*  $SU(N)$  quantum Racah coefficients and non-torus links // *Nuclear Physics B.* — 2013. — Vol. 870, no. 1. — Pp. 205–242.
271. *Rebbi C., Slansky R.* Crossing Matrices for  $SU(2)$  and  $SU(3)$  // *Reviews of Modern Physics.* — 1970. — Vol. 42, no. 1. — P. 68.
272. *Regge T.* Symmetry properties of Racah's coefficients // *Nuovo Cim.* — 1959. — Vol. 11. — Pp. 116–117.
273. *Reshetikhin N.Yu.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II // *LOMI-preprint.* — 1988. — Vol. E4/87,E17/87.
274. *Reshetikhin N.Yu.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II // *LOMI-preprint.* — 1988. — Vol. E-4-87, E-17-87.
275. *Reshetikhin N., Stroppel C., Webster B.* Schur–Weyl-Type Duality for Quantized  $gl(1|1)$ , the Burau Representation of Braid Groups, and Invariants of Tangled Graphs // *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology.* — Springer, 2012. — Pp. 389–401.
276. *Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G.* Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // *Communications in Mathematical Physics.* — 1990. — Vol. 127, no. 1. — Pp. 1 – 26.

277. *Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // *Inventiones mathematicae*. — 1991. — Vol. 103, no. 1. — Pp. 547–597.
278. *Robert L.-H., Wagner E.* A quantum categorification of the Alexander polynomial // *Geometry and Topology*. — 2021.
279. *Roberts J.* Classical 6j-symbols and the tetrahedron // *Geom. Topol.* — 1999. — Vol. 3. — Pp. 21–66.
280. *Rosengren H.* An elementary approach to 6j-symbols (classical, quantum, rational, trigonometric, and elliptic) // *Ramanujan J.* — 2007. — Vol. 13. — Pp. 133–168.
281. *Rosso M., Jones V.* On the invariants of torus knots derived from quantum groups // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 1993. — Vol. 02, no. 01. — Pp. 97–112.
282. *Rozansky L., Saleur H.* Quantum field theory for the multi-variable Alexander-Conway polynomial // *Nuclear Physics B*. — 1992. — Vol. 376, no. 3. — Pp. 461–509.
283. *Rozansky L., Saleur H.* Reidemeister torsion, the Alexander polynomial and U(1, 1) Chern-Simons theory // *Journal of Geometry and Physics*. — 1994. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 105–123.
284. *Rudolph L.* A congruence between link polynomials // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* / Cambridge University Press. — Vol. 107. — 1990. — Pp. 319–327.
285. *Rusakov B.Ye.* Loop averages and partition functions in  $U(N)$  gauge theory on two-dimensional manifolds // *Modern Physics Letters A*. — 1990. — Vol. 5, no. 09. — Pp. 693–703.
286. *Saad P., Shenker S.H., Stanford D.* JT gravity as a matrix integral // *arXiv preprint arXiv:1903.11115*. — 2019.
287. *Scheunert M.* Eigenvalues of Casimir operators for the general linear, the special linear, and the orthosymplectic Lie superalgebras // *Journal of mathematical physics*. — 1983. — Vol. 24, no. 11. — Pp. 2681–2688.

288. *Schwarz A.S.* The partition function of a degenerate functional // *Communications in Mathematical Physics*. — 1979. — Vol. 67, no. 1. — Pp. 1–16.
289. *Schwarz A.S.* New topological invariants arising in the theory of quantized fields // *Baku Topol. Conf.* — 1987.
290. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // *Physical Review*. — 1951. — Vol. 82, no. 5. — P. 664.
291. *Schwinger J.* On Angular Momentum: U.S. Atomic Energy Commission Rpt. NYO3071, 1952 // *Quantum Theory of Angular Momentum: A Collection of Reprints and Original Papers*. — N.Y.: Academic Press, 1965. — P. 332.
292. *Shakirov Sh., Sleptsov A.* Quantum Racah matrices and 3-strand braids in representation [3,3] // *Journal of Geometry and Physics*. — 2021. — Vol. 166. — P. 104273.
293. *Sinha S., Vafa C.* *SO* and *Sp* Chern-Simons at large N // *arXiv preprint hep-th/0012136*. — 2000.
294. *Sleptsov A.* Vassiliev invariants for pretzel knots // *International Journal of Modern Physics A*. — 2016. — Vol. 31, no. 27. — P. 1650156.
295. *Smirnov Andrey.* Notes on Chern-Simons theory in the temporal gauge // *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*. — World Scientific, 2012. — Pp. 489–498.
296. *Smirnov Yu.F., Tolstoj V.N., Kharitonov Yu.I.* Projection operator method and q analog of angular momentum quantum theory. Racah coefficients, 3j-, 6j-symbols and their symmetry properties. Metod proektsionnykh operatorov i q-analog kvantovoj teorii uglovogo momenta. Koehffitsienty Raka, 3j-, 6j-simvoly i ikh svojstva simmetrii // *Yadernaya Fizika;(USSR)*. — 1991. — Vol. 53, no. 6.
297. *Spiridonov V.P.* Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions // *Russian Mathematical Surveys*. — 2008. — Vol. 63, no. 3. — P. 405.
298. Statistical mechanics of anyons / D.P. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek, A. Zee // *Nuclear Physics B*. — 1985. — Vol. 251. — Pp. 117–126.

299. *Stembridge J.R.* A characterization of supersymmetric polynomials // *Journal of algebra*. — 1985. — Vol. 95, no. 2. — Pp. 439–444.
300. *Stevan S.* Chern–Simons invariants of torus links // *Annales Henri Poincaré / Springer*. — Vol. 11. — 2010. — Pp. 1201–1224.
301. Super-A-polynomials for twist knots / S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, X. Sun // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Vol. 2012, no. 11. — P. 157.
302. Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Vol. 2013, no. 3. — P. 21.
303. Symmetries evaluation. — [https://github.com/Victor5597/Hypergeometric\\_symmetries](https://github.com/Victor5597/Hypergeometric_symmetries). — Accessed: 15.10.2019.
304. Tabulating knot polynomials for arborescent knots / A. Mironov, A. Morozov, P. Ramadevi et al. // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2017. — Vol. 50, no. 8. — P. 085201.
305. *Teschner J., Vartanov G.* 6j symbols for the modular double, quantum hyperbolic geometry, and supersymmetric gauge theories // *Lett. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 104. — Pp. 527–551.
306. Topological BF theories in 3 and 4 dimensions / A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, J. Fröhlich, M. Martellini // *Journal of Mathematical Physics*. — 1995. — Vol. 36, no. 11. — Pp. 6137–6160.
307. Towards topological quantum computer / D. Melnikov, A. Mironov, S. Mironov et al. // *Nuclear Physics B*. — 2018. — Vol. 926. — Pp. 491–508.
308. *Turaev V.G.* The Yang-Baxter equation and invariants of links // *Inventiones Mathematicae*. — 1988. — Vol. 92, no. 3. — Pp. 527–553.
309. *Turaev V.G.* Quantum invariants of knots and 3-manifolds // *de Gruyter Studies in Mathematics*. — 1994. — Vol. 18.
310. *Turaev V.G., Viro O.Ya.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // *Topology*. — 1992. — Vol. 31. — P. 865–902.

311. Two-orbital  $SU(N)$  magnetism with ultracold alkaline-earth atoms / A. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie et al. // *Nature physics*. — 2010. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 289–295.
312. Unification of all string models with  $c < 1$  / S Kharchev, A Marshakov, A Mironov et al. // *Physics Letters B*. — 1992. — Vol. 275, no. 3-4. — Pp. 311–314.
313. *v. Neumann J.* Zur algebra der funktionaloperationen und theorie der normalen operatoren // *Mathematische Annalen*. — 1930. — Vol. 102, no. 1. — Pp. 370–427.
314. *Van Ritbergen T, Schellekens AN, Vermaseren JAM.* Group theory factors for Feynman diagrams // *International Journal of Modern Physics A*. — 1999. — Vol. 14, no. 01. — Pp. 41–96.
315. *Vassiliev V.A.* Cohomology of knot spaces // *Theory of Singularities and Its Applications*. — 1990. — Vol. 1. — Pp. 23–69.
316. *Viro Oleg.* Quantum relatives of the Alexander polynomial // *St. Petersburg Mathematical Journal*. — 2007. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 391–457.
317. *Vogel P.* The universal Lie algebra. — preprint. <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.vogel/grenoble-99b.pdf>.
318. *Weinberg S.* The quantum theory of fields: Foundations. — World Books Publishing Corporation, 2004.
319. *Wess J., Zumino B.* Consequences of anomalous Ward identities // *Physics Letters B*. — 1971. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 95–97.
320. *Wigner E.P.* On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of SR groups: manuscript 1940 // *Quantum Theory of Angular Momentum: A Collection of Reprints and Original Papers*. — N.Y.: Academic Press, 1965. — P. 332.
321. *Witten E.* Global aspects of current algebra // *Nuclear Physics B*. — 1983. — Vol. 223, no. 2. — Pp. 422–432.

322. *Witten E.* Non-abelian bosonization in two dimensions // *Communications in Mathematical Physics.* — 1984. — Vol. 92, no. 4. — Pp. 455–472.
323. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // *Communications in Mathematical Physics.* — 1989. — Vol. 121, no. 3. — Pp. 351–399.
324. *Witten E.* Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // *Surveys in differential geometry.* — 1990. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 243–310.
325. *Witten E.* Khovanov homology and gauge theory // *Geom. Topol. Monogr.* — 2012. — Vol. 18. — Pp. 291–308.
326. *Wong M.K.F.* On the multiplicity-free Wigner and Racah coefficients of  $U(n)$  // *Journal of Mathematical Physics.* — 1979. — Vol. 20, no. 12. — Pp. 2391–2397.
327. *Zhelobenko D.P.* Compact Lie groups and their representations. — American Mathematical Soc., 1973. — Vol. 40.
328. *Zhu Sh.* Colored HOMFLY polynomials via skein theory // *Journal of High Energy Physics.* — 2013. — Vol. 2013, no. 10. — Pp. 1–24.
329. *Zuckerman G.J.* Action principles and global geometry // *Mathematical aspects of string theory.* — World Scientific, 1987. — Pp. 259–284.
330. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Пятаевский Л.П.* Теоретическая физика. Том IV. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989. — Vol. 728.
331. *Решетихин Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок // *Алгебра и анализ.* — 1989. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 169–188.
332. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. — М.: Наука, 1976. — 768 с. — Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория.

## Приложение А

### Элементы теории узлов

Здесь мы изложим в довольно сжатой и простой форме все сведения из теории узлов, которые необходимы для понимания диссертации. Теория узлов – это область маломерной топологии. Топология изучает свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при непрерывных деформациях. *Узел* – это вложение окружности в трехмерное евклидово пространство  $\mathcal{K} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ . Другими словами, узел – это замкнутая кривая без самопересечений в трехмерном пространстве; конкретные примеры узлов см. на рис. А.1. Обычно в качестве

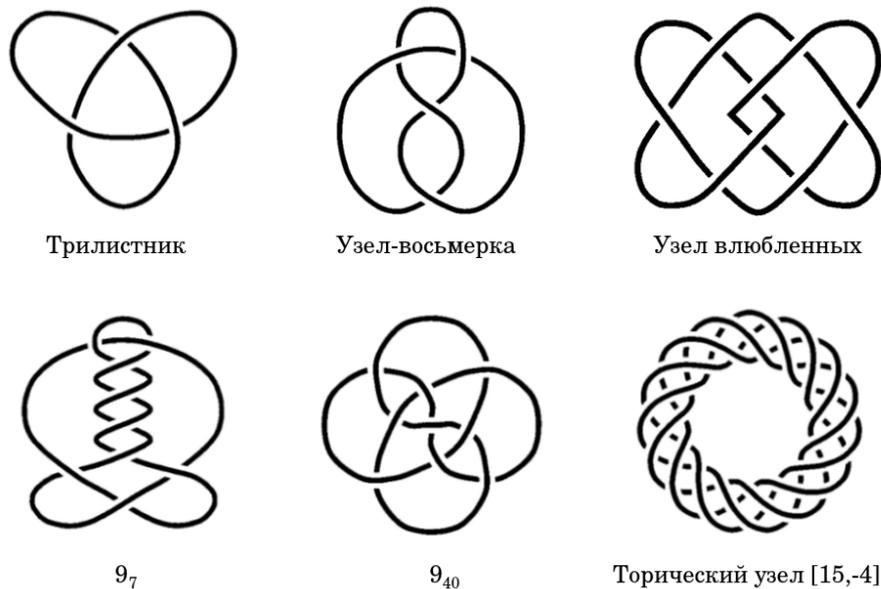


Рисунок А.1 — Примеры узлов

объемлющего трехмерного пространства берется  $\mathbb{R}^3$ . Мы не делаем различия между узлом и какими-либо непрерывными деформациями этого узла, которые могут быть выполнены без самопересечений. Все эти деформированные кривые считаются одним и тем же узлом. Можно представлять себе узел, как будто он сделан из легко деформируемой резины, которую нельзя разрезать и склеивать. Такие деформации называются *объемлющими изотопиями*, которые представляют собой особый тип гомотопии. *Гомотопия* пространства  $X \subset \mathbb{E}^3$  – это непрерывное отображение  $h : X \times [0,1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ . Если  $h_t$  взаимно однозначно для всех  $t \in [0,1]$ , тогда  $h$  называется *изотопией*. Два узла  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  являются

объемлемо изотопными, если существует изотопия  $h : \mathbb{E}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  такая, что  $h(\mathcal{K}_1,0) = \mathcal{K}_1$  и  $h(\mathcal{K}_1,1) = \mathcal{K}_2$ . Таким образом, мы рассматриваем объемлющую изотопию как отношение эквивалентности на узлах, то есть два узла эквивалентны, если они могут быть деформированы друг в друга. Мы называем каждый класс эквивалентности узлов типом узлов, и эквивалентные узлы имеют один и тот же тип. Однако, чтобы избежать злоупотребления терминологией, очень часто слово “узел” используется для обозначения всего класса эквивалентности, то есть для типа узла или конкретного репрезентативного члена, который нас интересует. Например, когда мы говорим, что два узла различны, мы фактически имеем в виду, что они неэквивалентны, т.е. относятся к разным типам.

Самый простой узел из всех – это незаузленная окружность, которую мы называем тривиальным узлом или *неузлом*, см. рис. A.2. Если узел имеет тот же тип, что и тривиальный узел, мы говорим, что он не завязан.

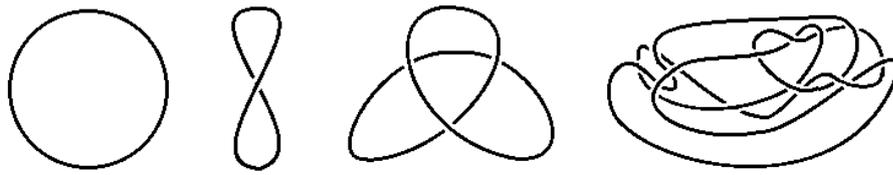


Рисунок A.2 — Примеры неузлов

Если внимательно посмотреть на рис. A.2 и воспользоваться физической интуицией деформируемой резины, то станет понятно, что эти узлы эквивалентны. Это простое упражнение естественным образом приводит нас к первому важному научному вопросу теории узлов: **как различать узлы?**

Действительно, пусть у нас есть два узла  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , например, как на рис. A.3. Как мы узнаем, что они на самом деле разные или одинаковые? Также

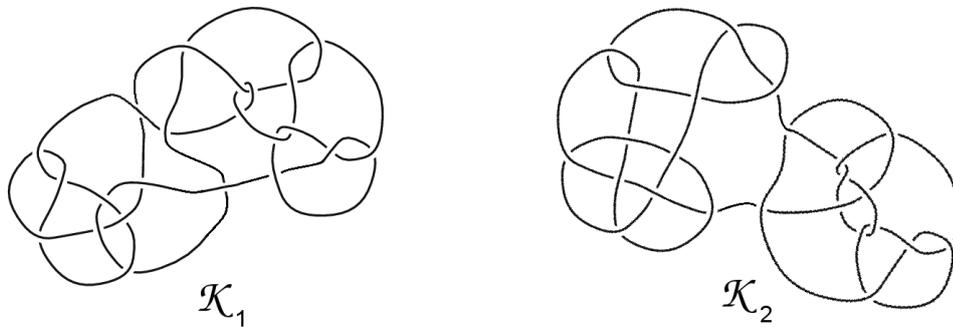


Рисунок A.3 — Два произвольных узла

мы еще не доказали, что существуют какие-либо другие узлы, кроме неузла.

Может быть, каждая проекция узла на любую фигуру выше является просто беспорядочной проекцией неузла. Чтобы ответить на этот вопрос, мы найдем такие свойства узла, которые зависят только от класса эквивалентности узла. Эта идея порождает теорию инвариантов узлов, составляющую основную часть теории узлов.

Графически мы представляем узлы с помощью узловых диаграмм. Узловая диаграмма – это плоская замкнутая кривая, которая может иметь только двойные точки (пересечения) в качестве сингулярностей вместе с выбранной верхней пересекающейся ниткой и нижней пересекающейся ниткой на каждом пересечении. Таким образом, узловую диаграмму можно рассматривать как проекцию узла вдоль некоторого «вертикального» направления, нижние пересечения и верхние пересечения показывают, какая нитка «выше», а какая «ниже». Мы называем деформацию проекции узла плоской изотопией или изотопией на плоскости, если она деформирует плоскость проекции, как если бы она была сделана из резины с нарисованным на ней выступом рис. А.4 [4]. Деформируем узел только в плоскости проекции.



Рисунок А.4 – Плоские изотопии

Два узла  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  эквивалентны тогда и только тогда, когда диаграмма  $\mathcal{K}_1$  может быть преобразована в диаграмму  $\mathcal{K}_2$  с помощью последовательности объемных изотопий плоскости и локальных движений Райдемайстера, которые представлены на рис. А.5.

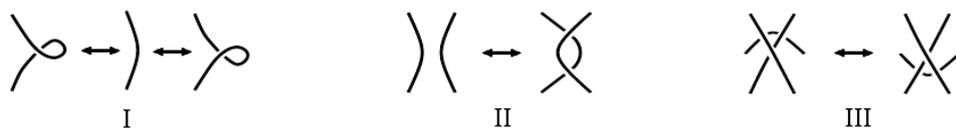


Рисунок А.5 – Три движения Райдемайстера

Обратим внимание, что хотя каждое из этих движений меняет проекцию узла, оно не меняет узел, представленный проекцией. Каждое такое движение – это объемлющая изотопия. Например, две проекции на рис. А.6 ([4]), крайняя левая и самая правая, соответствуют одному и тому же узлу. Следовательно,

согласно теореме Райдемайстера, существует конечная серия движений Райдемайстера и плоских изотопий, которые переводят нас от первой проекции ко второй. На рис. А.6 мы видим один пример такой серии движений, который демонстрирует эту эквивалентность.

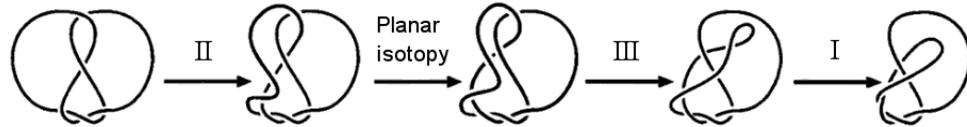


Рисунок А.6 — Пример движений Райдемайстера

Проблема определения того, представляют ли две проекции один и тот же узел, не так проста, как можно было бы надеяться. Мы просто проверяем, существует ли серия движений Райдемайстера, которая приведет нас от одной проекции к другой, но нет ограничения на количество движений Райдемайстера. Если два заданных выступа имеют по 10 пересечений каждый, может случиться так, что в процессе выполнения движений Райдемайстера количество пересечений обязательно увеличится до 57, прежде чем проекция упростится до 10 пересечений.

Теперь обсудим проблему классификации узлов. Начнем с обсуждения некоторых типов узлов, которые могут быть полезны для наших целей.

**Чередующиеся узлы.** Мы называем узел чередующимся, если его проекция имеет пересечения, чередующиеся с верхних на нижние при движении вдоль узла. В противном случае узел называется нечередующимся. Узел-трилистник и узел-восьмерка чередуются.

**Связанная сумма.** Если у нас есть два узла, мы можем определить новый узел, полученный путем удаления небольшой дуги из каждого узла и последующего соединения четырех свободных концов двумя новыми дугами. Это нужно делать с некоторой осторожностью: для проекций мы предполагаем, что они не перекрываются, и мы избегаем удаления или добавления каких-либо пересечений, как на рис. А.7 [4]. Мы называем получившийся узел *композицией* двух узлов или *связной суммой* двух узлов, обозначаемой  $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ .

Мы называем узел *составным узлом*, если он может быть представлен как композиция двух узлов, ни один из которых не является тривиальным узлом. Мы называем узел *простым узлом*, если он не является композицией любых двух нетривиальных узлов. Важно обратить внимание, что композиция узла

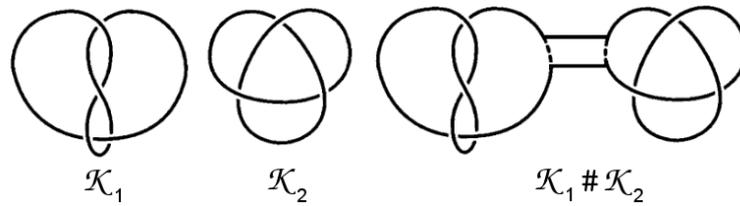


Рисунок А.7 — Композиция  $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$  двух узлов  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$

$\mathcal{K}$  с неузлом снова равна  $\mathcal{K}$ . С этой точки зрения узлы аналогичны положительным целым числам относительно операции умножения. На рисунке А.7 и трилистник, и восьмерка являются простыми узлами.

Неузел не является составным узлом, потому что невозможно взять композицию двух нетривиальных узлов и получить неузел. Здесь мы снова можем использовать аналогию с целыми числами: этот результат аналогичен тому факту, что целое число 1 не является произведением двух положительных целых чисел, каждое из которых больше 1. Более того, как целое число раскладывается в произведение простых чисел единственным образом, так и составной узел раскладывается в композицию простых узлов единственным образом. Таблицы узлов, например таблица Рольфсена [28], перечисляют только простые узлы и не включают никаких составных узлов. Они похожи на таблицы простых чисел.

**Зеркальные узлы.** *Зеркальный узел* - это узел, полученный заменой каждого пересечения в данном узле на противоположное. Узел, который эквивалентен своему зеркальному отображению, называется *амфикиральным* или *акиральным*, в противном случае *не-амфикиральным* или *киральным*. Несмотря на то, что узел и его зеркальное отображение являются отдельными узлами, если только узел не является амфикиральным, в таблицах узлов не указаны узел и его зеркальное отображение, только один из этой пары. Самый простой пример амфикирального узла - это узел-восьмерка. Доказать это можно с помощью движений Райдемайстера.

**Зацепления.** До сих пор мы рассматривали вложения одной окружности, т.е. ограничивали наше внимание одиночными заузленными петлями. Однако, существует естественное обобщение этой идеи: мы рассматриваем вложения наборов окружностей и, следовательно, получаем набор заузленных петель.

*Зацепление* - это конечное непересекающееся объединение узлов:  $L = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_n$ . Каждый узел  $\mathcal{K}_i$  называется составной частью зацепления. Количество компонентов зацепления  $L$  называется кратностью зацепления и обозна-

чается  $\mu(L)$ . Мы называем набор  $l$  непересекающихся окружностей, вложенных в плоскость, тривиальным зацеплением кратности  $l$ .

Некоторые простые примеры зацеплений показаны на рис. А.8. Каждое из пяти двухкомпонентных зацеплений имеет в качестве компонентов два тривиальных узла, но эти пять зацеплений различны. Таким образом, обозначение  $\mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_n$  перечисляет составные части и не указывает, как они соединены вместе, поэтому этого недостаточно для полного описания зацепления.

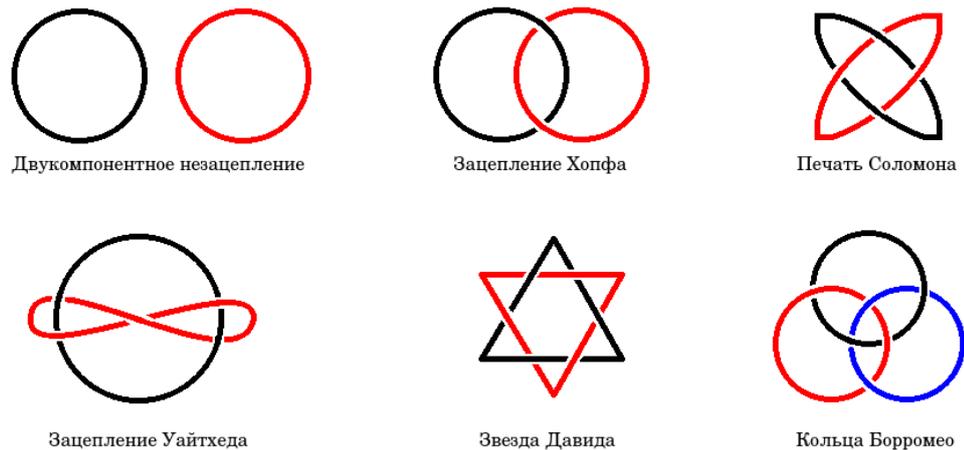


Рисунок А.8 — Примеры зацеплений

Таблица зацеплений Thistlethwaite [28] является аналогом таблицы узлов Рольфсена. Здесь используются следующие обозначения: обозначение вида  $L_i a_j$  или  $L_i n_j$  указывает  $j$ -е зацепление с  $i$  пересечениями его минимальной плоской проекции; метка  $a$  ( $n$ ) указывает на чередующееся (нечередующееся) зацепление. Также в некоторых других каталогах используются обозначения вида  $N_m^\mu$ , которые указывают  $m$ -ое зацепление с компонентами  $\mu$  с  $N$  пересечениями. Очевидно, что множество зацеплений содержит множество узлов.

**Торические узлы.** Некоторые из простейших узлов – это торические узлы, те, которые могут быть вложены в поверхность стандартного тора в  $\mathbb{R}^3$ . Их легко описать параметрически.

Торический узел  $T[m, n]$  - это узел, полученный путем наматывания петли на один цикл тора  $m$  раз и на другой  $n$  раз. Если целые числа  $m$  и  $n$  взаимно просты, то это узел, в противном случае - зацепление. Торический узел тривиален тогда и только тогда, когда либо  $m$ , либо  $n$  равно 1 или  $-1$ . Простейшим нетривиальным примером является  $T[2,3]$ , также известный как узел-трилистник. Простейшим нетривиальным примером зацепления является зацепление  $T[2,2]$ , также известное как зацепление Хопфа. Каждый нетривиальный торический узел первичен и кирален. Торический узел  $T[m, n]$  эквивалентен торическому

узлу  $T[n, m]$ . Торический узел  $T[m, -n]$  является зеркальным отображением торического узла  $T[m, n]$ . У нас уже были изображения торических узлов: первый и последний узлы на рис. A.1 – это торические узлы, на рис. A.8 изображено зацепление Хопфа.

**Классификация.** Классификация объектов исследования – основная задача в любой области математики. Обычно классификация – это список объектов, который содержит все возможности без повторения. Мы можем использовать разные критерии для создания такого списка, и полезность списка зависит от критериев. Обычно несложно создать алгоритм, который перечислит все возможные объекты, но этот список будет содержать дубликаты. Для создателя каталога узлов он перечисляет схемы узлов с увеличивающимся числом пересечений. Естественно возникает проблема определить, какие диаграммы представляют один и тот же узел. До 1980-х это было большой проблемой, потому что не было подходящих инвариантов для различения диаграмм узлов. Движения Райдемайстера могут быть успешно использованы только в случае положительного решения, потому что существует конечное число шагов, а в случае отрицательного решения процесс никогда не завершится. В качестве частного случая можно рассмотреть вопрос о проблеме тривиальности узла: найти алгоритм, который применяет движения Райдемайстера, упрощая диаграмму на каждом шаге, и продолжается до тех пор, пока не будет пересечений; если больше нет возможного упрощения, диаграмма не может быть тривиальной. Однако, на рис. A.9 ([53]) показаны диаграммы тривиального узла, которые нарушают этот подход: любое движение Райдемайстера увеличивает количество пересечений. Тем не менее, Вольфганг Хакен изобрел алгоритм решения проблемы тривиальности узла, но он основан на структуре внешнего вида узла – компактного трехмерного многообразия. Однако проблема обнаружения тривиальности с помощью движений Райдемайстера все еще остается открытой.

В любом случае алгоритм обнаружения эквивалентности узлов дает нам только простой список классификации без базовой структуры. В некотором смысле нам нужна конструкция «пространства модулей» узлов, и по этой причине мы должны создать полный набор инвариантов узлов.

**Инварианты узлов.** Инварианты узлов являются центральными объектами изучения теории узлов. Здесь мы кратко обсудим некоторые инварианты.

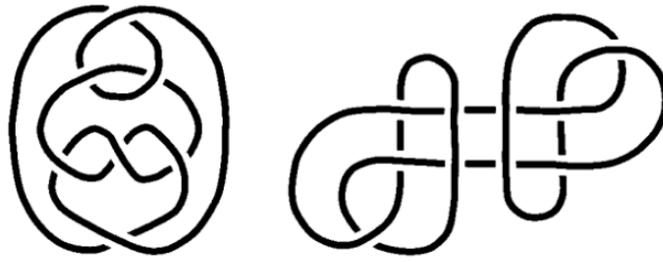


Рисунок А.9 — Неуклюжие схемы тривиального узла: любые движения Райдемайстера увеличивают количество пересечений

*Инвариант зацепления* – это функция из множества зацеплений на некоторое другое множество, значение которой зависит только от класса эквивалентности зацепления. Для вычисления инварианта можно выбрать любого представителя из класса. Нет ограничений на типы объектов в целевом пространстве. Например, это могут быть целые числа, многочлены, матрицы или группы.

Один из простейших инвариантов зацепления – это *кратность* зацепления, обозначаемая  $\mu(L)$ , которая представляет собой количество компонентов  $L$ .

Многие инварианты связаны с геометрическими и топологическими свойствами зацеплений и по-разному измеряют их сложность. Некоторые из них легко определить и очень сложно вычислить. Один из старейших инвариантов зацепления – это число развязывания. *Число развязывания* – это минимальное число переходов сквозь себя, после чего зацепление развязывается. Это число обозначается  $u(L)$ . Хотя этот инвариант является одной из наиболее очевидных мер сложности узла, его очень сложно вычислить. Нетривиальный узел  $\mathcal{K}$ , который можно развязать за один проход, имеет  $u(\mathcal{K}) = 1$  (пример такого узла см. на рис. А.10).



Рисунок А.10 — Узел  $7_2$  развязывается.

Любой узел может быть представлен на плоской диаграмме бесконечным множеством способов; по этой причине был введен следующий инвариант. Мы

называем минимальное количество пересечений на плоской диаграмме  $\mathcal{K}$  *числом пересечений*  $c(\mathcal{K})$  узла  $\mathcal{K}$ . Если  $c(\mathcal{K}) \leq 2$ , то узел  $\mathcal{K}$  тривиален. Следовательно, для построения диаграммы нетривиального узла требуется минимальное количество пересечений не менее 3.

**Индекс косы.** *Коса* - это набор из  $n$  ниток, каждая из которых прикреплена к горизонтальной полосе сверху и снизу, как показано на рис. A.11 [4]. Каждая нить пересекает любую горизонтальную плоскость между двумя полосами ровно один раз, т.е. каждая нить всегда идет вниз, пока мы движемся по ней от верхней полосы к нижней.



Рисунок A.11 — Коса.

Мы всегда можем натянуть нижнюю планку и приклеить ее к верхней планке, чтобы получившиеся нити образовали узел или зацепление. Это называется замыканием косы (см. рис. A.12 [4]). Таким образом, каждая коса соответствует определенному узлу, и у нас есть *представление замкнутой косы* этого узла.

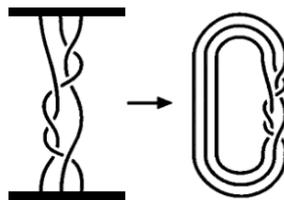


Рисунок A.12 — Замыкание косы.

Как доказал Дж. Александер, каждый узел или зацепление представляет собой замыкание косы. Как и в случае с плоскими диаграммами, нас интересует представление зацепления косой с как можно меньшим количеством нитей. *Индекс косы* зацепления - это минимальное количество нитей в косе, соответствующее представлению замкнутой косы. Например, индекс косы неузла равен 1, а трилистника равен 2. Индекс косы - инвариант узлов и зацеплений.

Замыкать косу можно и другим способом, представленным на рисунке A.13. Этот способ позволяет также позволяет получить любое зацепление. Такое представление зацепления называется *плетенкой* (англ. plat representation).

Очевидно, что плетенка с косой ширины 2 содержит только неузел. Плетенки с косами ширины 4 называются *рациональными узлами*. Это название связано с рациональными числами и их разложением в цепную дробь [53].

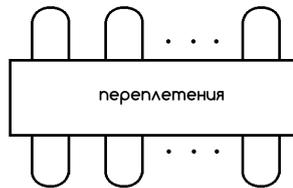


Рисунок А.13 — Плетенка.

**Индекс моста.** Только неузел можно вложить в плоскость без самопересечений. Можно попробовать расположить узел так, чтобы он всюду целиком был вложен в плоскость, за исключением небольшого числа *мостов*. Мост обязан быть простым и не может содержать заузленностей, т.е. его проекция на плоскость должна состоять из несвязанных отрезков прямой линии, см. рис. А.14 [53]. Такое представление узла или зацепления называется *мостовым представлением*. Минимальное число мостов, необходимое для зацепления, называется *индексом моста*. Все рациональные узлы и зацепления являются 2-мостовыми, обратное тоже верно.



Рисунок А.14 — Пример 2-мостового узла.

**Полиномиальные инварианты.** Важными инвариантами узлов являются полиномиальные инварианты, принимающие значения в кольцах многочленов от одной или нескольких переменных с целыми коэффициентами. Первым обнаруженным полиномиальным инвариантом был полином Александра  $\Lambda(K)$ , введенный в 1928 году. Затем, в 1970 году, Дж. Конвей нашел простую рекурсивную конструкцию полинома Александра. Затем в 1985 году В. Джонс изобрел многочлен Джонса, который обобщает многочлен Александра. Очень скоро был открыт многочлен ХОМФЛИ (иногда называемый ХОМФЛИ-ПТ), который обобщает многочлен Джонса.

*Многочлен ХОМФЛИ*  $H(q, A)$  – это многочлен Лорана от двух переменных  $A$  и  $q$  с целыми коэффициентами, удовлетворяющий следующему скейн-соотношению и начальному условию:

$$A H(\text{diagram}) - A^{-1} H(\text{diagram}) = (q - q^{-1}) H(\text{diagram});$$

$$H(\text{diagram}) = 1 \quad \text{или} \quad H(\text{diagram}) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Первое начальное условие соответствует так называемому нормализованному многочлену ХОМФЛИ, а второе – ненормализованному.

Полином ХОМФЛИ не является полным инвариантом для узлов, потому что он не может различить все узлы. В частности, пара мутантных узлов всегда имеет один и тот же многочлен ХОМФЛИ (рис. A.15 из [4]).



Рисунок A.15 — Два мутантных узла имеют один и тот же полином ХОМФЛИ

**Инварианты Васильева.** Любой инвариант узла можно распространить на узлы с двойными точками с помощью скейн-соотношения Васильева, изображенного на рис. A.16.

$$\mathcal{V}(\text{diagram}) = \mathcal{V}(\text{diagram}) + \mathcal{V}(\text{diagram})$$

Рисунок A.16 — Скейн-соотношение Васильева

Используя скейн-соотношение Васильева рекурсивно, любой инвариант узла можно расширить до узлов с произвольным числом двойных точек. Есть много способов сделать это, так как можно разрешать двойные точки в произвольном порядке. Однако результат не зависит от выбора порядка. Инвариант узла называется *инвариантом Васильева* (или инвариантом конечного типа) порядка  $\leq n$ , если его расширение обращается в нуль на всех особых узлах с более чем  $n$  двойными точками. Говорят, что инвариант Васильева имеет порядок  $n$ , если он имеет порядок  $\leq n$ , но не порядок  $\leq n - 1$ .