

Институт ядерных исследований
Российской академии наук.

На правах рукописи

Кирпичников Дмитрий Викторович

**Экзотические распады частиц в моделях с
дополнительными измерениями**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
академик РАН
В. А. Рубаков

Москва 2014

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Модифицированная модель Рэндалл-Сандрума	14
1.1 Волновая функция в дополнительных измерениях	14
1.1.1 Безмассовое векторное поле в объемлющем пространстве	15
1.1.2 Массивное векторное поле в объемлющем пространстве	18
1.2 Аннигиляция в фотон и ничто	21
1.3 $SU(2)_W \times U(1)_Y$ в объемлющем пространстве	23
1.3.1 Действие модели	23
1.3.2 Сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{ничто}$	25
1.4 $SU(2)_W$ на бране, а $U(1)_Y$ в объемлющем пространстве	26
1.4.1 Действие модели	26
1.4.2 Сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{ничто}$	31
Глава 2. Сигнал на e^+e^- коллайдере	32
2.1 Недетектируемый распад Z -бозона	32
2.2 Вылет гравитона с браны в модели АДД	33
2.3 Аннигиляция в фотон и два нейтрино	34
2.4 Численный анализ процессов e^+e^- аннигиляции	34
2.5 Результаты	38
Глава 3. Рождение недетектируемых частиц в экспериментах на БАК	39
3.1 Сигнал на БАК	47
3.1.1 Результаты	50
Глава 4. Петлевые поправки к пропагатору векторного поля с браны на брану	52

4.1	Модель доменной стенки	52
4.1.1	Спектральное разложение векторного пропагатора в модели доменной стенки	56
4.1.2	Инфракрасная расходимость, пропорциональная объему дополнительного измерения.	58
4.1.3	Однопетлевой вклад фермионов в векторный пропагатор с браны на брану.	59
4.2	Модель РС2-1	62
4.2.1	Пропагатор векторного поля в модели РС2-1	64
4.2.2	Однопетлевой вклад θ -однородных фермионных полей в векторный пропагатор с браны на брану.	66
4.2.3	Вклад θ -неоднородных фермионных КК возбуждений.	69
4.3	Результаты	72
	Глава 5. Заключение	74
	Глава 6. Приложения	76

Введение

Модели, в которых пространство время содержит более трех измерений с давних пор привлекали внимание исследователей. Так, в 1914 году Нордстремом была предпринята попытка объединить теорию электромагнетизма со скалярной гравитацией [1], добавив в теорию пятое пространственное измерение. Позднее Калуца [2] и Клейн [3] также рассматривали пятимерную модель пространства времени в контексте объединения эйнштейновской теории относительности и электромагнетизма. Фотонное поле в такой модели является компонентой пятимерного метрического тензора $g_{\mu 5}$. Эти работы послужили толчком к развитию моделей, в которых динамика калибровочного поля интерпретируются с геометрической точки зрения.

В 70-х годах XX века вновь проявляется интерес к моделям Калуцы-Клейна в связи с бурным развитием теории струн и М-теории, самосогласованные модели которых предполагают наличие дополнительных пространственных измерений. Для того, чтобы многомерные модели фундаментальных взаимодействий не противоречили наблюдаемой четырехмерной картине мира, считается, что дополнительные пространственные измерения компактифицированы, скажем, на окружностях малого радиуса, или же на других многообразиях микроскопического размера. Характерный масштаб компактификации измерений может достигать планковских размеров $l_{PL} \sim 10^{-33}$ см.

В начале 80-х годов была высказана гипотеза о том, что дополнительные пространственные измерения могут быть некомпактными, или же вовсе иметь бесконечный размер [4, 5]. В таких моделях обычная материя заключена на трехмерном многообразии - бране, вложенной в многомерное пространство. Соответствующие сценарии физики частиц называют моделями "мира на бране".

Общим свойством моделей "мира на бране" является вылет частиц с браны в дополнительные измерения бесконечно большого размера. Это свой-

ство обсуждалось в контексте ранних игрушечных моделей "мира на бране" в работах [4, 5]. В моделях с D-бранами частичная локализация материи и калибровочных полей, а, следовательно вылет частиц с браны, характерны для хиггсовской фазы системы [6]. В моделях с гравитационным механизмом квазилокализации частиц на бране [7–9] также возможен вылет частиц в дополнительные измерения [10–18].

С четырехмерной точки зрения вылет частиц с браны происходит при наличии мод с непрерывным спектром масс. С многомерной точки зрения эти моды соответствуют частицам, двигающимся от браны вдоль бесконечно большого дополнительного измерения. Хотя вылет частиц может быть интерпретирован с четырехмерной точки зрения в терминах АдС/КТП соответствия [12, 19], на практике вылетающие частицы не регистрируются. Рождение таких частиц в столкновительных экспериментах будет сопровождаться событиями с потерей энергии в конечном состоянии [13–17].

Вылет частиц в дополнительные измерения с потерей энергии также обсуждается в контексте модели АДД, предложенной Аркани-Хамедом, Димопулусом и Двали [20]. В данном сценарии частицы Стандартной модели локализованы на бране, а КК гравитоны распространяются в объемлющем пространстве, которое представляет собой компактифицированные на торе дополнительные измерения. При этом спектр масс этих гравитонов практически непрерывен, ввиду того, что расстояния между соответствующими КК возбуждениями достаточно малы. Поэтому вылет недетектируемых гравитонов с браны [18] аналогичен механизму квазилокализации частиц с непрерывным спектром в моделях с бесконечно большим измерением.

Отметим, что проверка моделей "мира на бране" [21, 22], возможна как в астрофизических, так и в космологических экспериментах [23–27]. Недавний запуск Большого адронного коллайдера открывает возможность для поиска редких распадов частиц в некоторых экзотических моделях "мира на бране".

Одной из задач данной диссертации является изучение редких распа-

дов нейтральных частиц в модифицированной модели Рэндалл-Сандрума с компактными дополнительными измерениями. Данная модель является расширением оригинальной модели Рэндалл-Сундрумом (РС2) [7], в которую включено n измерений, компактифицированных на окружности (РС2- n) [9, 11, 21]. Основной особенностью модели РС2- n является то, что в модифицированной модели возможна локализации калибровочных полей на бране. Этот механизм локализации похож на механизм локализации гравитонов в оригинальной модели РС2.

Модель РС2- n включает в себя 3-брану положительного натяжения, вложенную в $(5 + n)$ -мерное пространство АдС с n компактными измерениями, метрика модели записывается в виде

$$ds^2 = a(z)^2(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \delta_{ij}d\theta^i d\theta^j) - dz^2, \quad (1)$$

где θ_i - координаты компактных дополнительных измерений, $\theta_i \in [0, 2\pi R_i]$, $i = 1, \dots, n$, а

$$a(z) = e^{-k|z|}$$

масштабный фактор, характеризующий класс моделей РС. Метрика (1) является решением $(5 + n)$ - мерных уравнений Эйнштейна с соответствующим образом подобранным натяжением браны. Кривизна АдС метрики k определяется $(5 + n)$ - мерной планковской массой и отрицательной космологической постоянной объемлющего пространства.

На фоне геометрии (1) безмассовые калибровочные поля, распространяющиеся в объемлющем пространстве, имеют моды, точно локализованные на бране [9, 11]. Волновая функция таких мод не зависит от координат дополнительных измерений, в соответствии с требованием зарядовой универсальности [22]: 4-х мерные калибровочные заряды частиц, покидающих брану, не зависят от формы волновой функции в дополнительных измерениях. С другой стороны, калибровочные поля приобретают массу через механизм Хиггса (хиггсово поле может быть локализовано на бране, либо распространяться в

объемлющем пространстве), и это приводит к тому, что они становятся квазилокализованными на бране. Таким образом, массивные векторные бозоны получают конечную вероятность вылета в дополнительные измерения. В обоих случаях непрерывный спектр четырехмерных масс начинается с нуля.

У описанного выше сценария распада частиц в дополнительное измерение существуют как низкоэнергетический, так и высокоэнергетический режим. Для низкоэнергетического режима характерны такие процессы, как распад позитрония [28] и эффект охлаждения центральных областей звезд [29]. На основе низкоэнергетических эффектов были получены сильные ограничения на кривизну пространства АдС k для числа дополнительных компактных измерений $n = 1, 2$. Однако при низких энергиях волновая функция векторных бозонов может быть подавлена на бране, поэтому низкоэнергетические ограничения на параметры модели могут давать неполную информацию о константах в теории. Для высокоэнергетического режима в теории характерен распад Z -бозона в невидимую моду [30, 31].

Поскольку в модифицированной модели РС2- n возможна локализация векторных полей на бране, то встает вопрос об экспериментальной проверке этой модели в ускорительных экспериментах.

Одной из задач данной диссертации является изучение сигнатур с потерей энергии типа $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто", где под термином "ничто" мы подразумеваем либо фотон, либо Z -бозон, вылетающие в дополнительные измерения. Также в предметом исследования является область параметров модели РС2- n , которая будет доступна для детектирования в коллайдерных экспериментах.

Процесс с двумя нейтрино в конечном состоянии $e^+e^- \rightarrow \gamma \bar{\nu} \nu$ является основным фоном для сигнала, который мы исследуем. В данной диссертации мы проведем численное сравнение сигнала $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто" с этим фоном. Мы также сравним наш сигнал с процессом $e^+e^- \rightarrow \gamma + G_{KK}$ в модели "мира на бране" [20], предложенной Аркани-Хамедом, Димопоулусом и

Двали (АДД модель). В модели АДД в дополнительные измерения вылетают калуце-клейновские (КК) гравитоны G_{KK} . В работе [18] было показано, что процессы $e^+e^- \rightarrow \gamma + G_{KK}$ в модели АДД могут давать существенный вклад в сечение электронн-позитронных столкновений.

В последнее время быстрыми темпами развиваются методы Монте-Карло моделирования процессов новой физики в ускорительных экспериментах на БАК. Наиболее известными программами, которые позволяют проводить численный анализ процессов, выходящих за рамки Стандартной модели, являются CompNer [32] и RUTHIA [33]. Однако ни CompNer, ни RUTHIA не адаптированы для широкого класса моделей новой физики, в которых рассматривается, скажем, большое дополнительное измерение.

В связи с запуском БАК большой интерес представляет феноменологический анализ процессов $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$ в модели мира на бране РС2- n . В данной диссертационной работе представлены результаты численного моделирования процессов протон-протонных столкновений $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$ при различных энергиях на БАК в модели РС2- n . Потеря энергии в конечном состоянии в данных процессах обусловлена либо фотоном, либо Z -бозоном, вылетающим в дополнительные измерения. Будет показано, что при энергии 7 ТэВ шансы экспериментальной проверки моделей с числом компактных измерений $n \geq 6$ весьма невелики, поскольку сечение сигнала $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$ мало по сравнению с фоном Стандартной модели $pp \rightarrow \text{jet} + \nu\bar{\nu}$. Однако при энергии pp столкновений 14 ТэВ ситуация улучшается. В этом случае возможна проверка моделей с меньшим числом компактных дополнительных измерений.

Локализации на бране скалярных и фермионных полей посвящен достаточно обширный цикл работ [4, 5, 34–42]. Однако модели, в которых рассматривается локализация калибровочных полей на бране, обладают весьма специфическими особенностями. В некоторых моделях мира на бране калибровочному полю запрещено распространяться в объемлющем пространстве [43].

Необходимым свойством самосогласованной модели с локализованным векторным полем является требование зарядовой универсальности [22] (независимость четырехмерной константы связи модели от волновой функции калибровочного поля в объемлющем пространстве). Последнее свойство означает, что волновая функция нулевой моды векторного поля должна быть константой вдоль дополнительного измерения (нулевые моды скаляров и фермионов, как правило, спадают вдали от браны). Однако векторная нулевая мода остается нормируемой благодаря тому, что масштабный фактор, на который умножается волновая функция, быстро убывает при $|z| \rightarrow \infty$.

Независимость нулевой моды калибровочного поля от координаты дополнительного измерения может привести к инфракрасным проблемам. В самом деле, в работах [44, 45] было показано, что в пятимерном пространстве однопетлевая амплитуда рассеяния нулевых мод калибровочных бозонов, обусловленная заряженными фермионами в объемлющем пространстве, пропорциональна объему дополнительного измерения L , см. Рис. 1. Это обусловлено тем, что эффективная масса фермионов является константой вдали от браны. Действительно, в безмассовом пределе пятимерные фермионы являются конформными, таким образом, ни кинетический член спинорных полей, ни их взаимодействие векторным полем не зависит от масштабного фактора в объемлющем пространстве.

Теперь представим себе, что размер фермионной петли в объемлющем пространстве конечен, и будем двигаться в направлении $z \rightarrow \infty$, где z - координата дополнительного измерения. Поскольку нулевая мода калибровочного бозона константа по z , а эффективная масса заряженного фермиона также не зависит от z на больших расстояниях от браны, то интегрирование по координате z в петлевом интеграле дает объем дополнительного измерения L . Аналогично, однопетлевая фермионная поправка к четырехмерному пропагатору нулевых мод калибровочного поля также пропорциональна L .

Это наблюдение, однако, не означает, что все модели мира на бране об-

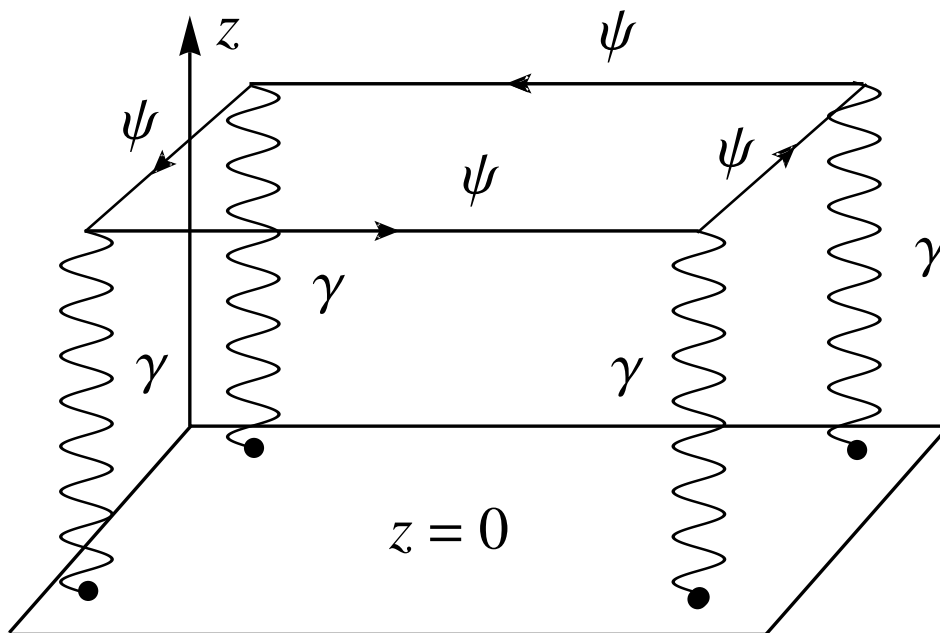


Рис. 1. Амплитуда рассеяния света на свете в модели, в которой векторное поле локализовано на доменной стенке: $\mathcal{M}(\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma) \propto L \rightarrow \infty$.

ладают патологическими инфракрасными расходимостями на однопетлевом уровне. Действительно, поскольку нулевая мода калибровочного поля существенно нелокальна вдоль координаты дополнительного измерения, то, следовательно, она не может быть порождена локальным источником. Инфракрасные патологии, действительно имеются в моделях с массовой щелью между нулевой модой и высшими возбуждениями калибровочного сектора [44]: при малых четырехмерных импульсах тяжелые состояния не оказывают влияние на низкоэнергетическое поведение корреляторов полей, основную роль в этом режиме играют степени свободы нулевых мод. Массовая щель, однако, отсутствует в некоторых обобщениях оригинальной модели РС2 [7], в которых удается локализовать на бране калибровочное поле [9, 11, 46]. В работе [22], были высказаны аргументы в пользу того, что такие модели свободны от инфракрасных патологий на однопетлевом уровне.

Одной из задач данной диссертационной работы является вычисление однопетлевых квантовых корреляторов калибровочного поля в двух различных

сценариях мира на бране: в одном из них имеется массовая щель, а в другом массовая щель отсутствует. Поскольку в моделях мира на бране особый интерес представляют свойства частиц, локализованных вблизи браны, то нами были исследованы квантовые пропагаторы векторного поля с браны на брану в инфракрасном пределе $p \rightarrow 0$, где p - четырехмерный импульс векторного поля. Мы вычислили однопетлевые поправки к коррелятору векторного поля с браны на брану, обусловленные фермионами, распространяющимися в объемлющем пространстве; для простоты были рассмотрены безмассовые фермионы. Для определенности нами была рассмотрена модель, предложенная в работе [44] (с массовой щелью) и модель, рассмотренная в статье [11] (без массовой щели, с одним большим и одним компактным измерением). Наши вычисления подтверждают тот факт, что модели с массовой щелью между нулевой модой и высшими состояниями являются патологическими в инфракрасном пределе. Мы увидим, что однопетлевая поправка к векторному пропагатору с браны на брану ведет себя как $1/p^3$ при стремлении четырехмерного импульса p к нулю (как известно, древесный пропагатор пропорционален $1/p^2$). С другой стороны, мы покажем, что квантовые фермионные поправки в моделях с бесщелевым спектром не содержат инфракрасных членов: однопетлевая поправка ведет себя как $1/p^2$, поэтому она может быть включена в перенормировку волновой функции калибровочного поля.

Диссертация организована следующим образом.

В главе 1 будут рассмотрены типовые модели массивного и безмассового векторного поля, распространяющегося на фоне метрики (1). В разделе 1.1 будет введено общее взаимодействие векторного поля, распространяющегося в объемлющем пространстве, с фермионами, локализованными на бране. В разделе 1.1.1 будет получена волновая функция безмассового векторного поля модели РС2- n . Также выведено эффективное действие модели и фазовый объем для частиц, вылетающих в объемлющее пространство. В разделе 1.1.2 выведена волновая функция массивного векторного поля в объемлющем

пространстве, также обсуждается механизм квазилокализации такого поля. В разделе 1.2 представлено сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто" в рассматриваемой типовой модели КЭД на фоне метрики РС2- n . В разделе 1.3 будет мы обобщим конструкцию КЭД, рассмотренную в разделе 1.1, на феноменологическую модель, в которой хиггсовское поле и калибровочный сектор $SU(2)_W \times U(1)_Y$ распространяются в объемлющем пространстве, а фермионы точно локализованы на бране. В разделе 1.3.1 мы введем многомерное действие соответствующей модели. В разделе 1.3.2 будут представлены сечения рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто". В разделе 1.4 мы будем предполагать, что только $U(1)_Y$ калибровочный сектор Стандартной модели живет в пространстве высших размерностей, а калибровочные поля $SU(2)_W$ сектора и Хиггсовское поле локализованы на бране. Хотя модель локализации полей, рассмотренная в разделе 1.4, и отличается от конструкции, изученной в разделе 1.3, мы покажем, что с точки зрения эксперимента обе модели дают схожий результат.

В Главе 2 обсуждаются результаты численного моделирования процессов $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто". В разделе 2.1 на основе данных по измерению невидимой ширины распада Z -бозона получены ограничения на параметр модели k для различного числа дополнительных компактных измерений n . В разделах 2.2-2.4 сравниваются сечения рассеяния сигнала $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто" с соответствующим фоном Стандартной модели $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\nu$ и сигналом с потерей энергии в модели АДД $e^+e^- \rightarrow \gamma + G_{KK}$.

В Главе 3 вычислено дифференциальное сечение рассеяния процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$. За основу будет взята полевая конструкция модели РС2- n , рассмотренная в разделе 1.3. В разделе 3.1 мы представим результаты численного сравнения сигнала $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ с фоном Стандартной модели $pp \rightarrow \text{jet} + \nu\bar{\nu}$ для различного числа компактных дополнительных измерений.

Глава 4 посвящена исследованию инфракрасного поведения однопетлевых

пропагаторов векторного поля с браны на брану в двух различных моделях "мира на бране". В разделе 4.1 мы рассмотрим пятимерную модель спинорной КЭД с калибровочным полем, локализованным на доменной стенке. В разделе 4.1.3 мы вычислим соответствующую однопетлевую фермионную поправку к векторному пропагатору с браны на брану. В разделе 4.2 мы рассмотрим шестимерную модель КЭД на фоне метрики $PS2-1$ с одним компактным измерением θ и одним бесконечно большим дополнительным измерением z . В разделе 4.2.2 вычислим однопетлевой вклад θ -однородных КК фермионов в векторный пропагатор с браны на брану. В разделе 4.2.3 для вычисления однопетлевого вклада θ -неоднородных фермионов в пропагатор векторного поля с браны на брану мы применим схему, в которой масштаб ультрафиолетового зависит от координаты объемлющего пространства z .

Основные результаты диссертации сформулированы в Заключение. Подробности математических вычислений собраны в Приложении.

Результаты, полученные в диссертации, докладывались на научных семинарах ИЯИ РАН, на Международных конференциях "Кварки 2010" (Колонна, 2010), "Кварки 2012" (Ярославль, 2012), на международных конференциях коллаборации СМС в 2011 и 2012 году (Алушта, 2011, 2012), а также на международной конференции АСАТ 2013 (Пекин, 2013).

По результатам диссертации опубликовано 4 работы:

1. D.I. Astakhov, D.V. Kirpichnikov «Vector bosons escaping from the brane: $e^+e^- \rightarrow +nothing$ » // Phys.Rev. D **83** (2011) 104031.
2. D.V. Kirpichnikov «LHC signatures of vector boson emission from brane to bulk» // Phys.Rev. D **85** (2012) 115008
3. D.V. Kirpichnikov «IR properties of one loop corrections to brane-to-brane propagators in models with localized vector boson» // Phys.Rev. D **88** (2013) 1250
4. D.V. Kirpichnikov «On cross-section computation in the brane-world models» принята к печати в трудах конференции АСАТ 2013. [arXiv:1310.5577]

Глава 1

Модифицированная модель Рэндалл-Сандрума

1.1 Волновая функция в дополнительных измерениях

В данной главе мы рассмотрим модель векторного поля в объемлющем пространстве, взаимодействующего с фермионами, локализованными на бране. Действие для такого поля на фоне метрики (1) записывается в виде

$$S = \int \prod_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{2\pi R_i} dz d^4x \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} g^{AC} g^{BD} F_{AB} F_{CD} + \frac{M_5^2}{2} g^{AB} B_A B_B \right), \quad (1.1)$$

где индексы A, B, C, D пробегает значения от 0 до $(4 + 1 + n)$, координата x_5 зарезервирована под польшое дополнительное измерение $x_5 \equiv z$, напряженность калибровочного поля определена следующим образом

$$F_{CD} = \partial_C B_D - \partial_D B_C.$$

Взаимодействие калибровочного поля с фермионами описывается действием

$$S_{int} = g_5 \int \prod_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{2\pi R_i} dz d^4x \sqrt{g} \delta(z) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu B_\mu(x, z) \psi(x), \quad (1.2)$$

где индекс μ пробегает значения от 0 до 3, а константа связи g_5 имеет массовую размерность $-1/2$.

Далее мы будем рассматривать режим, при котором энергия сталкивающихся частиц меньше кривизны k , в предположении, что $R_i \lesssim k^{-1}$. Тогда при малых энергиях, $E \ll 1/R_i$, соответствующие векторные моды не зависят от координат дополнительных измерений θ_i , и мы можем учитывать только непрерывный спектр КК возбуждений, соответствующий движению вдоль бесконечно большого дополнительного измерения z .

Поскольку фермионы в нашей модели взаимодействуют только с компонентами B_μ поля B_M , мы потребуем, чтобы

$$B_6 = \dots = B_{n+5} = 0.$$

Проинтегрировав действия (1.1) и (1.2) вдоль θ_i , получим эффективное 5-мерное действие для таких мод

$$S = \int d^4x dz a^{n+4} \left(-\frac{1}{4} g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd} + \frac{M_5^2}{2} g^{ab} B_a B_b \right) + g_5 \int d^4x dz \delta(z) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu B_\mu(x, z) \psi(x), \quad (1.3)$$

где индексы a, b, c, d пробегает значения от 0 до $(3 + 1)$. Решим теперь классические уравнения движения для векторного поля на фоне метрики (1), которые следуют из действия (1.3)

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_c (\sqrt{|g|} g^{ac} g^{bd} F_{ab}) + M_5^2 B^d = 0. \quad (1.4)$$

В разделах 1.1.1 и 1.1.2 мы найдем решения этих уравнений для безмассового ($M_5 = 0$) и массивного ($M_5 \neq 0$) калибровочного поля соответственно.

1.1.1 Безмассовое векторное поле в объемлющем пространстве

В этом разделе мы рассмотрим случай нулевой балковской массы, $M_5 = 0$, и воспроизведем результат, полученный в работе [11] (см. также обзор [47]). Зафиксируем калибровку $B_z = 0$. Тогда уравнения (1.4) сведутся к следующим

$$\frac{1}{a^2} \partial_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{a^{n+2}} \partial_z (a^{n+2} \partial_z B_\nu) = 0, \quad (1.5)$$

$$\partial_\mu \partial_z B_\mu = 0. \quad (1.6)$$

Данные уравнения описывают локализованную моду и непрерывный спектр массивных возбуждений. Локализованная мода также подчиняется уравнению

$$\partial_z B_\mu = 0, \quad (1.7)$$

таким образом, уравнение (1.5) принимает вид максвелловского уравнения для свободного электромагнитного поля. Следовательно, волновая функция

локализованной моды не зависят от координаты объемлющего пространства z . Отметим, что эта мода является нормируемой, поскольку вес в нормировочном интеграле равен $a^n(z)dz$, (см. (1.3)). Мы обозначим это решение через A_μ для того, чтобы отличать его от нелокализованных состояний, к описанию которых мы и приступаем.

Второй тип решений системы (1.5, 1.6) соответствует непрерывному спектру возбуждений, которые не локализованы на бране. С четырехмерной точки зрения эти возбуждения имеют ненулевые массы. В четырехмерном импульсном представлении решения, четные относительно z отражения, имеют вид

$$B_\mu(p, z) = B_\mu(p, m)\Psi(z, m), \quad (1.8)$$

где функция $\Psi(z, m)$ равна

$$\Psi(z, m) = C_m e^{(\frac{n}{2}+1)k|z|} \left(\eta_m J_{\frac{n}{2}+1} \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) + N_{\frac{n}{2}+1} \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) \right), \quad (1.9)$$

а константа η_m определяется соотношением

$$\eta_m = -\frac{N_{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{k} \right)}{J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{k} \right)}, \quad (1.10)$$

здесь $p^2 = m^2$, $B_\mu(p, m)$ - это моды поперечные с четырехмерной точки зрения, а C_m - нормировочная константа. Моды, нечетные при отражении вдоль z , не взаимодействуют с фермионами, поэтому мы не будем их рассматривать.

Для того чтобы вывести нормировочное условие для нелокализованных мод, рассмотрим интеграл энергии для векторно поля,

$$E = \int d^4x dz T_0^0 \sqrt{|g|} \quad (1.11)$$

где T_0^0 - тензор энергии-импульса, полученный из действия (1.1). Подставим в (1.11) выражение для поля $B_\mu(x, z)$ в терминах операторов рождения и уничтожения,

$$B_\mu(x, z) = \int_0^\infty dm \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Psi(z, m)}{\sqrt{2E_{p,m}}} \sum_\alpha (a_{p,m}^{\alpha+} e^{ipx} + a_{p,m}^\alpha e^{-ipx}) e_\mu^\alpha(p), \quad (1.12)$$

и потребуем, чтобы энергия имела стандартный вид

$$E = \int_0^{\infty} dm \int d^3p E_{p,m} \sum_{\alpha} a_{p,m}^{\alpha+} a_{p,m}^{\alpha}. \quad (1.13)$$

Отсюда получим следующее условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz a^n \Psi(z, m) \Psi(z, m') = \delta(m - m'), \quad (1.14)$$

которое дает значение константы

$$C_m = \sqrt{\frac{m}{2k(\eta_m^2 + 1)}}. \quad (1.15)$$

Хотя нормировочное условие (1.14) является вполне очевидным, однако вывод, описанный выше, пригодится нам в дальнейшем при рассмотрении менее тривиальной ситуации.

Интегрируя (1.1) вдоль координаты большого дополнительного измерения z и принимая во внимание условие нормировки (1.14) мы получим следующее выражение для эффективного четырехмерного действия модели, в случае $M_5 = 0$:

$$\begin{aligned} S_{eff} = & -\frac{1}{4} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + g_4 \int d^4x A_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi + \\ & + \int dm d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x, m) F_{\mu\nu}(x, m) + \frac{m^2}{2} B_{\mu}(x, m) B_{\mu}(x, m) \right) + \\ & + g_5 \int dm \Psi(0, m) \int d^4x B_{\mu}(x, m) \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \quad (1.16) \end{aligned}$$

Первые два члена выражения (1.16) соответствуют безмассовому векторному полю (1.7), локализованному на бране. Эффективная четырехмерная константа связи выражается через пятимерную следующим образом

$$g_4 = g_5 \cdot \sqrt{\frac{kn}{2}}, \quad (1.17)$$

где фактор $\sqrt{kn/2}$ появляется вследствие нормировки локализованной моды $A^{(0)}(z) = \text{const}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-knz} |A^{(0)}(z)|^2 = 1,$$

откуда получаем

$$A^{(0)}(z) = \sqrt{kn/2}. \quad (1.18)$$

Взаимодействие массивных мод с фермионами (1.16) подавлено при $m \ll k$ значением волновой функции на бране,

$$\Psi(0, m) = \frac{2}{n\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{m}{2k}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.19)$$

Из выражения (1.16) следует, что фазовый объем для мод непрерывного спектра равен

$$d\omega = \frac{1}{2E_{\mathbf{p},m}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} dm, \quad E_{\mathbf{p},m} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \quad (1.20)$$

Формулы (1.20) понадобятся нам при вычислении сечений рассеяния процессов вылета частиц с браны.

1.1.2 Массивное векторное поле в объемлющем пространстве

Вернемся к рассмотрению массивных векторных мод в объемлющем пространстве. Будем рассматривать случай

$$M_5 \ll k.$$

Уравнение (1.4) распадается на следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}(\partial_\mu^2 B_\nu - \partial_\nu \partial_\mu B_\mu) + k(n+2)\text{sign}(z)\partial_z B_\mu - \partial_z^2 B_\nu + M_5^2 B_\nu = \\ = k(n+2)\text{sign}(z)\partial_\nu B_z - \partial_\nu \partial_z B_z \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\partial_z \partial_\mu B_\mu = \partial_\mu \partial_\mu B_z + M_5^2 a^2(z) B_z \quad (1.22)$$

С четырехмерной точки зрения уравнения (1.21) и (1.22) имеют поперечную и продольную компоненту решений. Поперечная часть, подчиняющаяся условию $\partial_\mu B_\mu = 0$, имеет вид

$$B_\mu(p, z) = B_\mu(p, m) \Psi(z, m), \quad B_z = 0,$$

где $p^2 = m^2$,

$$\Psi(z, m) = \sqrt{\frac{m}{2k(\chi_m^2 + 1)}} \cdot e^{k(\frac{n}{2}+1)|z|} \left(\chi_m J_\nu \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) + N_\nu \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) \right) \quad (1.23)$$

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 + \frac{M_5^2}{k^2}} \quad (1.24)$$

$$\chi_m = -\frac{\left(\frac{n}{2} + 1 - \nu\right) N_\nu\left(\frac{m}{k}\right) + \frac{m}{k} N_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right)}{\left(\frac{n}{2} + 1 - \nu\right) J_\nu\left(\frac{m}{k}\right) + \frac{m}{k} J_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right)} \quad (1.25)$$

В формуле (1.23) мы использовали условие нормировки (1.14). Для полноты картины мы также выпишем решение для продольной моды:

$$B_z = \bar{C}_m e^{(\frac{n}{2}+1)|z|} \left(\chi_m J_\nu \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) + N_\nu \left(\frac{m}{k} e^{k|z|} \right) \right), \quad (1.26)$$

$$B_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (1.27)$$

$$\partial_z \phi = \left(1 - \frac{M^2 a^2(z)}{p^2} \right) B_z. \quad (1.28)$$

Здесь \bar{C}_m это константа нормировки, а ν определяется выражением (1.24). Продольные моды не взаимодействуют с фермионами (этот факт также имеет место в расширениях стандартной модели, которые будут изучены в разделах 1.3 и 1.4) поэтому далее мы не будем их рассматривать.

Отынтегрировав координату большого дополнительного измерения z , мы получим эффективное четырехмерное действие для поперечной компоненты векторного поля с ненулевой массой в объемлющем пространстве

$$S_{eff} = \int dm d^4x \left(-\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x, m) B_{\mu\nu}(x, m) + \frac{m^2}{2} B_\mu(x, m) B_\mu(x, m) \right) + g_5 \int dm \Psi(0, m) \int d^4x B_\mu(x, m) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.29)$$

Отметим, что для массивного векторного поля не существует связанного состояния, аналогичного (1.7), другими словами, такие моды не локализованы на бране. Рассмотренные возбуждения являются квазилокализованными состояниями с конечным временем жизни на бране τ . С точки зрения четырехмерного наблюдателя такая частица покидает брану за время $\tau = 1/\Gamma_{RS}$, где Γ_{RS} - это ширина распада массивной частицы в дополнительное измерение

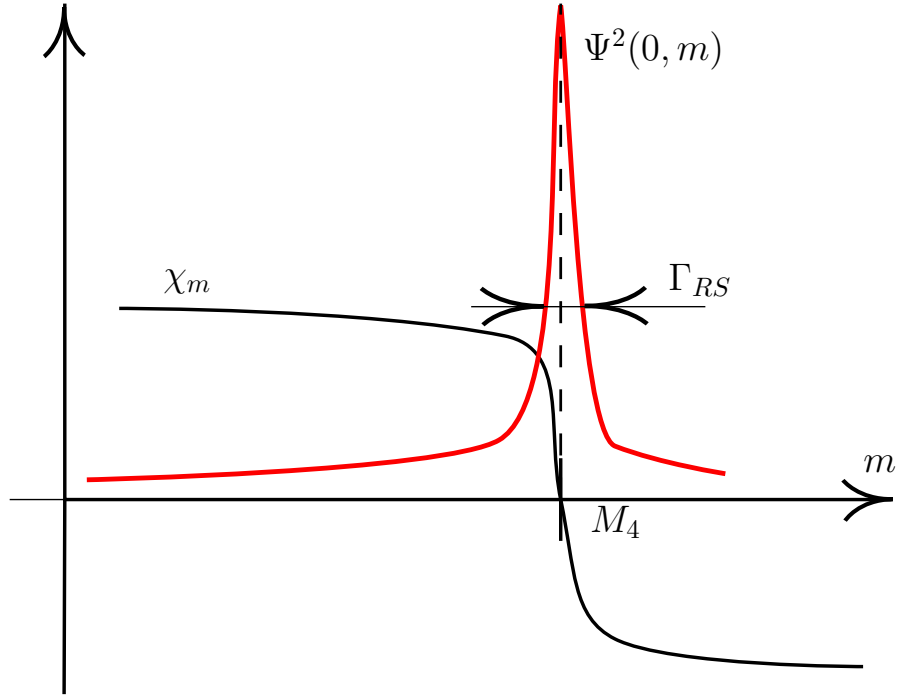


Рис. 1.1. Квазилокализация массивных векторных частиц: функция χ_m (см. выражение (1.23)) и квадрат волновой функции на бране $\Psi^2(0, m)$.

бесконечного размера. Похожий эффект квазилокализации скалярного поля был изучен в работе [10], а в статье [29] обсуждаются эффекты квазилокализации фотона в плазме.

Для того чтобы пояснить вышесказанное заметим, что волновая функция векторного поля на бране $\Psi(0, m)$ и, следовательно, член взаимодействия в эффективном четырехмерном действии (1.29) зависит от четырехмерной массы m следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi^2(0, m) &= \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2} + 1)}{\pi^2(1 + \chi_m^2)} \cdot \left(\frac{m}{2k}\right)^{-n-1} = \\ &= \frac{n^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\Gamma^2(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{m}{2k}\right)^{n-1} \frac{1}{(m^2 - M_4^2)^2 + m^2\Gamma_{RS}^2}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$M_4 = M_5 \sqrt{\frac{n}{n+2}}, \quad \Gamma_{RS} = \frac{2\pi}{n\Gamma^2(\frac{n}{2})} m \left(\frac{m}{2k}\right)^n. \quad (1.31)$$

На рисунке 1.1 показаны зависимости $\Psi(0, m)$ и χ_m . Резонанс в точке $m = M_4$ соответствует квазилокализованной четырехмерной векторной частице с

массой M_4 и шириной невидимого распада $\Gamma_{RS}(M_4)$. Отметим, что в пределе $k \rightarrow \infty$ мы имеем $\Gamma_{RS} \rightarrow 0$, при этом $\Psi^2(0, m)$ стремится к дельта функции:

$$\Psi^2(0, m) \rightarrow \frac{nk}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{RS}}{2} \frac{1}{(m - M_4)^2 + \left(\frac{\Gamma_{RS}}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{nk}{2} \cdot \delta(m - M_4). \quad (1.32)$$

Таким образом, соотношение (1.17) между константами связи остается справедливым при $M_4 \ll k$. Для волновой функции на бране также справедливо выражение (1.19) вдали от резонанса.

Заметим также, что выражение (1.30) есть не что иное, как формула Брейта-Вигнера, которая определяет вероятность массивной векторной частицы вылететь в дополнительное измерение. Для безмассовых частиц, точно локализованных на бране, аналогичная брейт-вигнеровская структура в волновой функции отсутствует.

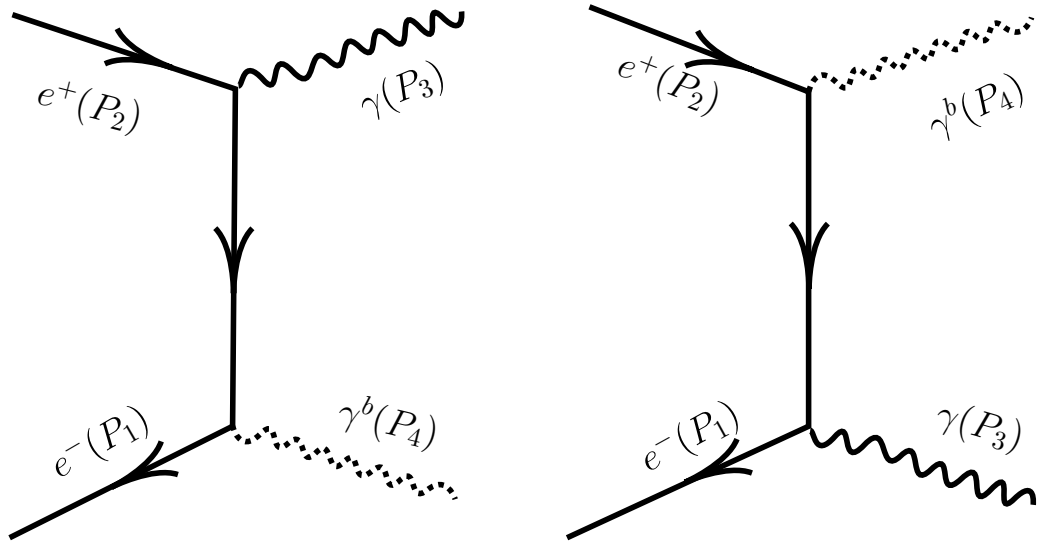
1.2 Аннигиляция в фотон и ничто

В этом разделе мы выведем сечение электрон-позитронного столкновения, в результате которого образуется фотон, локализованный на бране, и векторный бозон, вылетающий с браны в дополнительное измерение. Для этого нам понадобятся выражения эффективных действий (1.16) и (1.29) для векторного бозона в объемлющем пространстве; фотон же описывается обычным четырехмерным действием для электромагнитного поля.

Диаграммы, дающие вклад в обозначенные выше процессы, изображены на рисунке 1.2. Их амплитуды даются выражениями

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = & \bar{v}(P_2)(-ig_5\gamma^\mu) \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_3)}{(P_1 - P_3)^2} \tilde{e}_\mu(P_4)(-ie\gamma^\nu)u(P_1)\Psi(0, m)e_\nu(P_3) + \\ & + \bar{v}(P_2)(-ig_5\gamma^\mu) \frac{(\hat{P}_3 - \hat{P}_2)}{(P_3 - P_2)^2} e_\mu(P_3)(-ie\gamma^\nu)u(P_1)\Psi(0, m)\tilde{e}_\nu(P_4), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где P_1 и P_2 - импульсы электрона и позитрона, соответственно, а P_3 и P_4 - импульсы фотона и векторного бозона, e_μ и \tilde{e}_μ - их вектора поляризации. С точки зрения четырехмерного наблюдателя, невидимые векторные бозоны,

Рис. 1.2. $e^-e^+ \rightarrow \gamma + \text{”ничто”}$

распространяющиеся в дополнительном измерении, обладают непрерывной массой M (аналог пятой компоненты импульса). Пятая компонента импульса частицы не сохраняется, ввиду нарушения трансляционной инвариантности действия. Закон сохранения энергии и трехмерного импульса приводит к следующим соотношениям в системе центра масс фермионов

$$s = (P_3 + P_4)^2 = M^2 + 2(q\sqrt{q^2 + M^2} + q^2), \quad M = \sqrt{s \left(1 - \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)},$$

где q - энергия фотона в системе центра масс фермионов. Введем следующие обозначения

$$x = 2q/\sqrt{s}, \quad y = \cos \theta, \quad (1.34)$$

где θ - угол между направлением вылета фотона и линией пучка столкновения. Используя выражения для фазового объема (1.20), получим дифференциальное сечение в системе центра масс фермионов

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{g_5^2 e^2}{8\pi} \cdot |\Psi(0, M)|^2 \cdot \frac{1}{s} \cdot f(x, y), \quad (1.35)$$

где

$$f(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(2-x)^2 + x^2 y^2}{1-y^2}. \quad (1.36)$$

В качестве примера рассмотрим электродинамику с векторным полем в объемлющем пространстве и фермионом, локализованным на бране. Эта полевая конструкция совпадает с моделью, рассмотренной в разделе 1.1.1. Константа связи g_4 , входящая в выражение (1.17), совпадает с электрическим зарядом e . Используя выражения (1.9), и (1.10), получим

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\alpha^2}{\pi n s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{J_{\frac{n}{2}}^2\left(\frac{M}{k}\right) + N_{\frac{n}{2}}^2\left(\frac{M}{k}\right)} \cdot f(x, y) \quad (1.37)$$

В пределе $s \ll k$ имеем следующее выражение

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{\sqrt{s}}{2k}\right)^n \cdot (1-x)^{\frac{n}{2}} \cdot f(x, y) \quad (1.38)$$

Сечение (1.38) быстро растет при энергиях $\sqrt{s} \ll k$; такое поведение сечений характерно для многих многомерных моделей.

1.3 $SU(2)_W \times U(1)_Y$ в объемлющем пространстве

1.3.1 Действие модели

Рассмотрим $(4 + 1 + n)$ -мерную $SU(2)_W \times U(1)_Y$ калибровочную теорию с векторными полями A_M^α , B_M и хиггсовским полем Φ на фоне метрики (1). Мы будем по-прежнему предполагать, что фермионы локализованы на бране. Действие такой модели запишется в виде

$$S = \int d^4x dz \prod_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{2\pi R_i} \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} (F_{MN}^\alpha)^2 - \frac{1}{4} B_{MN}^2 + (D_M \Phi)^\dagger D_M \Phi - V(\Phi^\dagger, \Phi) + \delta(z) \mathcal{L}_f \right], \quad (1.39)$$

где \mathcal{L}_f - лагранжиан фермионов (далее мы будем пренебрегать фермионной массой)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & i\bar{L} \left(\hat{\partial} - i\tilde{g}_1 \frac{Y_L}{2} \hat{B} - i\tilde{g} \frac{\sigma_\alpha}{2} A^\alpha \right) L + i\bar{r} \left(\hat{\partial} - i\tilde{g}_1 \frac{Y_R}{2} \hat{B} \right) r + \\ & + i\bar{Q} \left(\hat{\partial} - i\tilde{g}_1 \frac{Y_L^Q}{2} \hat{B} - i\tilde{g} \frac{\sigma_\alpha}{2} A^\alpha \right) Q + i\bar{q} \left(\hat{\partial} - i\tilde{g}_1 \frac{Y_R^q}{2} \hat{B} \right) q. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Здесь \tilde{g} и \tilde{g}_1 - константы связи $SU(2)_L \times U(1)_Y$ сектора, L и r обозначают лептонный дублет и синглет соответственно, Q и q - аналогичные кварковые структуры, а $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ - хиггсовский потенциал,

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = \frac{\tilde{\lambda}}{2} \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (1.41)$$

Ковариантная производная имеет стандартный вид $D_M \Phi = \partial_M \Phi - i \frac{\tilde{g}_1}{2} \hat{B}_M \Phi - i \tilde{g} \frac{\sigma_\alpha}{2} A_M^\alpha \Phi$. Квадратичные структуры для векторных полей в хиггсовском вакууме имеют тот же вид, что и в случае четырехмерной стандартной модели. Используя преобразование калибровочных полей

$$Z_M = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}^2}} (-\tilde{g}_1 B_M + \tilde{g} A_M^3), \quad A_M = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}^2}} (\tilde{g} B_M + \tilde{g}_1 A_M^3),$$

$$W_M^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_M^1 \mp i A_M^2)$$

перепишем действие (1.39) в виде

$$S = \int d^4x dz \prod_{i=1}^n \frac{d\theta_i}{2\pi R_i} \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2} |W_{MN}|^2 + m_W^2 |W_M|^2 - \frac{1}{4} Z_{MN}^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_M^2 - \frac{1}{4} F_{MN}^2 + \delta(z) \mathcal{L}_f \right], \quad (1.42)$$

где

$$m_W^2 = \frac{1}{4} \tilde{g}^2 v^2, \quad m_Z^2 = \frac{1}{4} (\tilde{g}^2 + \tilde{g}_1^2) v^2$$

массы калибровочных полей. Отметим, что фотон в такой конструкции остается безмассовым в объемлющем пространстве. \mathcal{L}_f - лагранжиан фермионов:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f,em} + \mathcal{L}_{f,weak}. \quad (1.43)$$

Взаимодействие с фотоном устроено следующим образом

$$\mathcal{L}_{f,em} = g_5 \sum_f q_f \bar{f} \gamma^\mu A_\mu f, \quad (1.44)$$

а лагранжиан слабого взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,weak} = & \frac{\tilde{g}}{2\sqrt{2}} (\bar{\nu}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)W_\mu^+e + h.c.) + \frac{\tilde{g}}{2\sqrt{2}} (\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)W_\mu^+d + h.c.) \\ & + \frac{\tilde{g}}{2\cos\theta_W} \sum_f \bar{f}\gamma^\mu \left(t_3^f(1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2\theta_W \right) f Z_\mu. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Здесь $g_5 = e\sqrt{\frac{2}{nk}} = \tilde{g}\sin\theta_W = \tilde{g}_1\cos\theta_W$ - электрический заряд в объемлющем пространстве, а eq_f - заряд фермионов. Отметим, что соотношение (1.17) для четырехмерной и многомерной констант связи справедливо для обеих калибровочных групп, следовательно, $\sin\theta_W$ выражается также в терминах четырехмерных констант связи.

1.3.2 Сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{ничто}$

Очевидно, что модель, которую мы рассматриваем, является непосредственным обобщением полевой конструкции, рассмотренной в начале главы 1. В частности, спектр и волновая функция векторных бозонов в объемлющем пространстве аналогичны тем, которые были рассмотрены в разделе 1.1.

Рассмотрим теперь процессы рассеяния e^+e^- с образованием фотона, локализованного на бране, и Z - бозона, вылетающего в объемлющее пространство. Дифференциальное сечение такого процесса запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dxdy} (e^+e^- \rightarrow Z_{bulk}\gamma) = & \frac{2\alpha^2}{\pi nk^2} \cdot \frac{(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W)^2 + \sin^4\theta_W}{\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} \cdot \\ & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{n}{2} + 1 - \nu \right) J_\nu\left(\frac{M}{k}\right) + \frac{M}{k} J_{\nu-1}\left(\frac{M}{k}\right) \right)^2 + \left(\left(\frac{n}{2} + 1 - \nu \right) N_\nu\left(\frac{M}{k}\right) + \frac{M}{k} N_{\nu-1}\left(\frac{M}{k}\right) \right)^2} \cdot f(x, y) \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 + \frac{n+2}{2} \left(\frac{M_Z}{k}\right)^2}, \quad M = \sqrt{s(1-x)}$$

В пределе $s \ll k$ получаем

$$\frac{d\sigma}{dxdy} (f\bar{f} \rightarrow Z_{bulk}\gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{s n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{8\sin^4\theta_W - 4\sin^2\theta_W + 1}{\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} \cdot \left(\frac{\sqrt{s}}{2k}\right)^n \cdot \frac{(1-x)^2}{\left(1-x-\frac{M_Z^2}{s}\right)^2 + \frac{M_Z^2\Gamma_{RS}^2}{s^2}} \cdot f(x,y). \quad (1.47)$$

Здесь M_Z - четырехмерная масса Z - бозона, а Γ_{RS} определяется формулой (1.31). Также остаются справедливыми введенные обозначения (1.36), (1.34). Фактор, зависящий от x , в последней части формулы (1.47) приходит из квадрата волновой функции на бране (1.30). Полное сечение рассеяния $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ "ничто" складывается из двух

$$\frac{d\sigma}{dxdy} (f\bar{f} \rightarrow \gamma + \text{nothing}) = \frac{d\sigma}{dxdy} (f\bar{f} \rightarrow Z_{bulk}\gamma) + \frac{d\sigma}{dxdy} (f\bar{f} \rightarrow \gamma_{bulk}\gamma), \quad (1.48)$$

второе слагаемое в (1.48) - вклад безмассовых векторных полей, вылетающих с браны (1.38).

1.4 $SU(2)_W$ на бране, а $U(1)_Y$ в объемлющем пространстве

1.4.1 Действие модели

В этом разделе мы рассмотрим модель, в которой фермионный, хиггсовский и $SU(2)$ - сектор стандартной модели локализован на бране, а $U(1)$ - калибровочные поля распространяются в объемлющем пространстве. Характерным свойством этой модели является то, что после спонтанного нарушения симметрии образуется локализованный на бране фотон A_μ , а векторные мода Z_μ бозона пропорциональна компоненте B_μ , квазилокализованной на бране. Тем не менее, стандартная модель восстанавливается в пределе $k \rightarrow \infty$.

Выведем эффективное действие этой модели. После отынтегрирования компактных дополнительных измерений действие полевой конструкции за-

писывается в виде

$$S = \int d^4x dz a^{n+4} \left\{ \left((D_\mu \phi)^+ D_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\mu\nu}^\alpha - \lambda \left(\phi^+ \phi - \frac{v^2}{2} \right) \right) \delta(z) - \frac{1}{4} g^{MA} g^{NB} B_{MN} B_{AB} \right\}. \quad (1.49)$$

Здесь $B_M(x, z)$ - это $U(1)_Y$ калибровочное поле в объемлющем пространстве, $A_\mu^\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$ - векторные поля $SU(2)_W$ сектора на бране, $F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \frac{g}{2} \tau_\alpha A_\mu^\alpha \phi - \frac{g'}{2} \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\mu(x, 0) \phi$. При записи ковариантной производной мы использовали соотношение (1.17) между многомерной и четырехмерной константами связи.

После спонтанного нарушения симметрии, линеаризованные уравнения для нейтральных векторных полей записываются в виде

$$\partial_z \partial_\mu B_\mu = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{1}{a^2} \partial_\mu \partial_\mu B_\nu - \partial_z^2 B_\nu + (n+2) k \text{sign}(z) \partial_z B_\nu = \frac{2v^2 g'}{8} \sqrt{\frac{2}{kn}} \left(g' \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\nu - g A_\nu^3 \right) \delta(z) \quad (1.51)$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + \frac{2gv^2}{8} \left(g A_\nu^3 - g' \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\nu(x, 0) \right) = 0 \quad (1.52)$$

Здесь мы использовали калибровку $B_z = 0$. Уравнения для W^\pm бозонов имеют стандартный четырехмерный вид, поэтому эти поля мы не рассматриваем. Уравнения (1.51), и (1.52) имеют особенность: поскольку механизм Хиггса происходит на бране, то в этих уравнениях появляется дополнительное граничное условие на бране.

Рассмотрим сначала случай $A_\mu^3(x) = \frac{g'}{g} \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\nu(x, 0)$. Уравнения (1.50)-(1.52) принимают вид

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.53)$$

$$g' B'_\nu - g A_\nu^3 = 0 \quad (1.54)$$

$$\frac{1}{a^2} \partial_\mu \partial_\mu B_\nu - \partial_z^2 B_\nu + (n+2) k \text{sign}(z) \partial_z B_\nu = 0 \quad (1.55)$$

$$\partial_\mu \partial_z B_\mu = 0 \quad (1.56)$$

Уравнение (1.53) имеет решение с ненулевой массой тогда и только тогда, когда является продольным, $A_\mu^3 = p_\mu b(p)$, но такое решение несовместно с уравнениями (1.54)-(1.56) для $p^2 \neq 0$. Таким образом уравнения (1.53)-(1.56) описывают безмассовую частицу. В разделе 1.1.1 было показано, что безмассовое решение уравнений (1.54), (1.56) является локализованным на бране. Следовательно уравнения (1.53)-(1.56) описывают фотонное поле A_μ . Поля B_μ и A_μ^3 выражаются через A_μ следующим образом

$$B_\mu(p, z) = \sqrt{\frac{kn}{2}} \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \cdot A_\mu(p), \quad (1.57)$$

$$A_\mu^3(p) = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \cdot A_\mu(p). \quad (1.58)$$

Теперь рассмотрим случай $A_\mu^3(x) \neq \frac{g'}{g} \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\nu(x, 0)$. Ситуация здесь немного сложнее, чем в предыдущем случае. Уравнение (1.51) равносильно системе двух уравнений - уравнению в объемлющем пространстве и граничному условию на бране

$$\frac{1}{a^2} \partial_\mu \partial_\mu B_\nu - \partial_z^2 B_\nu + (n+2)k \text{sign}(z) \partial_z B_\nu = 0 \quad (1.59)$$

$$\partial_z B_\nu|_{z \rightarrow +0} - \partial_z B_\nu|_{z \rightarrow -0} = \frac{2g'v^2}{8} \sqrt{\frac{2}{kn}} \left(g A_\nu^3 - g' \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\nu \right) \quad (1.60)$$

Уравнения (1.59) и (1.50) совпадают с уравнениями для безмассовых векторных мод в объемлющем пространстве, обсуждавшимися в Главе 1. Поэтому мы используем решения (1.8) и (1.9) для поля $B_\mu(x, z)$. Наличие граничного условия (1.60) приводит к другому выражению для η_m . Величины η_m и A_μ^3 определим из уравнений (1.52) и (1.60):

$$\eta_m = - \frac{-\frac{2mg'^2}{kn} N_\nu(\frac{m}{k}) + 2 \left(\frac{4m^2}{v^2} - g^2 \right) N_{\nu-1}(\frac{m}{k})}{-\frac{2mg'^2}{kn} J_\nu(\frac{m}{k}) + 2 \left(\frac{4m^2}{v^2} - g^2 \right) J_{\nu-1}(\frac{m}{k})}, \quad \nu = \frac{n}{2} + 1 \quad (1.61)$$

$$A_\mu^3(p, m) = -B_\mu(p, m) \Psi(0, m) \frac{gg'v^2 \sqrt{\frac{2}{kn}}}{4m^2 - v^2g^2} \quad (1.62)$$

где $\Psi(0, m)$ и $B_\mu(p, m)$ имеют вид (1.9) и (1.8) соответственно с η_m равным (1.61). Константа нормировки для этого решения была получена из условия нормировки (1.14). Отметим, что $\Psi(0, m)$ имеет вид

$$\Psi(0, m) = (m^2 - M_W^2) \tilde{\Psi}(0, m) \quad (1.63)$$

$$\tilde{\Psi}(0, m) = \sqrt{\frac{m}{2k}} \frac{2 \left(J_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right) N_\nu\left(\frac{m}{k}\right) - N_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right) J_\nu\left(\frac{m}{k}\right) \right)}{\sqrt{\left((m^2 - M_W^2) J_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right) - \frac{m}{kn} \operatorname{tg}^2 \theta_W M_W^2 J_\nu\left(\frac{m}{k}\right) \right)^2 + (J_\nu \rightarrow N_\nu)^2}}. \quad (1.64)$$

Таким образом, в выражении (1.62) отсутствует полюс в точке

$$m = M_W = \frac{g^2 v^2}{4}.$$

Для того чтобы проиллюстрировать механизм квазилокализации массивных векторных полей в этой модели, запишем выражения для полей A_μ , Z_μ в точке $z = 0$

$$\begin{aligned} Z_\mu(p, m) &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \cdot \left(g A_\mu^3(p, m) - g' \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\mu(p, m) \right) \\ &= m^2 \sin \theta_W \cdot B_\mu(p, m) \tilde{\Psi}(0, m) \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} A_\mu(p, m) &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(g' A_\mu^3(p, m) + g \sqrt{\frac{2}{kn}} B_\mu(p, m) \right) = \\ &= (m^2 - M_Z^2) \cos \theta_W \cdot B_\mu(p, m) \tilde{\Psi}(0, m) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Заметим, что $Z_\mu(p, m)$, как функция m , имеет пик в точке $m = M_Z$, и этот пик совпадает с нулем функции $A_\mu(p)$, как показано на рисунке 1.3. Ширину пика Γ_{RS} можно получить из уравнений (1.64) и (1.65):

$$\Gamma_{RS}(M_Z) = \frac{2\pi M_Z \sin^2 \theta_W}{n \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{M_Z}{2k} \right)^n. \quad (1.67)$$

Поскольку поля $A_\mu(p, m)$ и $Z_\mu(p, m)$ не являются независимыми, мы можем

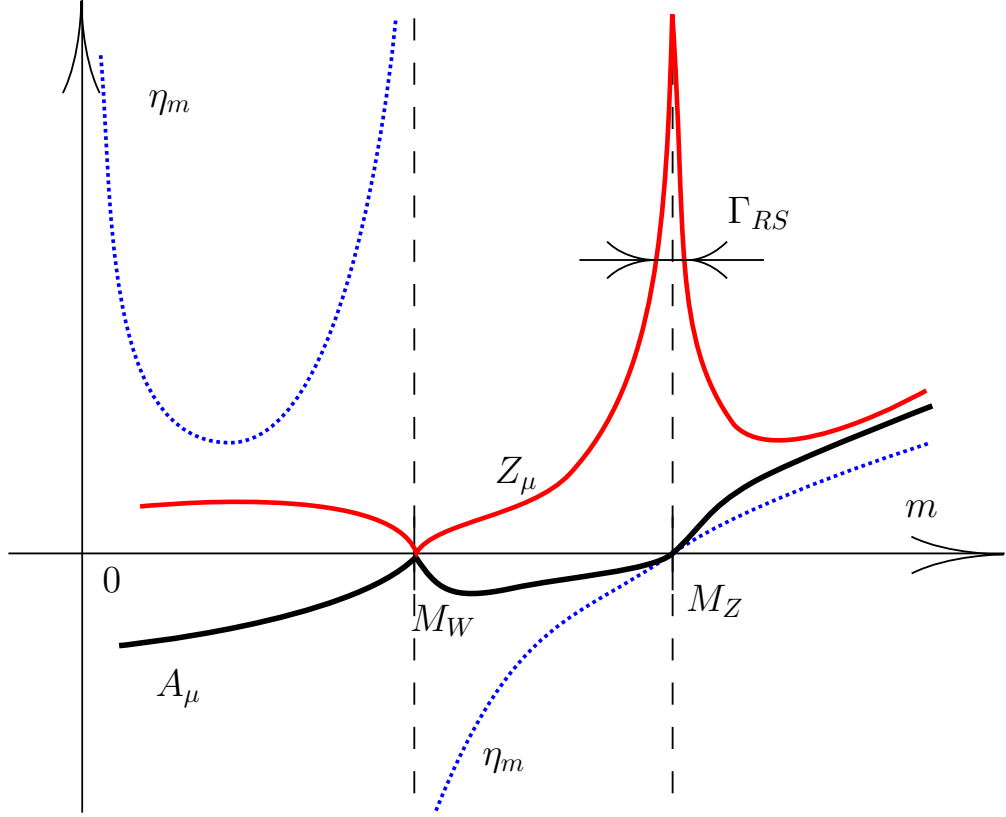


Рис. 1.3. Функции A_μ , Z_μ , η_m в зависимости от m

переписать член взаимодействия в терминах независимого поля B_μ ,

$$\begin{aligned}
 S_{int} &= \int dm d^4x \left(\frac{g(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W)}{\cos \theta_W} Z_\mu \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \frac{g \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} Z_\mu \bar{e}_R \gamma^\mu e_R - e A_\mu \bar{e} \gamma^\mu e \right) = \\
 &= \int dm d^4x \frac{e \tilde{\Psi}(0, m)}{\cos \theta_W} \cdot \left(\left(\frac{m^2}{2} - M_W^2 \right) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + (m^2 - M_W^2) \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right) B_\mu(x, m),
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

где мы рассматриваем лишь электроны. В пределе $k \rightarrow \infty$, имеем $\Gamma_{RS} \rightarrow 0$ и

$$\tilde{\Psi}^2(0, m) \rightarrow \frac{nk}{2M_Z^2} \delta(m - M_Z). \tag{1.69}$$

Таким образом, только локализованные моды поля Z_μ с массой M_Z взаимодействуют с фермионами, в то время как массивные моды полей Z_μ и A_μ не взаимодействуют с фермионами непосредственно. Тем самым, мы показали, что четырехмерная физика в этой модели восстанавливается в пределе $k \rightarrow \infty$.

1.4.2 Сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{ничто}$

Эффективными полями в этой модели являются локализованный на бране фотон A_μ и квазилокализованное поле B_μ . Поскольку фотон A_μ точно локализован на бране, только поле B_μ может распространяться в объемлющем пространстве. Рождение поля B_μ и его вылет с браны будет проявляться в процессе $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{”ничто”}$.

Вернемся к рассмотрению сечения рассеяния электрон-позитронной аннигиляции в фотон и поле B_μ . Общая формула для этого сечения дается выражением (1.35). В системе центра масс имеем

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{2\alpha^2}{\pi n s \cos^2 \theta_W} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot f(x, y) \cdot \frac{(m^2 - M_W^2)^2 + \left(\frac{m^2}{2} - M_W^2\right)^2}{\left((m^2 - M_W^2)J_{\nu-1}\left(\frac{m}{k}\right) - \frac{m}{nk} \operatorname{tg}^2 \theta_W M_W^2 J_\nu\left(\frac{m}{k}\right)\right)^2 + (J_\nu \rightarrow N_\nu)^2}. \quad (1.70)$$

Здесь $m = \sqrt{s(1-x)}$. В пределе $s \ll k$ мы получим

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{(m^2 - M_W^2)^2 + \left(\frac{m^2}{2} - M_W^2\right)^2}{2 \cos^2 \theta_W} \cdot \frac{1}{s} \left(\frac{\sqrt{s}}{2k}\right)^n \cdot f(x, y) \cdot \frac{1}{(m^2 - M_Z^2)^2 + m^2 \Gamma_{RS}^2(m^2)} \quad (1.71)$$

где x , y и $f(x, y)$ определены в разделе 1.2, а $\Gamma_{RS}(m^2)$ дается выражением (1.67).

Глава 2

Сигнал на e^+e^- коллайдере

В данной главе мы применим полученные выше результаты к процессам с потерей энергии в конечном состоянии на e^+e^- коллайдере. Мы сравним эти процессы с фоновыми процессами Стандартной модели $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$ и процессами рождения фотона и недетектируемого гравитона $e^+e^- \rightarrow \gamma + G_{KK}$ в модели АДД.

2.1 Недетектируемый распад Z -бозона

Модели мира на бране, которые мы рассматривали в предыдущих главах, имеют два параметра k - кривизна пространства АдС и n - число компактных дополнительных измерений. Ограничения на константу k можно получить из недетектируемого распада Z бозона в дополнительные измерения. В дополнение к невидимому каналу распада Z бозона в Стандартной модели $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$, в моделях мира на бране существует канал вылета Z бозона с браны в дополнительные измерения. В полевой конструкции $SU(2)_{bulk} \times U(1)_{bulk}$ ширина распада такого процесса дается соотношением (1.31), т. е.

$$\Gamma_{RS}^Z = \frac{2\pi}{n\Gamma^2(\frac{n}{2})} M_Z \left(\frac{M_Z}{2k} \right)^n. \quad (2.1)$$

В модели $SU(2)_{brane} \times U(1)_{bulk}$ ширина невидимого распада имеет вид (1.67) и содержит дополнительный фактор $\sin^2 \theta_W$.

В рамках Стандартной модели, невидимая ширина распада Z бозона $\Gamma_{invis}^{Z \rightarrow \nu\bar{\nu}} = 499$ МэВ определена с точностью до экспериментальной погрешности $\Delta\Gamma_{invis}^Z \simeq 1.5$ MeV [48]. Для того чтобы получить ограничения на параметры модели k и n , мы потребуем, чтобы невидимые ширины распада (2.1) и (1.67) не превышали экспериментальную ошибку. Соответствующие результаты представлены в таблице 2.1. Для моделей с числом компактных

n	$k \geq \Gamma_{\text{эВ}}, \text{SU}(2)_{\text{bulk}} \times U(1)_{\text{bulk}}$	$k \geq \Gamma_{\text{эВ}}, \text{SU}(2)_{\text{brane}} \times U(1)_{\text{bulk}}$
1	$5.5 \cdot 10^6$	$1.3 \cdot 10^6$
2	$20 \cdot 10^3$	$10 \cdot 10^3$
3	$2.5 \cdot 10^3$	$1.6 \cdot 10^3$
4	900	600
5	400	300
6	300	200

Таблица 2.1. Нижние ограничения на параметр k для невидимого распада Z бозона в моделях раздела 1.3 (слева) и 1.4 (справа)

измерений равным $n = 1, 2, 3$ эти ограничения достаточно сильные, поэтому далее мы будем использовать значения k при $n \geq 4$.

2.2 Вылет гравитона с браны в модели АДД

Процессы с недетектируемыми частицами в конечном состоянии предсказываются различными моделями. Для сравнительного анализа мы будем использовать сечение аннигиляции e^+e^- в фотон и гравитон на основе модели АДД, см. [18]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx d\cos\theta}(e^+e^- \rightarrow \gamma G) = \frac{\alpha}{64} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{s}}{M_D}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot f_{ADD}(x, y), \quad (2.2)$$

где

$$f_{ADD}(x, y) = \frac{2(1-x)^{\frac{n}{2}-1}}{x(1-y^2)} [(2-x)^2(1-x+x^2) - 3y^2x^2(1-x) - y^4x^4], \quad (2.3)$$

здесь n - также число дополнительных компактных измерений, а M_D - соответствующая n -мерная масса Планка, которая является свободным параметром модели АДД.

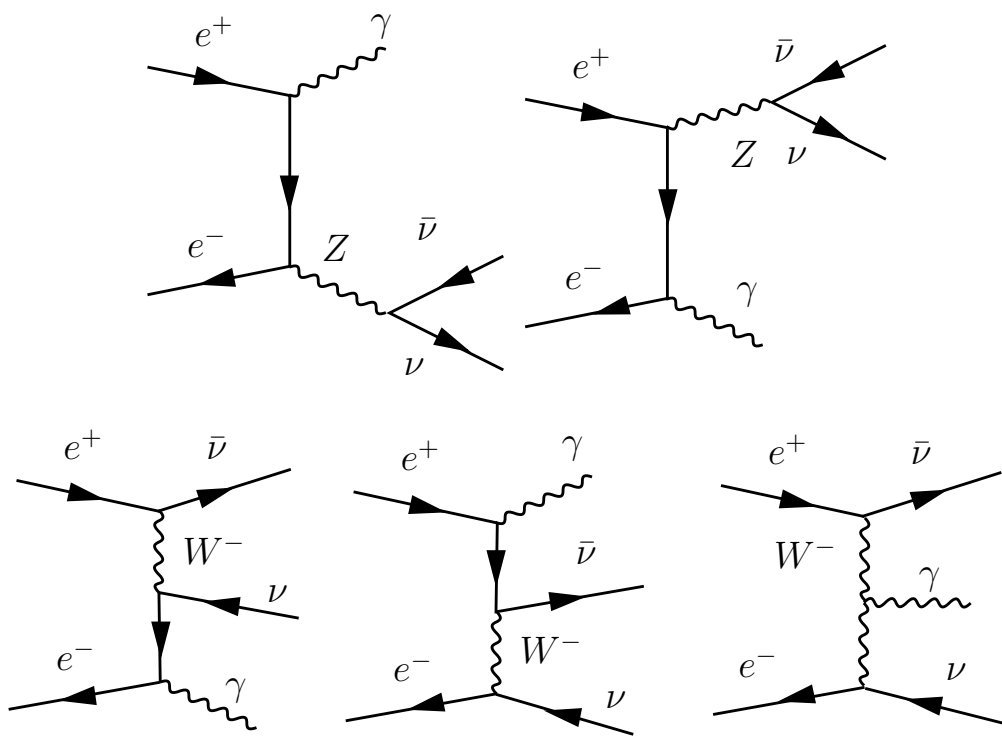


Рис. 2.1. Древесные диаграммы фона стандартной модели

2.3 Аннигиляция в фотон и два нейтрино

Основной фон Стандартной модели обусловлен процессом $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$. Для того чтобы избавиться от Z пика в распределении $e^+e^- \rightarrow \gamma Z$ мы исключим из рассмотрения область энергии фотона в окрестности $q = (s - M_Z^2)/(2\sqrt{s}) = 495$ ГэВ. Фон, обусловленный процессом $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$, непрерывно распределен по энергии q . Отметим, что для больших поперечных импульсов фотонов такие фоновые процессы как $e^+e^- \rightarrow \gamma(e^+e^-)$ и $e^+e^- \rightarrow \gamma(\gamma)$ не играют заметной роли. Фейнмановские диаграммы для процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$ представлены на Рис. 2.1. Соответствующие сечение рассеяния были рассчитаны при помощи пакета ComPer [32].

2.4 Численный анализ процессов e^+e^- аннигиляции

Перейдем к анализу дифференциальных сечений в моделях $SU(2)_{bulk} \times U(1)_{bulk}$ и $SU(2)_{brane} \times U(1)_{bulk}$, которые задаются формулами (1.48) и (1.70), сравнив их с фоном Стандартной модели и предсказанием (2.2) для модели

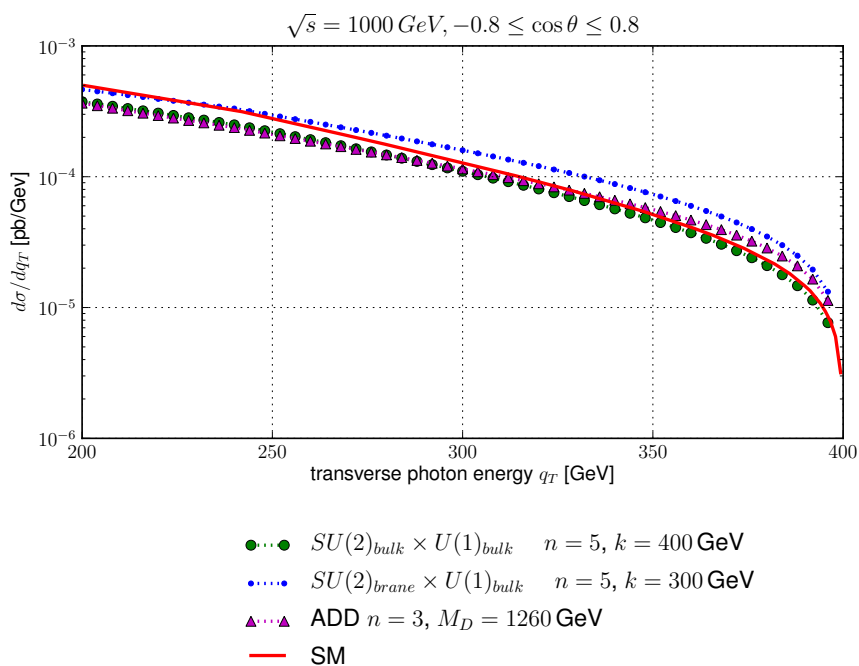


Рис. 2.2. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{nothing}$ при энергии $\sqrt{s} = 1 \text{ ТэВ}$, проинтегрированное по углу вылета фотона в интервале $-0.8 < \cos \theta < 0.8$.

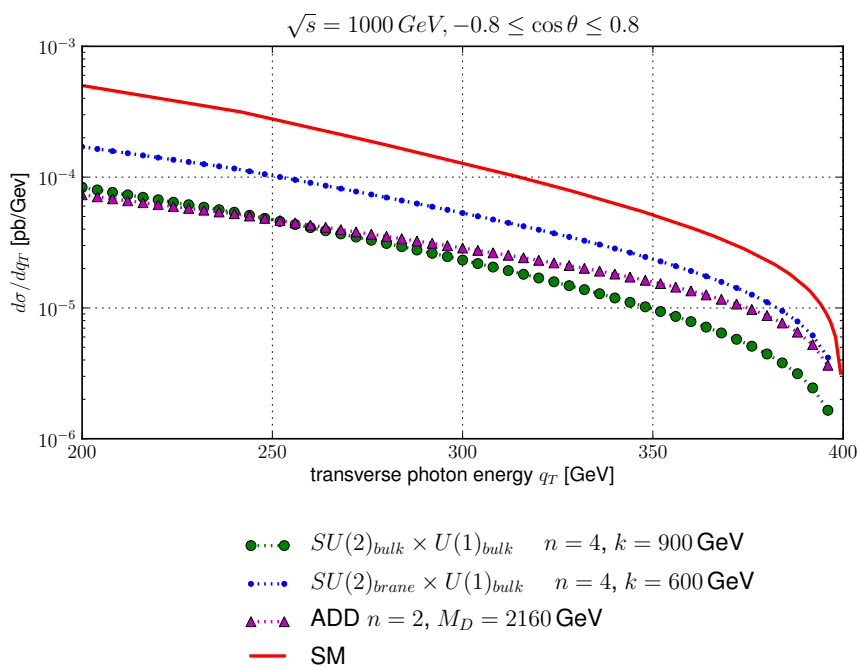


Рис. 2.3. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{nothing}$ при энергии $\sqrt{s} = 1 \text{ ТэВ}$, проинтегрированное по углу вылета фотона в интервале $-0.8 < \cos \theta < 0.8$.

АДД.

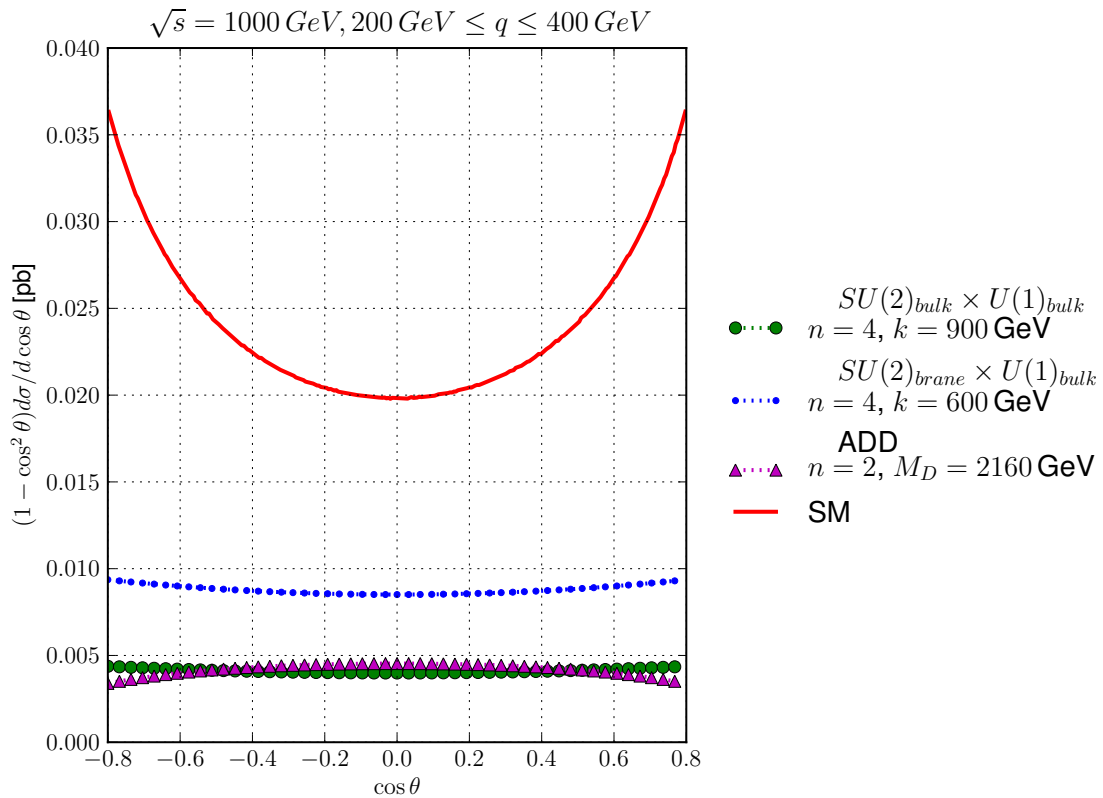


Рис. 2.4. Дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{”ничто”}$ при энергии $\sqrt{s} = 1$ ТэВ, проинтегрированное по импульсу фотона в интервале $200 \text{ ГэВ} < q < 400 \text{ ГэВ}$.

На Рис. 2.2 и 2.3 показано дифференциальное сечение рассеяния процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{”ничто”}$ как функция поперечного импульса фотона q_T при энергии частиц в системе центра масс, равной $\sqrt{s} = 1$ ТэВ; угол θ проинтегрирован в интервале $-0.8 < \cos \theta < 0.8$. Значения для АдС кривизны k взяты из таблицы 2.1. Значения параметра M_D выбраны таким образом, чтобы сигналы в модели АДД и РС2- n были равны друг другу при проинтегрировании сечений в пределах $-0.8 < \cos \theta < 0.8$ и $200 \text{ ГэВ} < q < 400 \text{ ГэВ}$. Условие $q < 400 \text{ ГэВ}$ наложено для того, чтобы исключить резонансный пик Z бозона при интегрировании по фазовому объему. Из Рис. 2.2 и 2.3 следует, что эффект, который мы изучаем, может быть значительным (особенно при $n = 5$) даже при жестких ограничениях, накладываемых на параметры невидимым распадом Z -бозона. С другой стороны, форма сигнала q_T распре-

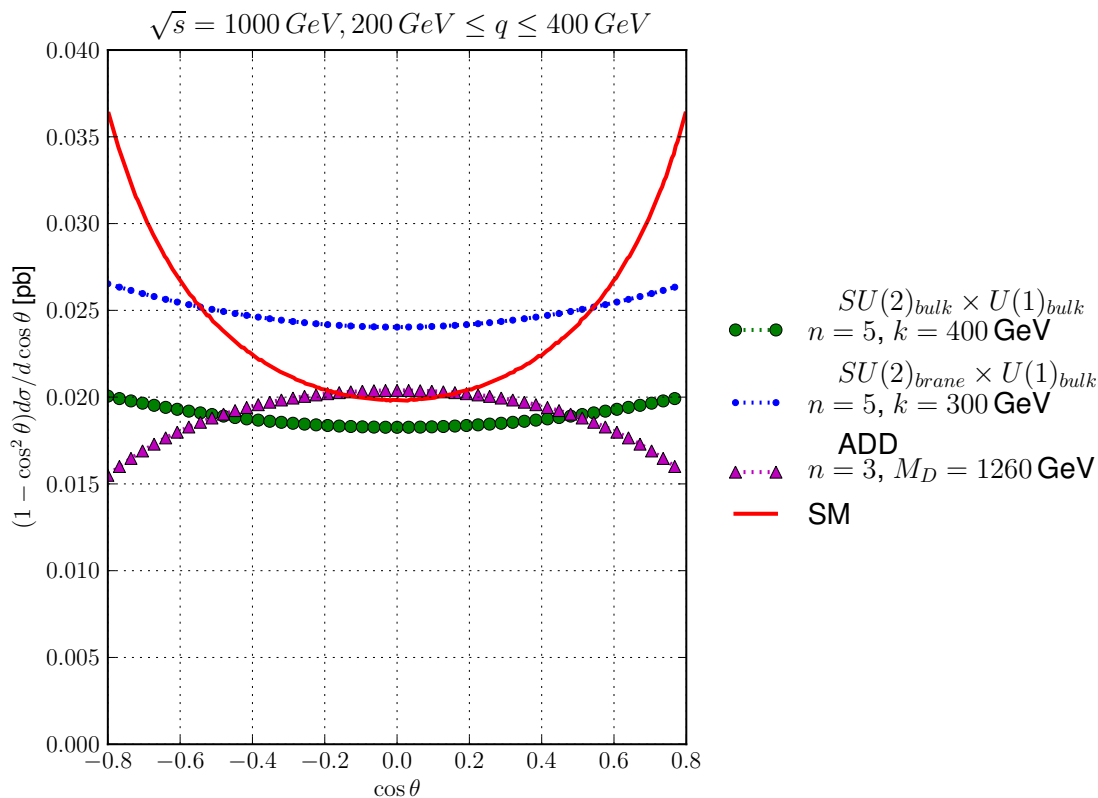


Рис. 2.5. Дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{”ничто”}$ при энергии $\sqrt{s} = 1$ ТэВ, проинтегрированное по импульсу фотона в интервале $200 \text{ ГэВ} < q < 400 \text{ ГэВ}$.

деления не сильно отличается от фона стандартной модели и предсказания модели АДД.

На Рис. 2.4 и 2.5 показаны дифференциальные сечения рассеяния при энергии $\sqrt{s} = 1$ ТэВ, проинтегрированные в интервале $200 \text{ GeV} < q < 400 \text{ GeV}$, как функции $\cos \theta$. Отметим, что наши предсказания можно отличить от сигнала модели АДД и фона стандартной модели по угловому распределению вылета фотона при больших поперечных импульсах. Таким образом, на столкновительных экспериментах по e^+e^- аннигиляции возможна проверка моделей мира на бране с $n \geq 5$, в то время как поиск моделей с $n \leq 4$ представляется затруднительным.

2.5 Результаты

Сформулируем результаты, которые были представлены в Главах 1 и 2. Были изучены два феноменологических расширения стандартной модели на фоне модифицированной метрики РС2- n . Из измерений невидимой ширины распада Z бозона были получены ограничения на параметры модели. В данных моделях были вычислены дифференциальные сечения рассеяния процессов $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{"ничто"}$. Было показано, что искомый сигнал может быть существенным при числе компактных дополнительных измерений $n \geq 5$. В следующей главе мы проведем анализ процессов с потерей энергии в конечном состоянии в экспериментах на БАК.

Глава 3

Рождение недетектируемых частиц в экспериментах на БАК

С точки зрения проверки модифицированной модели РС2- n в экспериментах на БАК наибольший интерес представляет одноструйные процессы с потерей энергии в конечном состоянии

$$pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk}), \quad (3.1)$$

где адронная струя образуется либо из кварка, либо из глюона, а нейтральные частицы Z_{bulk} и γ_{bulk} уносят энергию в дополнительные измерения. Соответствующие фейнмановские диаграммы партонных столкновений изображены на Рис. 3.1. В этой главе мы выведем сечение рассеяния процесса (3.1), просуммировав соответствующие сечения для калуца-клейновских мод Z_{bulk} и γ_{bulk} бозонов. За основу взята модель локализации калибровочных полей, рассмотренная в разделе 1.3. В Главе 1 было показано, что фазовый объем частицы, вылетающей с браны, включает интегрирование по инвариантной массе в объемлющем пространстве m (см. выражение (1.20)). Дифференциальное сечение рассеяния партонных подпроцессов $\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk}(\gamma_{bulk})$, $g\bar{q} \rightarrow \bar{q}Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ и $gq \rightarrow qZ_{bulk}(\gamma_{bulk})$ запишется в виде

$$d\sigma^{ij} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j - p_k - q) \frac{\overline{|\mathcal{M}^{ij}|^2}}{4N_{ij}I} \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3 2p_k^0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} dm, \quad (3.2)$$

где $I = (p_i p_j)$ - лоренц-инвариантный фактор, m четырехмерная инвариантная масса либо Z_{bulk} бозона либо γ_{bulk} фотона. Дисперсионное соотношение для них записывается в виде $m^2 = q^2$. Индексы i, j нумеруют входящие, а k исходящие партонные состояния (q, \bar{q}, g); массой кварков мы пренебрегаем.

Суммирование

$$\overline{\sum} = \frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{col}$$

ведется по поляризации и цвету сталкивающихся частиц. Фактор N_{ij} появляется из-за цветового усреднения, для соответствующих индексов он равен

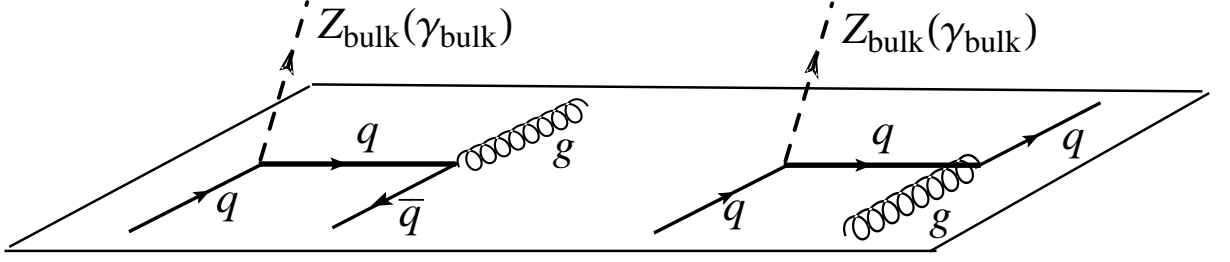


Рис. 3.1. Партонные амлитуды процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{\text{bulk}}(\gamma_{\text{bulk}})$.

$$N_{\bar{q}q} = N_c^2 \text{ и } N_{\bar{q}g} = N_{qg} = N_c(N_c^2 - 1).$$

Энергии образующегося партона и частицы, вылетающей в объемлющее пространство, равны $p_k^0 = |\mathbf{p}_k|$ и $q^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}$, соответственно. Четырех-векторы импульсов сталкивающихся партонов запишем в виде

$$p_i = (x_1\sqrt{s}/2, 0, 0, x_1\sqrt{s}/2), \quad p_j = (x_2\sqrt{s}/2, 0, 0, -x_2\sqrt{s}/2),$$

где \sqrt{s} - энергия протонов в системе центра масс, а x_1 и x_2 - доли импульсов партонов по отношению к протонам. Введем обозначения $p_z = p_{iz} + p_{jz}$, $p_T = \sqrt{p_{k1}^2 + p_{k2}^2}$ и $p_{kz} = p_T \sinh y$, где y - быстрота исходящего партона, а p_T - его поперечный импульс. Тогда энергии вылетающих частиц запишутся в виде

$$p_k^0 = \sqrt{p_T^2 + p_{kz}^2} = p_T \cosh y$$

$$q^0 = \sqrt{m^2 + p_T^2 + (p_z - p_T \sinh y)^2}.$$

Переменные Мандельштама для исходной реакции равны

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (p_i + p_j)^2 = x_1 x_2 s, \\ \hat{t} &= (p_i - p_k)^2 = -x_1 p_T \sqrt{s} e^{-y}, \\ \hat{u} &= (p_j - p_k)^2 = -x_2 p_T \sqrt{s} e^y. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соотношение $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = M^2$ дает

$$M^2 = x_1 x_2 s \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x_T}{x_2} e^{-y} - \frac{1}{2} \frac{x_T}{x_1} e^y \right) \geq 0, \quad (3.4)$$

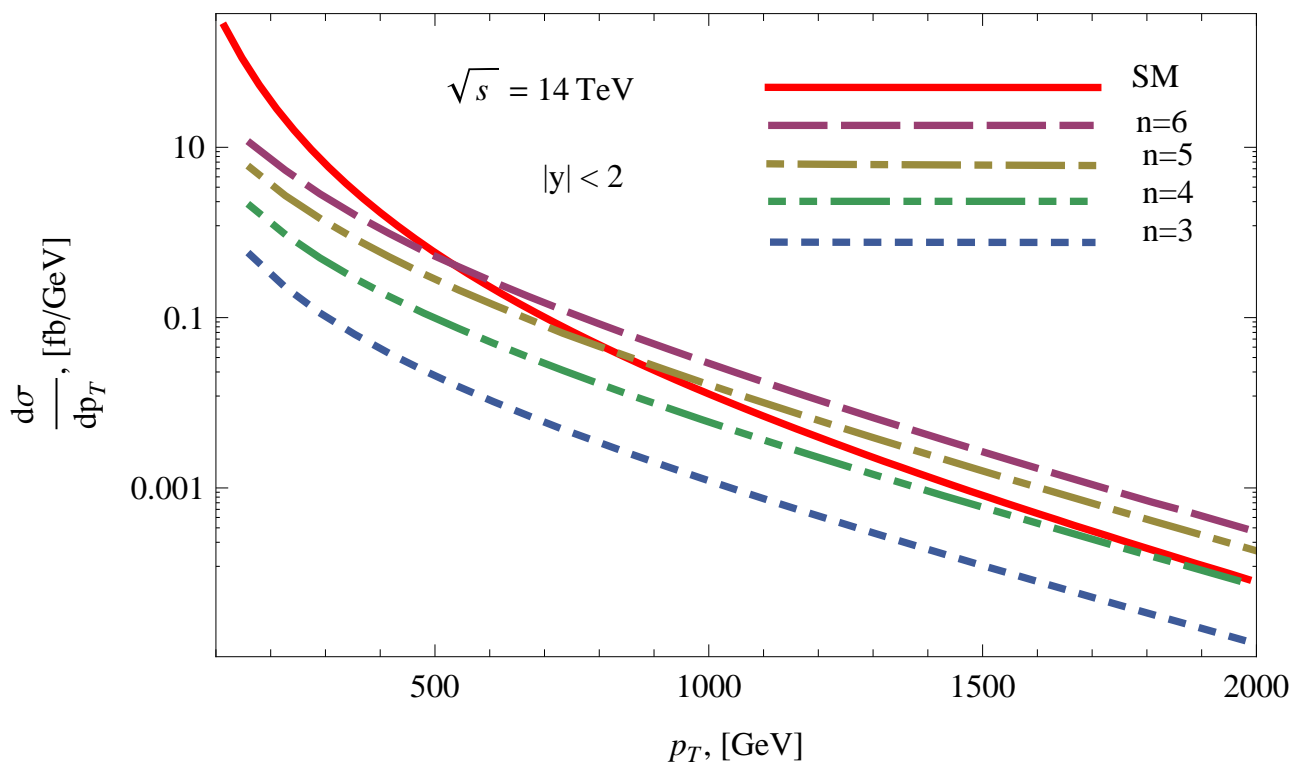


Рис. 3.2. Дифференциальные сечения процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ (пунктирные линии) в зависимости от поперечного импульса джета p_T для различного числа компактных дополнительных измерений $n = 3, 4, 5, 6$. Быстрота джета проинтегрирована в интервале $|y| < 2$. Фон Стандартной модели $pp \rightarrow \text{jet} + \nu\bar{\nu}$ показан непрерывной линией. Энергия центра масс протонов равна $\sqrt{s} = 14$ ТэВ. Значения k представлены в таблице 2.1

где M - инвариантная масса частицы в объемлющем пространстве, а $x_T = 2p_T/\sqrt{s}$ - поперечная доля энергии вылетающего партона. Неравенство (3.4) определяет допустимую кинематическую область параметров для частицы, вылетающей с браны.

Дифференциальное сечение процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ запишется в

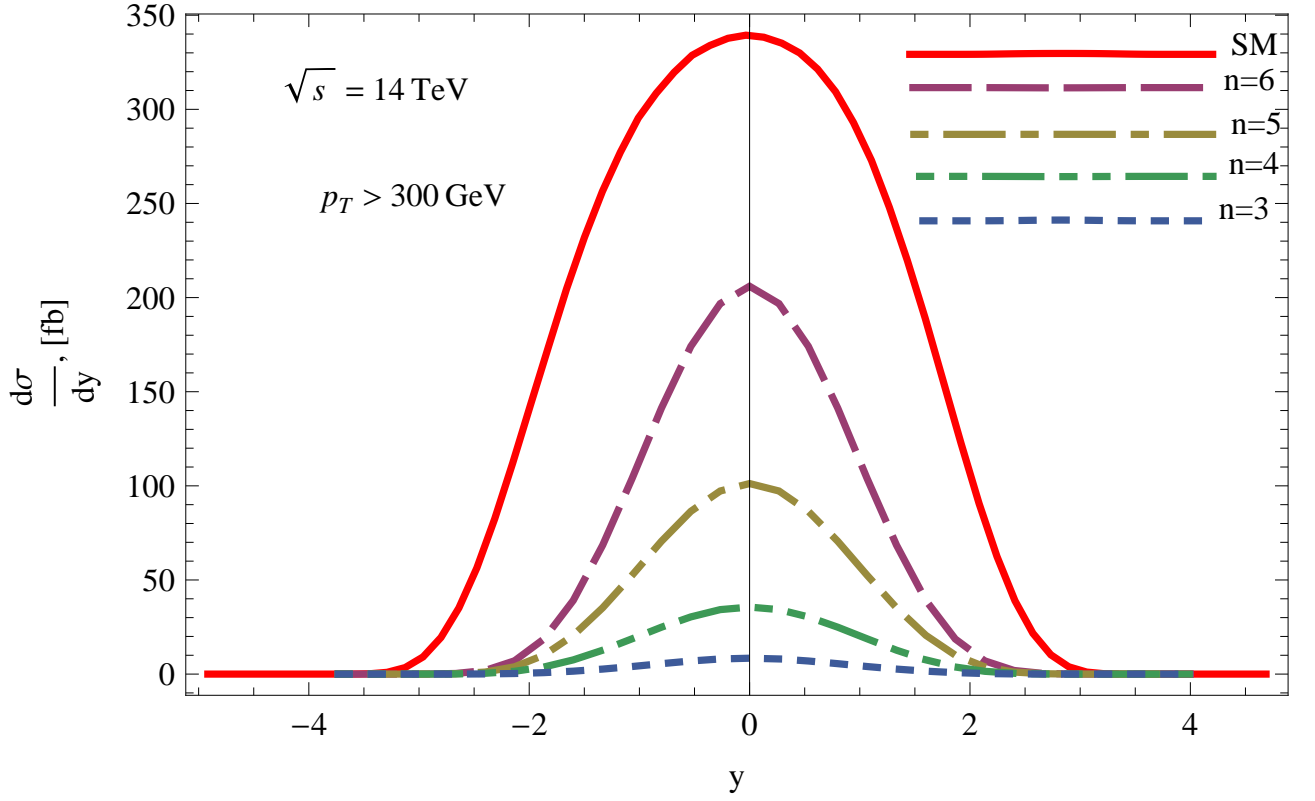


Рис. 3.3. Дифференциальные сечения процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ (пунктирные линии) в зависимости от быстроты джета y для различного числа компактных дополнительных измерений $n = 3, 4, 5, 6$. Поперечный импульс джета проинтегрирован в интервале $p_T > 300$. Фон Стандартной модели $pp \rightarrow \text{jet} + \nu\bar{\nu}$ показан непрерывной линией. Энергия центра масс протонов равна $\sqrt{s} = 14$ ТэВ. Значения k представлены в таблице 2.1.

виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dp_T dy}(pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})) &= \sum_{q=u,d} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \theta(m^2) \\
&\times \left\{ \left[f_q(x_1, \mu) f_{\bar{q}}(x_2, \mu) + f_q(x_2, \mu) f_{\bar{q}}(x_1, \mu) \right] \frac{d^2\sigma}{dp_T dy}(\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk}(\gamma_{bulk})) \right. \\
&+ \left(\left[f_q(x_1, \mu) f_g(x_2, \mu) + f_{\bar{q}}(x_1, \mu) f_g(x_2, \mu) \right] \frac{d^2\sigma}{dp_T dy}(qg \rightarrow qZ_{bulk}(\gamma_{bulk})) \right. \\
&\left. \left. + \left[f_q(x_2, \mu) f_g(x_1, \mu) + f_{\bar{q}}(x_2, \mu) f_g(x_1, \mu) \right] \frac{d^2\sigma}{dp_T dy}(gq \rightarrow qZ_{bulk}(\gamma_{bulk})) \right) \right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где $f_i(x, \mu)$ партонные распределения. Партонные дифференциальные сечения получены в результате интегрирования выражения (3.2) по dm и d^3q

$$\frac{d\sigma}{dp_T dy}(ij \rightarrow kZ_{bulk}(\gamma_{bulk})) = \frac{p_T}{8\pi N_{ij} M x_1 x_2 s} \sum \overline{|\mathcal{M}(ij \rightarrow kZ_{bulk}(\gamma_{bulk}))|^2}. \quad (3.6)$$

Квадраты матричных элементов подпроцессов подчиняются соотношениям кроссинг-симметрии

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}(gq \rightarrow qZ_{bulk}(\gamma_{bulk}))|^2 = -\overline{\sum} |\mathcal{M}(\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk}(\gamma_{bulk}))|^2 \Big|_{\hat{s} \leftrightarrow \hat{t}}, \quad (3.7)$$

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}(qg \rightarrow qZ_{bulk}(\gamma_{bulk}))|^2 = -\overline{\sum} |\mathcal{M}(\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk}(\gamma_{bulk}))|^2 \Big|_{\hat{s} \leftrightarrow \hat{u}}. \quad (3.8)$$

Благодаря соотношениям (3.7) и (3.8), достаточно вычислить лишь квадрат амплитуды одного подпроцесса, для примера рассмотрим $\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk}$. Для Z_{bulk} бозона в конечном состоянии имеем

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |\mathcal{M}(\bar{q}q \rightarrow gZ_{bulk})|^2 &= 8\pi^2 \alpha \alpha_S (N_c^2 - 1) \times \\ &\times \sum_{\lambda=L,R} (I_{q\lambda})^2 \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m^2 \hat{s}^2}{\hat{t}\hat{u}} \cdot \frac{2}{nk} Z^2(0, M), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi)$ и $\alpha_S = g_S^2/(4\pi)$ - константы электромагнитного и сильного взаимодействия, фактор $I_{q\lambda}^Z$ - это комбинация изоспина $T_{q\lambda}^3$ и гиперзаряда слабого взаимодействия $Y_{q\lambda}$:

$$I_{q\lambda}^Z = T_{q\lambda}^3 \frac{\cos \theta_W}{\sin \theta_W} - \frac{Y_{q\lambda}}{2} \frac{\sin \theta_W}{\cos \theta_W}.$$

$Z^2(0, M)$ - это квадрат волновой функции Z_{bulk} бозона на бране. Объединяя выражения (1.23-1.25), мы получим:

$$Z(0, M) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2k}{M}} \frac{1}{\sqrt{[N_{\nu-1}(\frac{M}{k}) + \frac{k}{M}(\frac{n}{2} + 1 - \nu)N_{\nu}(\frac{M}{k})]^2 + [J_{\nu} \leftrightarrow N_{\nu}]^2}}. \quad (3.10)$$

Как было отмечено в разделе 1.1.2 (см. формулу 1.29), $Z(0, M)$ определяет взаимодействие фермионов с модами массивного Z_{bulk} бозона. Поэтому полезно рассмотреть эффективную константу связи $\mathbf{g}_{\text{eff}}^Z(m) = \sqrt{\frac{2}{nk}} Z(0, M)$. Раскрывая выражения для функций Бесселя в (3.10) при больших значениях аргумента k/M , мы получим $\mathbf{g}_{\text{eff}}^Z(m) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi nk}}$. График зависимости $[\mathbf{g}_{\text{eff}}^Z(M)]^2$ от M показан на Рис. 3.4. Вдали от полюса Z_{bulk} бозона эффективная константа связи насыщается при увеличении M . Отметим, что кривые,

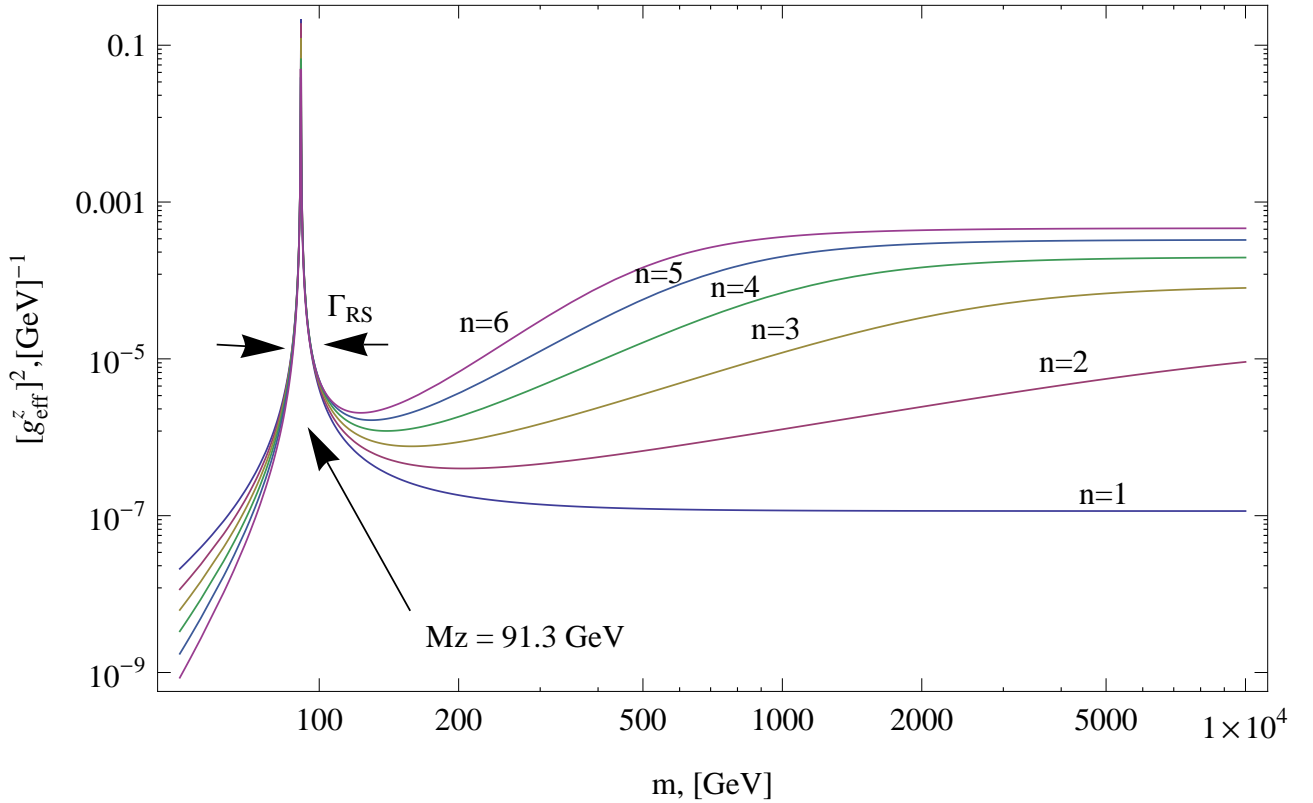


Рис. 3.4. Эффективная пятимерная константа связи (волновая функция) квазилокализованного на бране Z бозона в зависимости от четырехмерной массы m для различного числа компактных дополнительных измерений n . Значения k даны в таблице 2.1.

изображенные на Рис. 3.4, построены при различных значениях параметра k , в соответствии с данными первой колонки Таб. 2.1. Поэтому, чем больше n , тем выше лежит асимптотика $[g_{\text{eff}}^Z(M)]^2$ при больших M . Если бы параметр k был фиксирован, эффективная константа падала бы с увеличением n по закону $g_{\text{eff}}^Z \sim n^{-1/2}$.

Квадрат амплитуды для γ_{bulk} бозона дается выражением

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |\mathcal{M}(\bar{q}q \rightarrow g\gamma_{\text{bulk}})|^2 &= 16\pi^2 \alpha \alpha_S (N_c^2 - 1) Q_q^2 \times \\ &\times \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m^2 \hat{s}^2}{\hat{t}\hat{u}} \cdot \frac{2}{nk} A^2(0, M), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $Q_u = 2/3$ и $Q_d = -1/3$ электрический заряд кварков. Эффективную константу взаимодействия фермионов и γ_{bulk} фотона можно получить, объ-

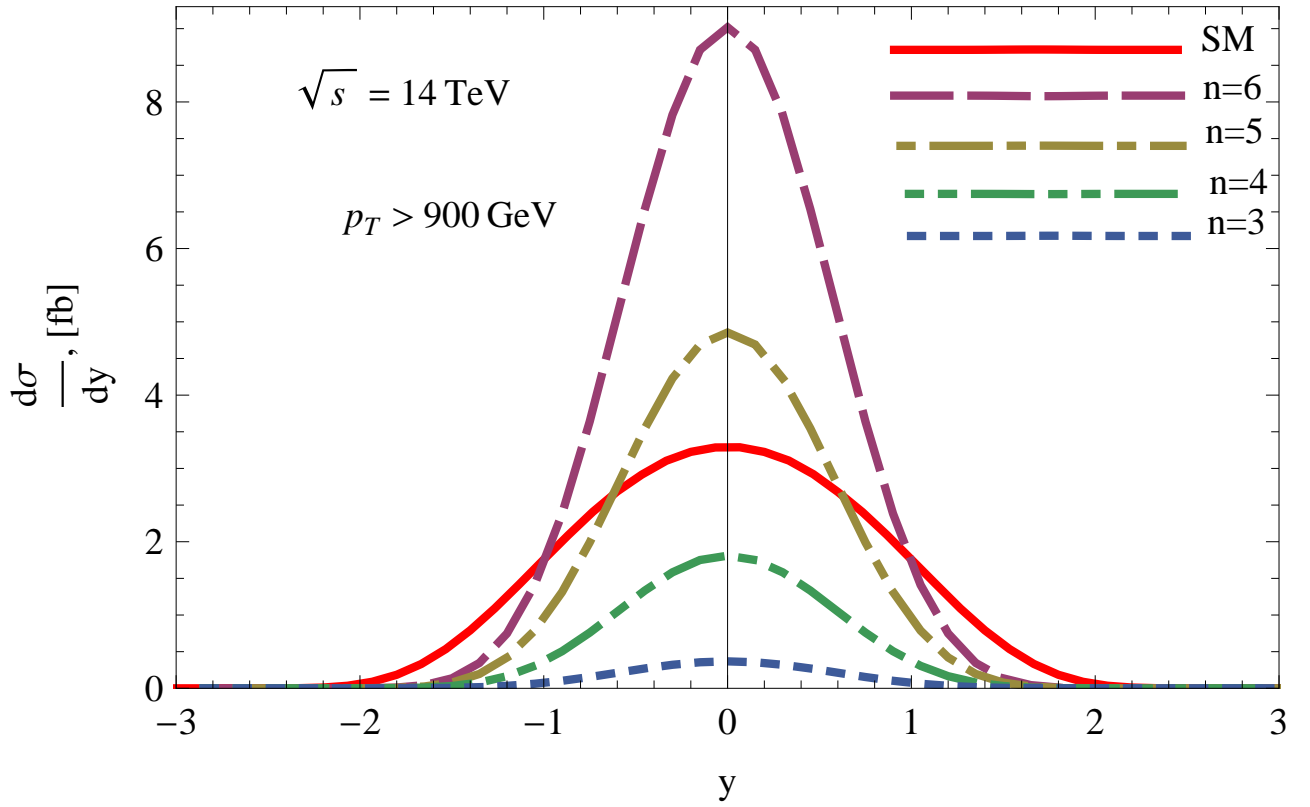


Рис. 3.5. То же, что на Рис. 4.3, но для поперечного импульса джета, проинтегрированного в интервале $p_T > 900$ ГэВ.

единыя выражения (1.9), (1.10) и (1.15):

$$A(0, M) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2k}{M}} \frac{1}{\sqrt{N_{\nu-1}^2\left(\frac{M}{k}\right) + J_{\nu-1}^2\left(\frac{M}{k}\right)}}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим величину $\mathbf{g}_{\text{eff}}^\gamma(M) = \sqrt{\frac{2}{nk}} A(0, M)$. Для сравнительно легких мод $M/k \ll 1$ она подавлена,

$$\mathbf{g}_{\text{eff}}^\gamma(m) \simeq \sqrt{\frac{2}{nk} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}} \left(\frac{M}{2k}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Однако это подавление исчезает для тяжелых мод, $\mathbf{g}_{\text{eff}}^\gamma(M) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi nk}}$ при $M/k \gg 1$. На Рис. 3.6 показаны зависимости $[\mathbf{g}_{\text{eff}}^\gamma(M)]^2$ для различного числа компактных дополнительных измерений n .

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, константы моделей с бесщелевым спектром фотонов, ограничены экспериментами как низкоэнергетической физики [28], так и астрофизики [29]. Мы, однако, не будем использовать

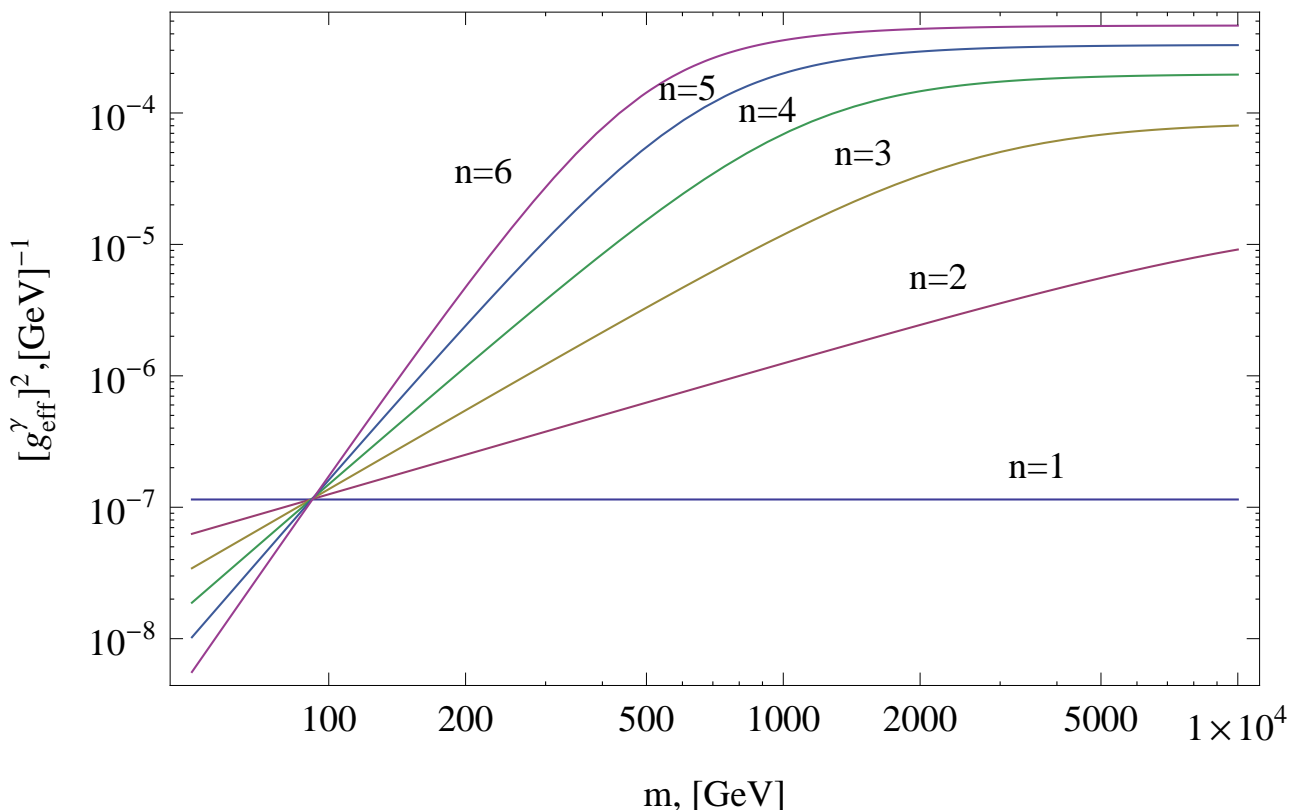


Рис. 3.6. Эффективная пятимерная константа связи (волновая функция) нелокализованного на бране фотона в зависимости от четырехмерной массы m для различного числа компактных дополнительных измерений n . Значения k даны в таблице 2.1.

эти ограничения, поскольку они получены в рамках моделей, отличающихся от нашей способом локализации калибровочных полей на бране. Во-вторых, взаимодействия нулевой моды фотона с заряженными полями в объемлющем пространстве может привести в патологическим инфракрасным расходимостям [44]. Следовательно, взаимодействие квазилокализованного Z - бозона с полями W^\pm - бозонов в объемлющем пространстве также может привести к появлению патологий на однопетлевом уровне. Это означает, что рассмотрение $SU(2)_L$ калибровочного сектора в объемлющем пространстве является потенциально опасным. В Главе 4 мы исследуем эту проблему на однопетлевом уровне в модели КЭД с калибровочным полем, локализованным на бране и фермионами, распространяющимися в объемлющем пространстве. А в разделе 3.1 продолжим анализ процессов с потерей энергии в модели РС2- n на

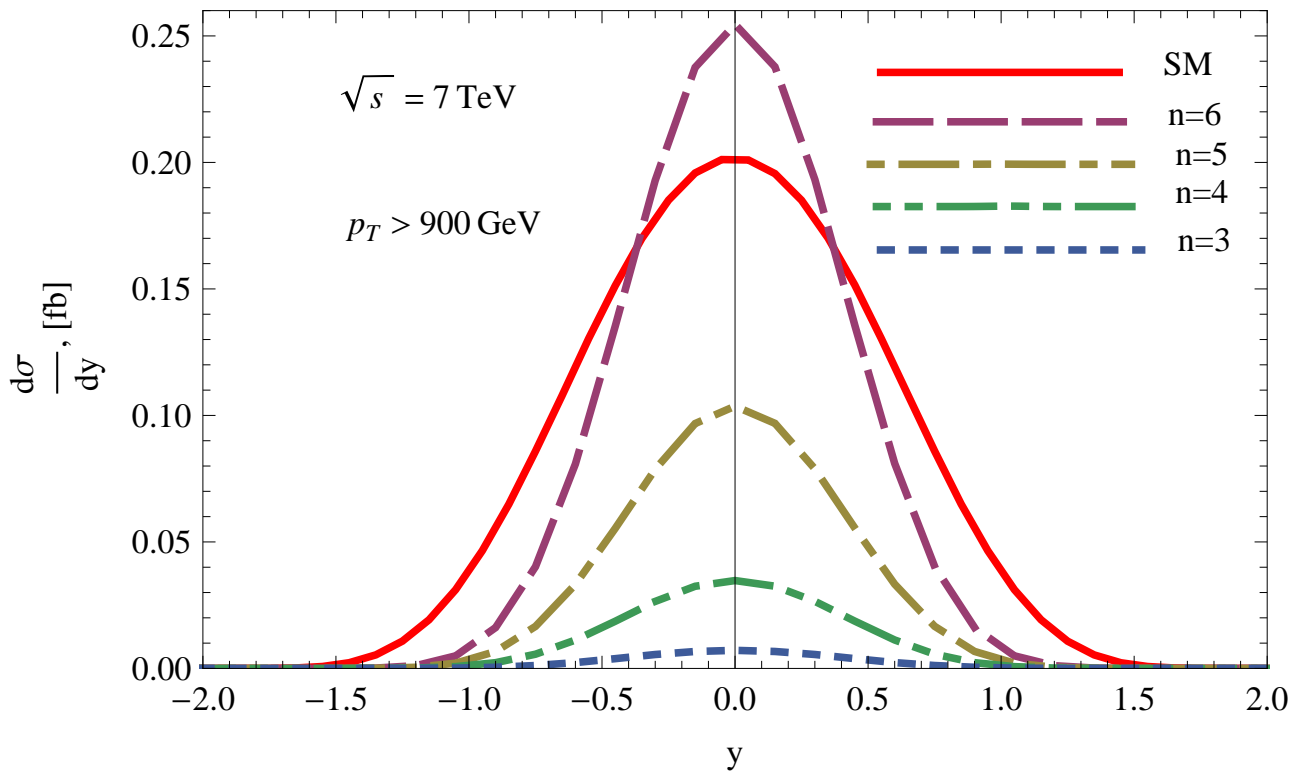


Рис. 3.7. То же, что и на Рис. 3.5, но для энергии протонов в системе центра масс 7 ТэВ.

древесном уровне.

3.1 Сигнал на БАК

В данном разделе мы построим дифференциальные сечения рассеяния процесса $pp \rightarrow \text{jet} + E_T$ для различных n в зависимости от поперечного импульса и быстроты адронной струи. Потеря энергии в данной реакции обусловлена Z_{bulk} бозоном и γ_{bulk} фотоном, которые вылетают с браны. Мы сравним эти сечения с фоном стандартной модели, который обусловлен процессом $pp \rightarrow \text{jet} + \nu\bar{\nu}$. Дифференциальные распределения для фона были построены при помощи программы CompNep [32]. В численном анализе сигнала мы использовали партонные функции GRV [49] в лидирующем порядке теории возмущений. Масштаб факторизации партонных распределений был фиксирован при $\mu = 1$ ТэВ. При расчетах использовались только партонные функции для u и d кварков, поскольку вклад остальных ароматов кварков оказался

пренебрежимо малым.

Рассмотрим сначала случай столкновения протонов с энергией 14 ТэВ в системе центра масс. На Рис. 3.2 показаны дифференциальные сечения процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ в зависимости от поперечного импульса адронной струи для различного числа компактных дополнительных измерений $n = 3, 4, 5, 6$. Быстрота джета была проинтегрирована в интервале $|y| < 2$ как для сигнала с потерей энергии, так и для фона Стандартной модели. Для $n = 6$ и $n = 5$ сечение сигнала превосходит фон при $p_T > 500$ ГэВ и $p_T > 750$ ГэВ, соответственно. А для $n = 3, 4$ сигнал лежит ниже фона. Из Рис. 3.2 следует, что сечение процесса $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ растет при увеличении n . Это связано с тем, что большие значения k соответствуют меньшим n , см. Таб. 2.1. В главе 1 было отмечено, что эффективные константы взаимодействия калибровочных полей в объемлющем пространстве $g_{\text{eff}}^2(m)$ стремятся к константам в области больших m . Поэтому для каждого данного числа компактных дополнительных измерений n отношение сигнала к фону тем больше, чем выше выше поперечный импульс адронной струи p_T . Распределения по быстроте джета с обрезанием по поперечному импульсу $p_T > 300$ GeV показаны на Рис. 3.3. Эти распределения коррелируют с диаграммами, изображенными на Рис. 3.2, поскольку при интегрировании поперечного импульса в интервале $300 \text{ GeV} < p_T < 750 \text{ GeV}$ сечение фона Стандартной модели превосходит сигнал. Чтобы увеличить сигнал по сравнению с фоном рассмотрим обрезание по импульсу в интервале $p_T > 900$ GeV. На Рис. 3.5 изображены соответствующие распределения по быстроте адронной струи. В случае $n = 5, 6$ сечение рассеяния сигнала превосходит фон стандартной модели; для $n = 4$ сигнал также не является пренебрежимо малым. Эти результаты также согласуются с p_T распределением, показанным на Рис. 3.2.

Для того чтобы оценить светимость на БАК \mathcal{L} , необходимую для откры-

n	3	4	5	6
$\mathcal{L}, \text{fb}^{-1}$	7.1×10^2	3.7×10^1	7.5	3.1
N_S	3.6×10^2	10^2	5×10^1	3.8×10^1

Таблица 3.1. Интегральная светимость \mathcal{L} и число событий N_S сигнала $pp \rightarrow \text{jet} + Z_{bulk}(\gamma_{bulk})$ для различного числа компактных дополнительных измерений n , соответствующие проверке модели РС2- n на БАК при уровне достоверности в 5σ . Энергия протонных столкновений $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$. Быстрота и поперечный импульс джета проинтегрированы в интервалах $|y| < 2$, $p_T > 900 \text{ ГэВ}$. Сечение фона $\sigma_B = 6.9 \text{ fb}$. Значения параметра k даны в таблице 2.1

тия дополнительных измерений на уровне достоверности 5σ , мы потребуем

$$N_S / \sqrt{N_S + N_B} > 5,$$

где $N_S = \mathcal{L} \sigma_S$ и $N_B = \mathcal{L} \sigma_B$ количество событий сигнала и фона соответственно, а σ_S и σ_B их сечения рассеяния, проинтегрированные по быстроте и поперечному импульсу в интервалах $|y| < 2$ и $p_T > 900 \text{ ГэВ}$. Интегральные светимости и соответствующие им числа событий сигнала изображены в Таб. 3.1 для различных n .

Рассмотрим теперь случай столкновения протонов с энергией в системе центра масс $\sqrt{s} = 7 \text{ ТэВ}$. На Рис. 3.8 изображены соответствующие сечения рассеяния в зависимости от поперечного импульса адронной струи; быстрота проинтегрирована в интервале $|y| < 2$. Очевидно, что при такой энергии обнаружение сигнатур модели РС2- n на БАК усложняется, и могут быть протестированы только случаи с $n \geq 6$. Это также очевидно из дифференциальных распределений по быстроте адронной струи, которые изображены на Рис. 3.7; поперечный импульс джета проинтегрирован в интервале $p_T > 900 \text{ GeV}$. В этом случае интегральная светимость, необходимая для обнаружения дополнительных измерений на уровне достоверности 5σ , составляет $\mathcal{L} = 200 \text{ фб}^{-1}$ даже при $n = 6$.

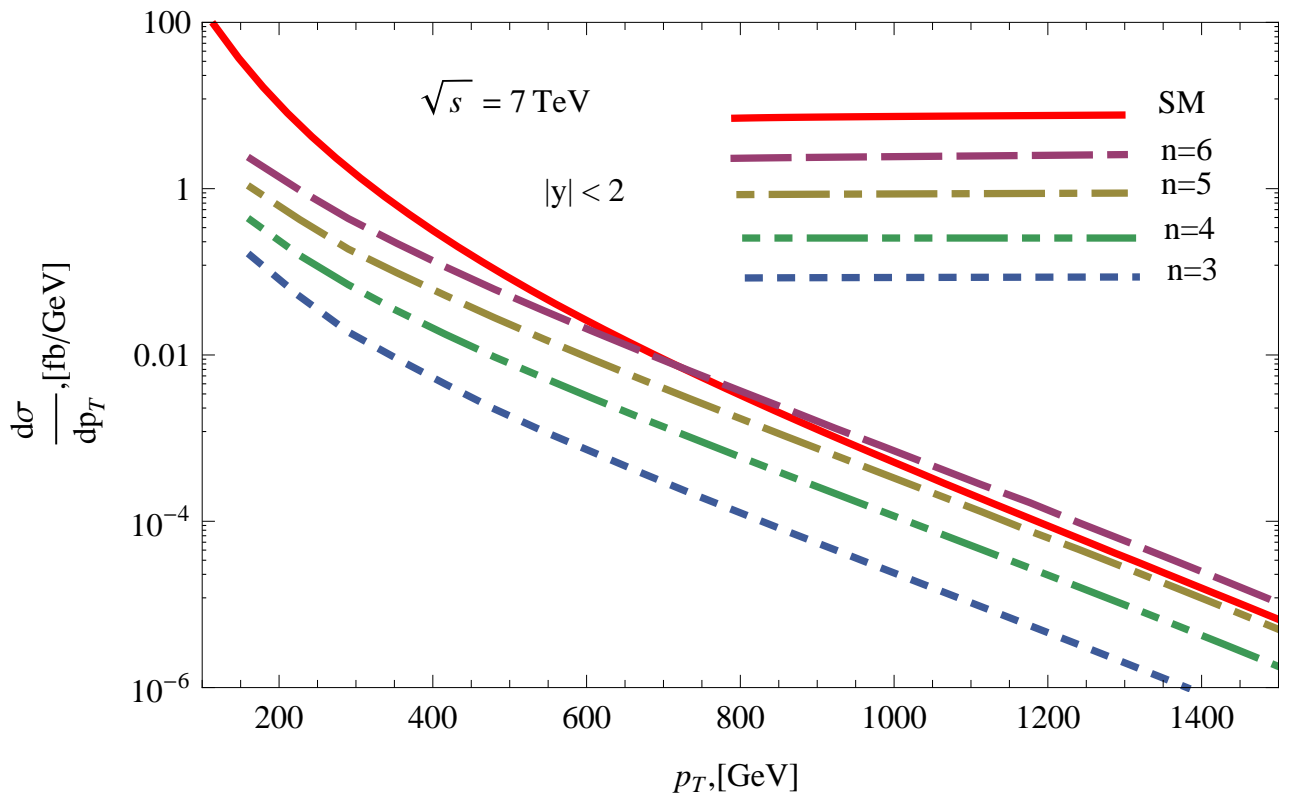


Рис. 3.8. То же, что и на Рис. 3.2, но для энергии протонов в системе центра масс 7 ТэВ.

3.1.1 Результаты

Сформулируем результаты, которые были получены в главах 3 и 3.1. На основе модифицированной модели мира на бране РС2- n были получены дифференциальные сечения рождения Z_{bulk} бозона и γ_{bulk} фотона на БАК в процессе с потерей энергии в конечном состоянии $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$. Построены дифференциальные распределения данного процесса в зависимости от быстроты и поперечного импульса адронной струи. Мы сравнили данные сечения рассеяния с фоном Стандартной модели, в котором потеря энергии обусловлена нейтрино в конечном состоянии $pp \rightarrow \text{jet} + \bar{\nu}\nu$. Численный анализ показал, что, с учетом существующих ограничений на параметр k , модели с числом компактных дополнительных измерений $n \geq 4$ могут быть проверены на БАК при энергии протонов равной 14 ТэВ в системе центра масс. Однако при энергии в 7 ТэВ могут быть протестированы модели только с $n \geq 6$, так как в этом случае снижается чувствительность эксперимента к поиску

дополнительных пространственных измерений.

Глава 4

Петлевые поправки к пропагатору векторного поля с браны на брану

4.1 Модель доменной стенки

В данном разделе мы рассмотрим модель мира на бране с векторным полем и фермионами, распространяющимися в объемлющем пятимерном евклидовом пространстве [44]. Действие модели записывается в виде

$$S_{DW}[A, \psi] = \int d^4x dz \left[\frac{1}{4} \phi^2(z) F_{MN}^2 + i \bar{\Psi} \Gamma^M (\partial_M - ig_5 A_M) \Psi \right], \quad (4.1)$$

где индексы M, N нумеруют пятимерное пространство, $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$, а

$$\phi(z) = 1/\text{ch}\alpha z \quad (4.2)$$

это полевая конфигурация, которая обеспечивает локализацию на бране нулевой моды векторного поля; параметр $1/\alpha$ - толщина браны. Схожие механизмы локализации калибровочных полей на топологических дефектах высших размерностей представлены в работах [50–52]. Для простоты мы не рассматриваем механизм локализации фермионов на бране и будем считать, что они распространяются в плоском пятимерном пространстве. Пятимерная константа взаимодействия фермионов с векторным полем связана с четырехмерной константой соотношением

$$g_5 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} g_4. \quad (4.3)$$

Введем перемасштабированное векторное поле B_M , которое связано с A_M следующим образом

$$B_M = \phi A_M. \quad (4.4)$$

Лагранжиан векторного поля B_M , после интегрирования действия по частям,

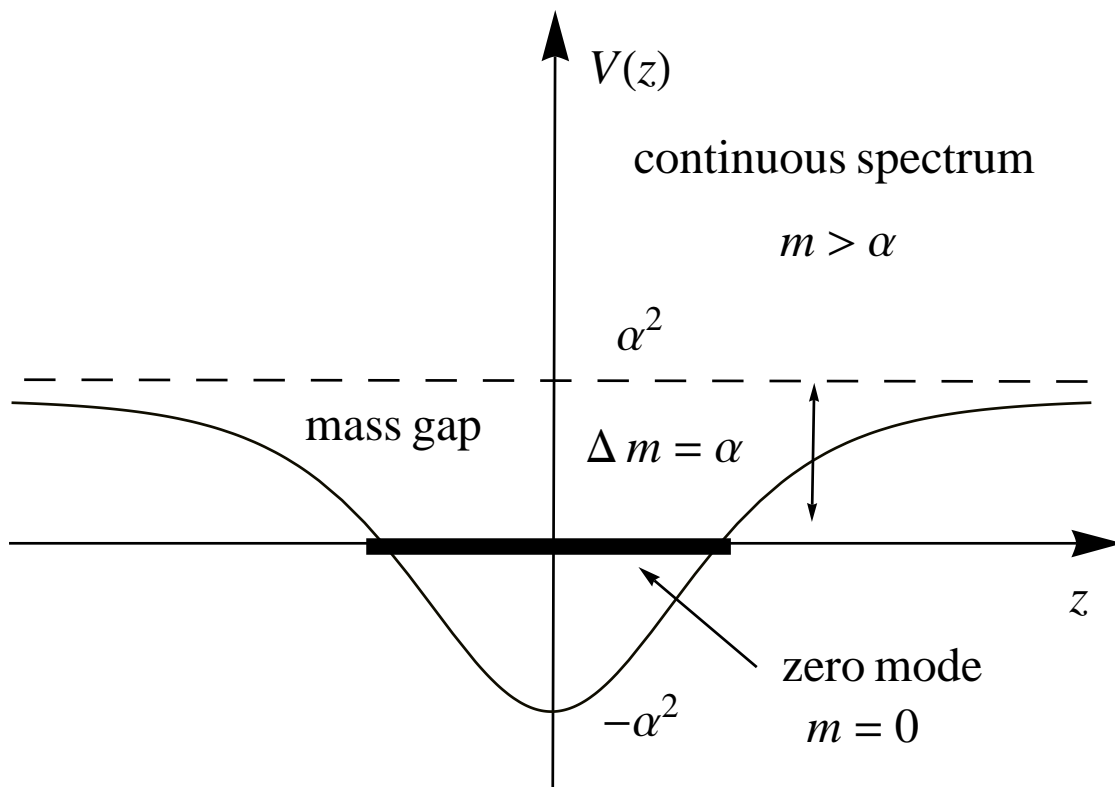


Рис. 4.1. Эффективный потенциал для векторного поля в модели с доменной стенкой.

принимает вид

$$\mathcal{L}[B] = \frac{1}{2} B_\mu \left[\eta_{\mu\nu} \left(-\partial_\lambda^2 - \partial_z^2 + \frac{\phi''}{\phi} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \right] B_\nu - \frac{1}{2} B_z \partial_\mu^2 B_z - B_z \left(\frac{\phi'}{\phi} - \partial_z \right) \partial_\mu B_\mu, \quad (4.5)$$

здесь греческие индексы обозначают координаты четырехмерного пространства $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Введем калибровку $B_z = 0$. В такой калибровке рассмотрим компоненту B_μ , которая является поперечной $\partial_\mu B_\mu = 0$. Калуща-Клейновские моды $B^{(m)}(z)$ векторного поля B_μ подчиняются уравнению

$$\left(-\partial_z^2 + V(z) \right) B^{(m)}(z) = m^2 B^{(m)}(z), \quad V(z) = \frac{\phi''}{\phi} = \alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{\text{ch}^2 \alpha z}. \quad (4.6)$$

где m - четырехмерная масса. Спектр масс поля $B^{(m)}(z)$ определяется

квантово-механическим потенциалом

$$V(z) = \frac{\phi''}{\phi} = \alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{\text{ch}^2 \alpha z}.$$

У векторного поля в потенциале $V(z)$ имеется одно связанное состояние (см. Рис. 4.1), которое является нулевой модой:

$$B^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\text{ch} \alpha z}. \quad (4.7)$$

Эта мода нормирована на единицу в соответствии с лагранжианом (4.5). Уравнение (4.6) имеет также решение $B^{(m)}(z)$, которое соответствует непрерывному спектру, начинающемуся при $m = \alpha$. Таким образом, нулевая мода $B^{(0)}(z)$ отделена от высших возбуждений $B^{(m)}(z)$ массовой щелью $\Delta m = \alpha$.

Рассмотрим теперь пропагатор векторного поля B_μ с браны в объемлющее пространство, $G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \langle B_\mu(p, z) B_\nu(p, 0) \rangle$. Этот пропагатор подчиняется уравнению

$$\left(p^2 - \partial_z^2 + \alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{\text{ch}^2 \alpha z} \right) G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \eta_{\mu\nu} \delta(z). \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) имеет решение $G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \eta_{\mu\nu} G_B(p, z, 0)$ (см. Приложение 6), где

$$G_B(p, z, 0) = \frac{1}{4 \text{ch} \alpha z} \left(\frac{e^{-(\chi-\alpha)|z|}}{\chi - \alpha} + \frac{e^{-(\chi+\alpha)|z|}}{\chi + \alpha} \right), \quad (4.9)$$

а параметр χ дается выражением

$$\chi = \sqrt{p^2 + \alpha^2}. \quad (4.10)$$

Для дальнейших вычислений полезно также выписать выражение для пропагатора поля $A_\mu(p, z)$ с браны в объемлющее пространство

$$\langle A_\mu(p, z) A_\nu(p, 0) \rangle = \eta_{\mu\nu} G_B(p, z, 0) / \phi(z) \equiv \eta_{\mu\nu} G_A(p, z, 0), \quad (4.11)$$

где $G_A(p, z, 0)$ имеет вид

$$G_A(p, z, 0) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-(\chi-\alpha)|z|}}{\chi - \alpha} + \frac{e^{-(\chi+\alpha)|z|}}{\chi + \alpha} \right). \quad (4.12)$$

Значения векторных полей A_μ и B_μ совпадают на бране $z = 0$, совпадают также и их пропагаторы с браны на брану

$$G_A(p, 0, 0) = G_B(p, 0, 0) = \chi/(2p^2). \quad (4.13)$$

При низких энергиях, $p \ll \alpha$, в динамике векторного поля на бране основную роль играет нулевая мода. В этом случае пропагатор (4.12) принимает вид

$$G_A(p, 0, 0) = \alpha/(2p^2). \quad (4.14)$$

Из уравнений (4.10) и (4.12) следует, что при малых p

$$G_A(p, z, 0) = \frac{\alpha}{2p^2} \exp\left(-\frac{p^2|z|}{2\alpha}\right), \quad (4.15)$$

следовательно, векторная функция Грина с браны в объемлющее пространство $G_A(p, z, 0)$ медленно спадает при $z \rightarrow \infty$ в инфракрасном режиме. Нам также понадобится функция $G_A(p, z, 0)$ в импульсном представлении

$$\tilde{G}_A(p, p_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz G_A(p, z, 0) e^{ip_z z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\chi - \alpha)^2 + p_z^2} + \frac{1}{(\chi + \alpha)^2 + p_z^2} \right). \quad (4.16)$$

Из соотношений (4.10) и (4.16) найдем, что при $p_z \rightarrow 0$ и $p/\alpha \ll 1$, пропагатор $\tilde{G}_A(p, p_z)$ с браны с объемлющее пространство в импульсном представлении стремится к величине

$$\tilde{G}_A(p, p_z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(p_z^2 + p^4/(4\alpha^2))}. \quad (4.17)$$

Отметим, что выражение (4.17) отличается от пропагатора векторного поля с браны на брану в плоском пятимерном пространстве

$$\tilde{G}_A^{flat}(p, p_z) = \frac{1}{p^2 + p_z^2}. \quad (4.18)$$

В разделе 4.1.3 мы покажем, что слагаемое $p^4/(4\alpha^2)$ в знаменателе пропагатора (4.17) приводит к инфракрасной сингулярности в однопетлевом пропагаторе векторного поля с браны на брану.

Необходимо сделать замечание насчет нормировки поля A_M . Из выражений (4.2), (4.4) и (4.7) следует, что нулевая мода $B^{(0)}(z)$ соответствует полю $A^{(0)}(z)$, которое задается выражением

$$A^{(0)}(z) = \frac{1}{\phi(z)} B^{(0)}(z) \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{2}}. \quad (4.19)$$

Волновая функция нулевой моды (4.19) является константой по отношению к координате дополнительного измерения z . Тем не менее, нормировочный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \phi^2(z) |A^{(0)}(z)|^2 = 1 \quad (4.20)$$

конечен благодаря тому, что в действии (4.1) присутствует $\phi^2(z)$; иными словами, $\phi^2(z)$ играет роль сглаживающей функции для нулевой моды. Таким образом, $A^{(0)}(z)$ представляет собой фотон (нулевая векторная мода), локализованный на бране.

4.1.1 Спектральное разложение векторного пропагатора в модели доменной стенки

В данном разделе мы обсудим спектральное представление пропагатора (4.9). Для этого рассмотрим уравнение движения для векторного поля в модели с доменной стенкой

$$\left(-\partial_z^2 + \alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{\text{ch}^2 \alpha z} \right) B^{(m)}(z) = m^2 B^{(m)}(z) \quad (4.21)$$

Только четные решения уравнения (4.21) вносят вклад в древесный пропагатор (6.15). Нечетные моды в гладком потенциале обнуляются в точке $z = 0$. Четное решение уравнения (4.21) при $m > \alpha$ имеет вид

$$B^{(m)}(z) = C^{(m)} \text{ch}^2 \alpha z {}_2F_1(\tilde{a}, \tilde{b}; 1/2; -\text{sh}^2 \alpha z), \quad (4.22)$$

здесь ${}_2F_1(\tilde{a}, \tilde{b}; 1/2; -\text{sh}^2 \alpha z)$ - это гипергеометрическая функция с параметрами

$$\tilde{a} = 1 - ik/(2\alpha) \quad \tilde{b} = 1 + ik/(2\alpha)$$

где $k = \sqrt{m^2 - \alpha^2}$. Нулевая векторная мода ($m = 0$) записывается в виде

$$B^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\text{ch} \alpha z}. \quad (4.23)$$

Для больших значений аргумента

$$\xi = \text{ch} \alpha z$$

, выражение (4.22) разлагается в ряд

$$B^{(m)}(\xi) = C_m^{(e)} \left(\xi^{i\frac{k}{\alpha}} \frac{2^{-1+i\frac{k}{\alpha}}(-\alpha + ik)}{ik} + h.c. \right). \quad (4.24)$$

В терминах плоских волн выражение (4.24) переписывается в виде

$$B^{(m)}(z) = C^{(m)} \left(e^{ikz} \frac{(-\alpha + ik)}{2ik} + h.c. \right) \quad (4.25)$$

четные моды удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz B^{(m)}(z) B^{(m')\dagger}(z) = \delta(m - m'). \quad (4.26)$$

Следовательно, нормировочная константа $C^{(m)}$ равна

$$C^{(m)} = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 - \alpha^2}}{\pi m}}. \quad (4.27)$$

Рассмотрим теперь спектральное представление векторной функции гринна с браны в объемлющее пространство

$$G_B(p, z, 0) = \frac{B^{(0)}(z)B^{(0)}(0)}{p^2} + \int_{\alpha}^{+\infty} dm \frac{B^{(m)}(z)B^{(m)}(0)}{p^2 + m^2}. \quad (4.28)$$

Подставляя (4.23), (4.24) и (4.27) в (4.28), имеем

$$G_B(p, \xi, 1) = \frac{\alpha}{2\xi p^2} + \int_{\alpha}^{\infty} dm \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{\sqrt{m^2 - \alpha^2}}{\pi m} \times \\ \times \text{Re} \left[(2\xi)^{i\frac{\sqrt{m^2 - \alpha^2}}{\alpha}} \frac{(-\alpha + i\sqrt{m^2 - \alpha^2})}{i\sqrt{m^2 - \alpha^2}} \right]. \quad (4.29)$$

Переходя к новой переменной интегрирования $k = \sqrt{m^2 - \alpha^2}$ в (4.29), получим

$$G_B(p, \xi, 1) = \frac{\alpha}{2\xi p^2} + \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{2\pi} \frac{e^{i\frac{k}{\alpha} \ln(2\xi)}}{(k^2 + p^2 + \alpha^2)(k - i\alpha)} \right] = \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{2(\chi - \alpha)} \left(\frac{1}{2\xi} \right)^{\frac{\chi}{\alpha}}.$$

В лидирующем порядке по $e^{-(\chi-\alpha)|z|}$, из выражения (4.30) получим

$$G_A(p, z, 0) = \text{ch}\alpha z G_B(p, z, 0) = \frac{1}{4} \frac{e^{-(\chi-\alpha)|z|}}{(\chi - \alpha)} + \dots \quad (4.31)$$

Этот результат согласуется с (6.16) в рамках приближения $\text{ch}\alpha z \gg 1$.

4.1.2 Инфракрасная расходимость, пропорциональная объему дополнительного измерения.

Прежде чем переходить к вычислению однопетлевого векторного пропагатора с браны на брану, мы покажем, что патологические инфракрасные расходимости могут возникать в однопетлевом корреляторе нулевых мод калибровочного бозона

$$\langle A_\mu^{(0)}(x, z) A_\nu^{(0)}(y, z') \rangle. \quad (4.32)$$

Ввиду того, что коррелятор (4.32) не зависит от координат z и z' , мы положим $z = z' = 0$. Взаимодействие фермионов Ψ и калибровочного поля A_μ в объемлющем пространстве описывается действием

$$S_{int}[\Psi, A] = \int d^4x dz g_5 \bar{\Psi} \Gamma^\mu A_\mu \Psi. \quad (4.33)$$

Чтобы регуляризовать инфракрасные расходимости, будем считать, что z изменяется в пределах от $-L$ до $+L$. Тогда в четырехмерном импульсном представлении однопетлевая поправка к коррелятору (4.32) запишется в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1)(0)}(p) = (g_5)^2 \int_{-L}^{+L} dz_1 \int_{-L}^{+L} dz_2 \Pi_{\mu\nu}(p, |z_1 - z_2|) \times \quad (4.34)$$

$$\times G_A^{(0)}(p, 0, z_1) G_A^{(0)}(p, z_2, 0),$$

где $\Pi_{\mu\nu}(p, |z'|)$ поляризационный оператор фотона в смешанном представлении, который равен обычному интегралу по фермионной петле. Мы обсудим некоторые свойства $\Pi_{\mu\nu}(p, |z'|)$ в разделе 4.1.3, а сейчас просто отметим, что он зависит лишь от $|z'| = |z_1 - z_2|$. Функция $G^{(0)}(p, z, 0)$ - коррелятор нулевой моды калибровочного поля с браны в объемлющее пространство

$$G_A^{(0)}(p, z, 0) = \frac{A^{(0)}(z)A^{(0)}(0)}{p^2} = \frac{\alpha}{2p^2}. \quad (4.35)$$

здесь $A^{(0)}(z) = A^{(0)}(0)$ и определяется уравнением (4.19). Древесный коррелятор нулевой моды (4.35) не зависит от координаты дополнительного измерения. Отметим, что (4.35) отличается от $G_A(p, z, 0)$ (см. выражение (4.12)), тем, что в $G_A(p, z, 0)$ учитывается не только нулевая мода но и весь спектр тяжелых состояний. Таким образом, из выражений (4.34) и (4.35) следует, что

$$G_{\mu\nu}^{(1)(0)}(p) \propto \int_{-L}^{+L} dz \int_{-L}^{+L} dz' \Pi_{\mu\nu}(p, |z'|) \propto L, \quad (4.36)$$

т.е. инфракрасная расходимость в $G_{\mu\nu}^{(1)(0)}(p)$ пропорциональна объему дополнительного измерения L .

4.1.3 Однопетлевой вклад фермионов в векторный пропагатор с браны на брану.

В разделе 4.1.2 было отмечено, что пропагатор нулевой моды (4.32) сам по себе не имеет физического смысла. Вместо него мы обсудим полный однопетлевой пропагатор векторного поля с браны на брану. В этом разделе мы вычислим однопетлевой фермионный вклад в векторный пропагатор с браны на брану ((см. Рис. 4.2). Взаимодействие полей A_μ и Ψ по-прежнему описывается формулой (4.33). Следовательно, однопетлевая векторная функция Грина имеет вид

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(p) = G_{\mu\nu}^{(0)}(p) + G_{\mu\nu}^{(1)}(p), \quad (4.37)$$

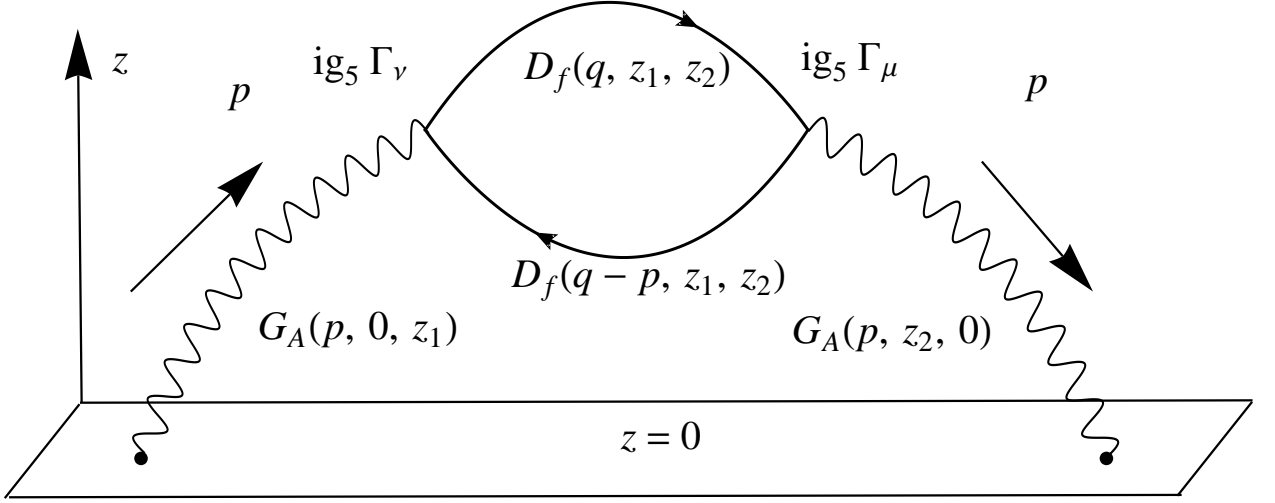


Рис. 4.2. Однопетлевая поправка к векторному пропагатору с браны на брану.

где $G_{\mu\nu}^{(0)}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} G_A(p, 0, 0)$ - древесный пропагатор, а однопетлевой вклад $G_{\mu\nu}^{(1)}(p)$ дается выражением

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = (ig_5)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 G_A(p, z_1, 0) G_A(p, z_2, 0) \times \quad (4.38)$$

$$\times (-1) \text{Tr} [\Gamma_\mu D_f(q - p, z_1, z_2) \Gamma_\nu D_f(q, z_1, z_2)].$$

Запишем функцию Грина безмассовых фермионов в плоском пространстве $D_f(q, z, z')$ в виде

$$D_f(q, z, z') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} \frac{\widehat{Q}}{Q^2} e^{iq_z(z-z')}, \quad (4.39)$$

где $\widehat{Q} = \Gamma^M q_M = \Gamma^\mu q_\mu + \Gamma^z q_z$, а Q^2 - квадрат пятимерного импульса, $Q^2 = q^2 + q_z^2$. Отсюда следует, что однопетлевой вклад фермионов (4.38) может быть записан в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = (g_5)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left| \widetilde{G}_A(p, p_z) \right|^2 \widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z). \quad (4.40)$$

где $\widetilde{G}_A(p, p_z)$ дается выражением (4.16), а $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z)$ - оператор вакуумной поляризации в плоском пятимерном пространстве с четырехмерными индек-

сами

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{\text{Tr} \left[\Gamma_\mu \widehat{Q} \Gamma_\nu (\widehat{Q} - \widehat{P}) \right]}{Q^2 (Q - P)^2}. \quad (4.41)$$

Используя размерную регуляризацию, получим

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \frac{3\pi}{64} \frac{2^2}{(4\pi)^2} P \left(\eta_{\mu\nu} P^2 - p_\mu p_\nu \right). \quad (4.42)$$

где P^2 - квадрат пятимерного импульса векторного поля

$$P^2 = p^2 + p_z^2. \quad (4.43)$$

Теперь рассмотрим однопетлевую поправку $G_{\mu\nu}^{(1)}(p)$ в пределе низких энергий, $p \rightarrow 0$. Подставим выражения (4.16) и (4.42) в формулу (4.40) и проинтегрируем (4.40) по переменной p_z , тогда получим

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = \frac{(g_4)^2}{2\pi} \frac{3\pi}{64} \frac{2^2}{(4\pi)^2} \frac{\alpha}{2p^2} \left[\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) Q_T(p) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} Q_L(p) \right]. \quad (4.44)$$

Фактор $\alpha/(2p^2)$ в выражении (4.44) выделен для того, чтобы обозначить вклад нулевой моды (см. уравнение (4.14)). Функции $Q_T(p)$ и $Q_L(p)$ определяются через следующие интегралы

$$Q_T(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{2p^2}{\alpha^2} P^3 \left| \tilde{G}_A(p, p_z) \right|^2, \quad (4.45)$$

$$Q_L(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{2p^2}{\alpha^2} P p_z^2 \left| \tilde{G}_A(p, p_z) \right|^2.$$

В инфракрасном пределе, $p \rightarrow 0$, имеем

$$Q_T(p) = \frac{2\pi\alpha}{p} + \frac{9\pi p}{4\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} \left(4 \ln \frac{2\Lambda}{p} + 3 \ln \frac{p}{4\alpha} - \frac{11}{6} \right) + O \left(\frac{p^3}{\alpha^3} \right) \quad (4.46)$$

$$Q_L(p) = \frac{\pi p}{2\alpha} + \frac{p^2}{\alpha^2} \left(4 \ln \frac{2\Lambda}{p} + 3 \ln \frac{p}{4\alpha} - \frac{3}{2} \right) + O \left(\frac{p^3}{\alpha^3} \right), \quad (4.47)$$

Здесь Λ - масштаб ультрафиолетового обрезания. Из выражения (4.46) следует, что в пределе малых энергий, $p/\alpha \ll 1$, функция $Q_T(p)$ содержит сингулярный член α/p . Причину возникновения такой сингулярности можно объяснить следующим образом. В разделе 4.1 мы отметили, что пропагатор с

браны на брану $\tilde{G}_A(p, p_z)$ содержит специфическое слагаемое $p^4/(4\alpha^2)$ в знаменателе при $p_z \rightarrow 0$ (см. Уравнение (4.17)). Это означает, что интеграл (4.45) для $Q_T(q)$ имеет следующий инфракрасный вклад:

$$Q_T(p) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{(p_z^2 + p^2)^{3/2}}{(p_z^2 + p^4/(4\alpha^2))^2}. \quad (4.48)$$

Этот интеграл имеет инфракрасную область насыщения вблизи $p_z \sim p^2/\alpha$, следовательно

$$Q_T(p) \propto \frac{p^2 (p^2/\alpha)p^3}{\alpha^2 (p^8/\alpha^4)} \propto \frac{\alpha}{p}, \quad (4.49)$$

Данная оценка согласуется с (4.46) в пределе $p \rightarrow 0$. Таким образом, окончательно однопетлевой вклад безмассовых фермионов в векторный пропагатор с браны на брану запишется в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = \frac{3(g_4)^2 \alpha^2}{29\pi} \frac{\alpha^2}{p^3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (4.50)$$

Однако древесный пропагатор $G_A(p, 0, 0)$ пропорционален $1/p^2$, (см. выражение (4.23)). Это означает, что рассмотренная модель не полна в инфракрасном пределе, поскольку содержит сингулярный член $1/p^3$ в поправке к пропагатору. Стало быть, в режиме $(g_4)^2 \alpha/p \lesssim 1$ теория находится в сильной связи, где петлевая поправка доминирует над древесным пропагатором. Отсюда можно сделать вывод, что модель с массовой щелью между нулевой модой и непрерывным спектром векторных КК мод ведет себя патологически в инфракрасном пределе, как и ожидалось.

4.2 Модель РС2-1

В данном разделе мы рассмотрим модель мира на бране без массовой щели между нулевой модой и высшими КК возбуждениями векторного поля. В рамках модели РС2-1 с одним большим и одним компактным измерением мы вычислим однопетлевой вклад безмассовых фермионов в пропагатор $U(1)$

калибровочного поля с браны на брану. Шестимерная метрика модели РС2-1 с евклидовой сигнатурой $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, +, +)$ записывается в виде

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = w^2(z)(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\theta^2 + dz^2), \quad (4.51)$$

где индексы M, N обозначают координаты шестимерного пространства, $M, N = 0, 1, 2, 3, 5, 6$. Греческие индексы μ, ν нумеруют четырехмерное пространство, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. x^5 - координата компактного дополнительного измерения, $x^5 \equiv \theta \in [0, 2\pi R]$, а $x^6 \equiv z$ - координата измерения бесконечного размера $z \in [-\infty, +\infty]$. Масштабный фактор $w(z)$ дается выражением

$$w(z) = 1/(1 + k|z|). \quad (4.52)$$

Отметим, что $w(z)$ можно получить из масштабного фактора $a(z) = e^{-k|z|}$ метрики (1) заменой переменной $z \rightarrow z' = (e^{k|z|} - 1)/k$. С геометрической точки зрения метрика (4.51) описывает 5-брану с одним компактным измерением, расположенным в точке $z = 0$ объемлющего пространства.

Рассмотрим действие $U(1)$ калибровочной теории с безмассовыми фермионами на фоне метрики (4.51)

$$S_{RS}[\psi, A] = \int d^4x dz d\theta \sqrt{G} \left[\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + i\bar{\psi} \Gamma^{\bar{M}} E_{\bar{M}}^M (\nabla_M - ig_6 A_M) \psi \right], \quad (4.53)$$

здесь индексы \bar{M}, \bar{N} нумеруют координаты касательного пространства. Константа связи, калибровочное и фермионное поле модели имеют массовые размерности шестимерной теории: $[g_6] = -1$, $[A_M] = 2$ и $[\Psi] = 5/2$. Мы предполагаем, что размер компактного дополнительного измерения R достаточно мал $R \ll 1/E$, здесь E - характерная энергия, при которой мы рассматриваем нашу модель. Далее мы вычислим фермионные поправки к пропагатору векторного поля с браны на брану. В частности, в разделах 4.2.1 и 4.2.2 будут изучены КК возбуждения фермионов и векторных бозонов, которые являются однородными при сдвиге вдоль компактного дополнительного измерения θ . А в разделе 4.2.3 мы обсудим квантовые поправки к пропагатору калибро-

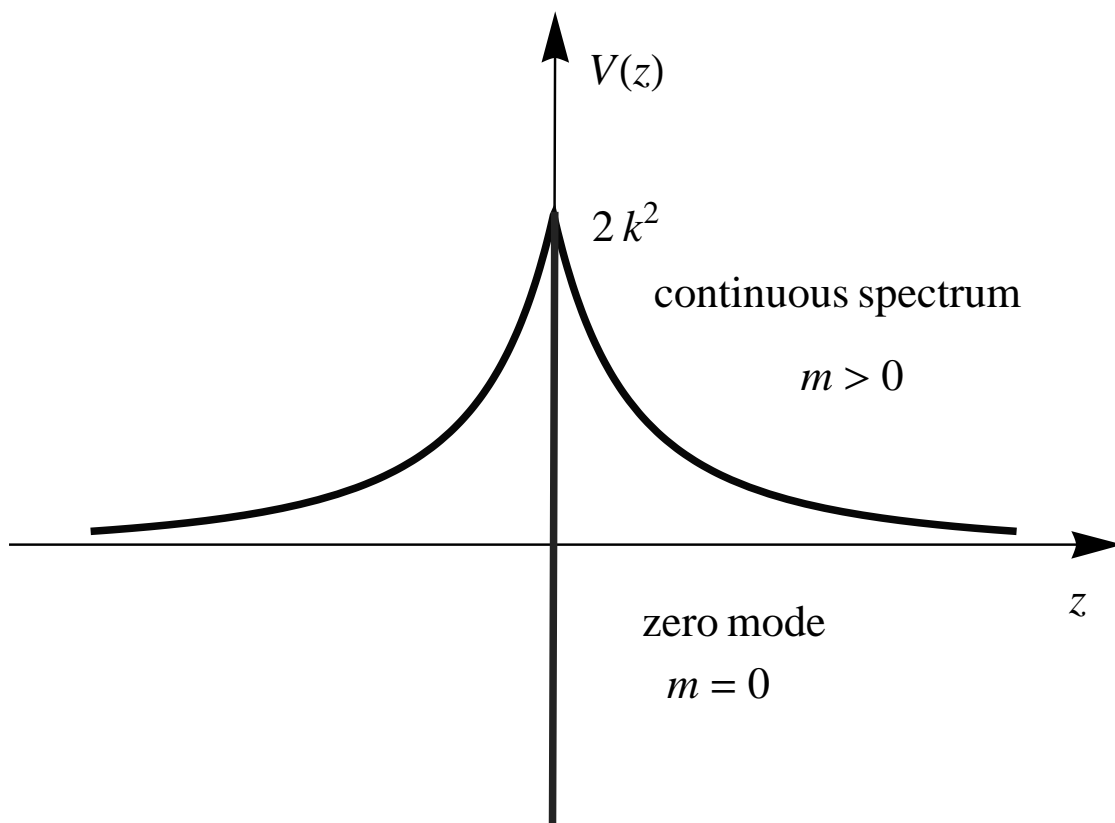


Рис. 4.3. Эффективный потенциал векторного поля в объемлющем пространстве в модели РС2-1 .

вочного поля, обусловленные фермионными возбуждениями, неоднородными при сдвиге вдоль θ .

4.2.1 Пропагатор векторного поля в модели РС2-1

В данном разделе мы изучим поведение векторной функции гринна с браны в объемлющее пространство в рамках модели РС2-1. Для этого рассмотрим векторную часть действия (4.53)

$$S[A] = \int d^4x dz d\theta w^2(z) \frac{1}{4} F_{MN}^2, \quad (4.54)$$

где индексы M, N поднимаются и опускаются при помощи плоской шестимерной метрики. Действие (4.54) аналогично действию калибровочного поля в модели в доменной стенкой (см. векторную часть действия (4.1)) за исклю-

чением вида масштабного фактора $w(z)$.

Введем перемасштабированное векторное B_M подобно тому, которое было рассмотрено в разделе 4.1 (см. выражение (4.4))

$$B_M = w A_M. \quad (4.55)$$

Мы будем считать, что поле B_M не зависит от координаты θ , компоненту B_θ положим равной нулю, $B_\theta = 0$, и выберем калибровку в виде $B_z = 0$.

Уравнение движения для КК моды $B^{(m)}(z)$ калибровочного поля $B_\mu(x, z)$ совпадает с уравнением (4.6) с точностью до замены $\phi(z) \rightarrow w(z)$. В модели РС2-1 спектр поля $B^{(m)}(z)$ определяется квантово-механическим потенциалом (см. Рис. 4.3)

$$V(z) = \frac{w''}{w} = \frac{2k^2}{(1+k|z|)^2} - 2k\delta(z). \quad (4.56)$$

Поле $B^{(m)}(z)$ имеет нулевую моду

$$B^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{1}{(1+k|z|)}, \quad (4.57)$$

которая обусловлена наличием дельтаобразной ямы в потенциале $V(z)$. Эта нулевая мода соответствует константе поля $A^{(0)}(z) = \sqrt{k/2}$ (ср. с выражением (1.18) при $n = 1$). Эта мода однородна вдоль большого дополнительного измерения z и представляет собой фотон, локализованный на бране.

В отличие от модели с доменной стенкой, у поля $B^{(m)}(z)$ в модели РС2-1 отсутствует массовая щель, отделяющая нулевую моду $B^{(0)}(z)$ от непрерывного спектра возбуждений $B^{(m)}(z)$.

Функция Грина с браны в объемлющее пространство $G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \langle B_\mu(p, z) B_\nu(p, 0) \rangle$ подчиняется уравнению

$$(p^2 - \partial_z^2 + V(z)) G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \eta_{\mu\nu} \delta(z), \quad (4.58)$$

Решение уравнения (4.58) получено в Приложении 6 и записывается в виде $G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \eta_{\mu\nu} G_B(p, z, 0)$, где

$$G_B(p, z, 0) = \frac{e^{-p|z|}}{2p} + \frac{ke^{-p|z|}}{2p^2} \frac{1}{(1+k|z|)}. \quad (4.59)$$

Первое слагаемое в (4.59) - это пятимерная функция Грина безмассовой частицы с браны в объемлющее пространство. Второе слагаемое в (4.59) пропорционально $1/p^2$, то есть оно является вкладом нулевой моды в древесный пропагатор. В инфракрасном режиме $p/k \ll 1$ пропагатор с браны с объемлющее пространство поля A_μ имеет вид

$$G_A(p, z, 0) \equiv G_B(p, z, 0)/w(z) = \frac{k}{2p^2} \exp(-p|z|). \quad (4.60)$$

В отличие от модели доменной стенки (см. выражение (4.15)) $G_A(p, z, 0)$ в модели РС2-1 спадает быстрее при $z \rightarrow \infty$ в пределе малых энергий. Для дальнейших целей полезно выписать выражение для $G_A(p, z, 0)$ в импульсном представлении:

$$\tilde{G}_A(p, p_z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G_A(p, z, 0) e^{ip_z z} = \frac{1}{P^2} + \frac{2pk}{P^4}, \quad (4.61)$$

где P определен через (4.43).

4.2.2 Однопетлевой вклад θ -однородных фермионных полей в векторный пропагатор с браны на брану.

В этом разделе мы вычислим однопетлевую поправку к векторной функции Грина с браны на брану, обусловленную θ -независимыми фермионными полями модели РС2-1. Известно, что безмассовые фермионы конформны, т. е., с точностью до замены

$$\psi = w^{-5/2} \Psi \quad (4.62)$$

фермионное действие модели РС2-1 (см. спинорную часть действия (4.53)) преобразуется к плоскому виду

$$S[\Psi] = \int d^4x dz d\theta (i\bar{\Psi}\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi + i\bar{\Psi}\Gamma^\theta \partial_\theta \Psi + i\bar{\Psi}\Gamma^z \partial_z \Psi). \quad (4.63)$$

где Γ^μ , Γ^θ и Γ^z - евклидовы гамма - матрицы в шестимерном пространстве; Ψ - восьмикомпонентный вейлевский спинор

$$\Psi = (\Psi_+, \Psi_-),$$

где Ψ_+ и Ψ_- - четырехкомпонентные спиноры, имеющие соответствующие знаки шестимерной спиральности (\pm). Рассмотрим разложение поля Ψ по КК модам

$$\Psi(x, z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \Psi^0(x, z) + \sum_{n \neq 0} \Psi^n(x, z) f_S^n(\theta). \quad (4.64)$$

где $\Psi^0(x, z)$ и $\Psi^n(x, z) f_S^n(\theta)$ это однородные и неоднородные вдоль θ моды, соответственно. Чтобы не загромождать запись, мы опустили индексы (\pm) в выражении (4.64). Спинорные волновые функции $f_S^n(\theta)$ нормированы следующим образом

$$\int_0^{2\pi R} d\theta f_S^n(\theta) f_S^l(\theta) = \delta_{nl}. \quad (4.65)$$

Отынтегрировав компактные дополнительные измерения, мы получим

$$S[\Psi] = \int d^4x dz \sum_n (i \bar{\Psi}^n \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi^n + i \bar{\Psi}^n \Gamma^z \partial_z \Psi^n + i m_n \bar{\Psi}^n \Psi^n), \quad (4.66)$$

где $m_n = n/R$ это массы соответствующих КК состояний. Из выражения (4.66) следует, что шестимерные θ -неоднородные фермионы модели РС2-1 распространяются в эффективном пятимерном пространстве, имея при этом ненулевую массу m_n .

Рассмотрим сперва однопетлевую поправку к векторному пропагатору, обусловленную фермионами, однородными вдоль θ . Взаимодействие $\Psi^0(x, z)$ и $A_\mu(x, z)$ описывается действием

$$S_{\text{int}}[A, \Psi^0] = \int d^4x dz g_5 \bar{\Psi}^0(x, z) \Gamma^\mu A_\mu(x, z) \Psi^0(x, z) \quad (4.67)$$

где g_5 - это пятимерная константа связи

$$g_5 = \frac{g_6}{\sqrt{2\pi R}} \quad (4.68)$$

с массовой размерностью $[g_5] = -1/2$. Действие (4.67) аналогично взаимодействию фермионов и векторного поля в модели доменной стенки (см. выражение. 4.33). Поскольку в шестимерной модели есть два типа четырехкомпонентных спиноров, то мы можем использовать уравнения (4.33) - (4.45)

раздела 4.1.3 для рассматриваемого случая с точностью до фактора 2 в выражении (4.42), обусловленного удвоением фермионов:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) \rightarrow 2\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z).$$

Подставляя выражения (4.61) и (4.42) в (4.40), мы получим

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = \frac{(g_4)^2 3\pi}{2\pi} \frac{2^3}{64} \frac{k}{(4\pi)^2 2p^2} \left[\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) Q_T(p) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} Q_L(p) \right], \quad (4.69)$$

Пятимерная и четырехмерная константа связаны соотношением (4.3) с точностью до замены $\alpha \rightarrow k$. Аналогично и функции $Q_T(p)$ и $Q_L(p)$ определены выражениями (4.45) с учетом той же замены, при этом $\tilde{G}(p, p_z)$ равна (4.61).

После интегрирования (4.45) по переменной p_z , имеем

$$\begin{aligned} Q_T(p) &= \frac{32}{3} + \frac{16p}{k} + \frac{4p^2}{k^2} \ln \frac{2\Lambda}{p}, \\ Q_L(p) &= \frac{32}{15} + \frac{16p}{3k} + \frac{4p^2}{k^2} \left(\ln \frac{2\Lambda}{p} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Таким образом, однопетлевой вклад фермионов $G_{\mu\nu}^{(1)}(p)$ в векторный пропагатор $G_{\mu\nu}^{(0)}(p)$ (см. выражение (4.59) при $z = 0$) в инфракрасном пределе запишется в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(p) = \frac{(g_4)^2 k}{(4\pi)^2 p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{4p_\mu p_\nu}{5p^2} \right). \quad (4.71)$$

Отметим, что как $G_{\mu\nu}^{(1)}(p)$, так и $G_{\mu\nu}^{(0)}(p)$ пропорциональны $1/p^2$ при $p \rightarrow 0$. Это значит, что в модели РС2-1 не возникает инфракрасной сингулярности в векторном пропагаторе, по крайней мере в рамках однопетлевого вычисления. В модели же с доменной стенкой ситуация обратная: древесный пропагатор $G_{\mu\nu}^{(0)}(p) \sim 1/p^2$ а поправка $G_{\mu\nu}^{(1)}(p) \sim 1/p^3$.

Понять, как ведет себя $G_{\mu\nu}^{(1)}(p)$ при низких энергиях можно тем же способом, который был рассмотрен в разделе 4.1.3. Действительно, рассмотрим (4.45) для случая модели РС2-1. Из уравнения (4.61) следует, что при $P \rightarrow 0$ функция $\tilde{G}_A(p, p_z) \propto kp/P^4$. Следовательно, основной инфракрасный

вклад в $Q_T(p)$ и $Q_L(p)$ приходит от интегралов

$$\begin{aligned}
 Q_T(p) &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{p^2}{k^2} \left[\frac{kp}{(p_z^2 + p^2)^2} \right]^2 (p_z^2 + p^2)^{3/2}, \\
 Q_L(p) &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{p^2}{k^2} \left[\frac{kp}{(p_z^2 + p^2)^2} \right]^2 (p_z^2 + p^2)^{1/2} p_z^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

Эти интегралы имеют низкоэнергетическую область насыщения при $p_z \sim p$, поэтому

$$Q_T(p) \propto Q_L(p) \propto p \frac{p^2}{k^2} \frac{k^2 p^2}{p^8} p^3 \propto O(1).
 \tag{4.73}$$

Этот результат согласуется с (4.70) при $p/k \ll 1$. Таким образом, анализ двух моделей мира на бране показывает, что инфракрасное поведение однопетлевых векторных пропагаторов с браны на брану определяется наличием массовой щели в спектре калибровочного поля. В модели с массовой щелью есть инфракрасная патология, в то время как в модели без массовой щели патология отсутствует.

4.2.3 Вклад θ -неоднородных фермионных КК возбуждений.

В этом разделе мы вычислим однопетлевой вклад θ -неоднородных фермионов в векторный пропагатор с браны на брану. Поскольку массы соответствующих КК возбуждений предполагаются достаточно большими, $m_n = n/R \gg p$, то образование θ -неоднородных фермионных возбуждений запрещено на древесном уровне. Тем не менее, на однопетлевом уровне такие моды могут внести свой вклад в векторный пропагатор с браны на брану.

Напомним, что модель РС2-1 - это шестимерная неперенормируемая КЭД со свернутыми дополнительными измерениями. Если бы мы рассматривали шестимерную КЭД на фоне плоского пространства, то необходимо было бы наложить условие на калибровочную константу связи g_6 и масштаб ультрафиолетового обрезания Λ :

$$\Lambda g_6 \ll 1.
 \tag{4.74}$$

В моделях со свернутыми дополнительными измерениями адекватен формализм ультрафиолетового обрезания, зависящего от координаты объемлющего пространства [53]. В нашей модели масштаб обрезания для данной координаты z равен $\Lambda_{\text{eff}}(z) = \Lambda/(1+kz)$. В частности, отсюда следует, что массы КК фермионных возбуждений m_n ограничены сверху масштабом $\Lambda_{\text{eff}}(z)$

$$m_n < \Lambda/(1+kz). \quad (4.75)$$

Следовательно, однопетлевой вклад θ -неоднородных КК состояний запишется в виде

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = (g_5)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 G_A(p, z_1, 0) G_A(p, z_2, 0) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_1-z_2)} \sum_{n \neq 0}^{N_{KK}(z)} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^n(p, p_z), \quad (4.76)$$

где $N_{KK}(z)$ - это эффективное число КК фермионных возбуждений, зависящее от координаты объемлющего пространства $z = (z_1 + z_2)/2$; $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^n(p, p_z)$ - однопетлевой фермионный интеграл по КК фермионным состояниям (ср. с выражениями (4.41) и (4.42) для безмассового случая)

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^n(p, p_z) = \int_0^1 dx \frac{2^3}{(4\pi)^2} 2\sqrt{\Delta_n} (\eta_{\mu\nu} P^2 - p_\mu p_\nu) x(1-x), \quad (4.77)$$

где $\Delta_n = m_n^2 + x(1-x)P^2$. Так как по условию $m_n \gg P$, то положим $\Delta_n = m_n^2$ в выражении (4.77), и вычислим соответствующий интеграл. Тогда в инфракрасном пределе $P \ll k$ получим

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^n(p, p_z) = \frac{2^3}{(4\pi)^2} 2 \frac{m_n}{6} (\eta_{\mu\nu} P^2 - p_\mu p_\nu), \quad (4.78)$$

Введем новые переменные интегрирования $z = (z_1 + z_2)/2$ and $z' = z_1 - z_2$ в интеграле (4.76). Используя условие обрезания (4.75), поменяем местами порядок интегрирования по объемлющему пространству (z, z') с суммированием по КК возбуждениям в выражении (4.76). Тогда после интегрирования

по p_z мы получим

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = (g_5)^2 \sum_{n \neq 0}^{N_{KK}} \frac{m_n}{6} \int_{-z_{IR}^n}^{+z_{IR}^n} dz dz' \delta(z') \frac{2^3}{(4\pi)^2} 2 \times \quad (4.79)$$

$$\times \left[(\eta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right] G_A(p, z+z'/2, 0) G_A(p, z-z'/2, 0),$$

где $z_{IR}^n = (\Lambda - m_n)/(km_n)$ - инфракрасное обрезание по координате объемлющего пространства, возникающее из-за условия (4.75); теперь массы КК состояний ограничены сверху: $m_n < \Lambda$. Это значит, что эффективное число КК возбуждений N_{KK} в (4.79) равно

$$N_{KK} = R\Lambda. \quad (4.80)$$

Интегрируя (4.79) по z' и z , мы получим

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = (g_5)^2 \sum_{n \neq 0}^{N_{KK}} \frac{m_n}{6} \frac{2^3}{(4\pi)^2} \left(\left[\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \mathcal{F}_1^n(p) + \eta_{\mu\nu} \mathcal{F}_2^n(p) \right), \quad (4.81)$$

где $\mathcal{F}_1^n(p)$ и $\mathcal{F}_2^n(p)$ даются выражениями

$$\mathcal{F}_1^n(p) = \frac{5k^2}{8p^3} (1 - e^{-pz_{IR}^n}) + \frac{3k}{8p^2} (2(1 - e^{-pz_{IR}^n}) - e^{-pz_{IR}^n} k z_{IR}^n) + \quad (4.82)$$

$$+ \frac{1}{16p} (4(1 - e^{-pz_{IR}^n}) - 4e^{-pz_{IR}^n} k z_{IR}^n - e^{-pz_{IR}^n} (k z_{IR}^n)^2)$$

$$\mathcal{F}_2^n(p) = \frac{k}{2p^2} e^{-pz_{IR}^n} (1 + k z_{IR}^n / 2) + \frac{1}{2p} e^{-pz_{IR}^n} (1 + k z_{IR}^n + (k z_{IR}^n)^2 / 4). \quad (4.83)$$

Рассмотрим режим малых импульсов $p z_{IR}^n \ll 1$, тогда при $p/k \ll 1$ имеем

$$\mathcal{F}_1^n(p) = \mathcal{F}_2^n(p) = \frac{z_{IR}^n k^2}{4 p^2}.$$

Следовательно

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = \frac{(g_4)^2}{48\pi^2} \sum_{n \neq 0}^{N_{KK}} \frac{(\Lambda - m_n)}{p^2} \left(2\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right).$$

Просуммировав по КК модам, получим

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = \frac{(g_4)^2 \Lambda (\Lambda R + 1)}{48\pi^2 2p^2} \left(2\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (4.84)$$

Из выражений (4.68) и (4.3) следует, что шестимерная и четырехмерная константа взаимодействия связаны соотношением

$$g_6 = g_4 \sqrt{\frac{2\pi R}{k}},$$

тогда выражение (4.84) окончательно запишется в виде

$$G_{\mu\nu}^{KK}(p) = \frac{(g_6\Lambda)^2 k}{192\pi^3 p^2} \left(2\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (4.85)$$

Эта поправка мала по сравнению с древесным пропагатором, если наложить условие $(g_6\Lambda)^2 \ll 1$, которое совпадает с (4.74). Отсюда мы заключаем, что весь сценарий мира на бране РС2-1 примлем с феноменологической точки зрения, по крайней мере на однопетлевом уровне.

4.3 Результаты

Сформулируем результаты, которые получены в Главе 4. Рассмотрены два сценария мира на бране с различными механизмами локализации калибровочного поля на бране. Показано, что в рамках пятимерной КЭД с векторными полями, локализованными на доменной стенке, однопетлевой вклад фермионов в пропагатор векторного поля с браны на брану приводит к патологическим инфракрасным расходимостям, что делает эту модель феноменологически неприемлемой. Этот результат согласуется с работой [44]. Также была рассмотрена шестимерная КЭД на фоне модифицированной метрики модели РС с одним компактным и одним большим дополнительным измерением (РС2-1 модель). В рамках этой модели была вычислена однопетлевая фермионная поправка к пропагатору калибровочного поля с браны на брану в низкоэнергетическом режиме. Показано, что фермионный вклад не содержит патологических инфракрасных слагаемых. Это дает указание на то, что модель РС2-1 можно рассматривать в качестве феноменологически приемлемого сценария мира на бране, по крайней мере на однопетлевом уровне.

Отсюда мы можем сделать вывод, что инфракрасные патологические расходимости появляются в моделях мира на бране, в которых нулевая мода калибровочного поля отделена массовой щелью от высших возбуждений. В то же время, модели без массовой щели могут быть свободны от инфракрасных патологических расходимостей.

Глава 5

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1) Представлены ограничения снизу на кривизну k пространства АдС модели "мира на бране" РС2- n в зависимости от числа компактных дополнительных измерений n . Соответствующие ограничения получены из анализа невидимой ширины распада Z - бозона в объемлющее пространство.

2) Рассмотрены два сценария вложения калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$ в объемлющее пространство модели РС2- n . В первом сценарии предполагалось, что весь $SU(2) \times U(1)$ калибровочный сектор, включая хиггсовское поле, распространяется в объемлющем пространстве, а фермионы Стандартной модели локализованы на бране. Во втором сценарии считалось, что только $U(1)$ калибровочный сектор живет в объемлющем пространстве, а фермионы, поле Хиггса и $SU(2)$ калибровочные поля локализованы на бране. Показано, что количественно обе модели вложения дают схожий результат. Получены дифференциальные сечения рассеяния процессов $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{«ничто»}$, в которых потеря энергии в конечном состоянии обусловлена Z бозоном и фотоном, вылетающими в объемлющее пространство. Соответствующие сечения рассеяния для различного числа компактных дополнительных измерений n сравнивались с фоном стандартной модели $e^+e^- \rightarrow \gamma + \nu\bar{\nu}$. Показано, что сигнал превышает фон при $n > 4$.

3) Изучены процессы $pp \rightarrow jet + \text{«ничто»}$ на Большом Адронном Коллайдере в рамках модели РС2- n . В данных процессах потеря энергии в конечном состоянии также обусловлена Z - бозоном и фотоном, вылетающими с браны в объемлющее пространство. Проведен численный расчет дифференциальных сечений рассеяния $pp \rightarrow jet + \text{«ничто»}$ и представлены графики зависимости этих сечений от поперечного импульса адронной струи и ее быстроты. Полученные результаты также сравнивались с фоновыми процессами Стан-

дартной модели, в которых потеря энергии обусловлена наличием нейтрино в конечном состоянии. Показано, что в существующей области параметров модели, сигнал с потерей энергии может быть детектирован при энергии 14 ТэВ на БАК, если число компактных дополнительных измерений измерений $n > 3$.

3) Исследованы однопетлевые фермионные поправки к пропагатору векторного поля с браны на брану в двух различных сценариях мира на бране. В одном из них существует массовая щель между нулевой модой калибровочного поля и его непрерывным спектром, а в другом массовая щель отсутствует. Показано, что фермионная поправка в модели с массовой щелью содержит неустранимую инфракрасную расходимость, в то время как модель без массовой щели (модель РС2-1) свободна от таких расходимостей, по крайней мере на однопетлевом уровне. Сделан вывод о том, что инфракрасное поведение теорий с локализованными на бране векторными полями определяется наличием или отсутствием массовой щели между нулевой модой и непрерывным спектром.

Глава 6

Приложения

Приложение А: пропагатор векторного поля в модели с доменной стенкой.

В этой главе мы вычислим пропагатор векторного поля с браны в объемлющее пространство в модели раздела 4.1. Возьмем решение уравнения (4.8) в виде $G_{\mu\nu}^B(p, z, 0) = \eta_{\mu\nu}G_B(p, z, 0)$, где

$$G_B(p, z, 0) = \theta(z)G^{(+)}(p, z) + \theta(-z)G^{(-)}(p, z). \quad (6.1)$$

Здесь $G^{(+)}(p, z)$ и $G^{(-)}(p, z)$ это линейные комбинации четного и нечетного решения

$$\begin{aligned} G^{(+)}(p, z) &= B^{(+)}G^{(e)}(p, z) + C^{(+)}G^{(o)}(p, z), \\ G^{(-)}(p, z) &= B^{(-)}G^{(e)}(p, z) + C^{(-)}G^{(o)}(p, z). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Функции $G^{(e)}(p, z)$ и $G^{(o)}(p, z)$ имеют вид

$$G^{(e)}(p, z) = \text{ch}^2\alpha z {}_2F_1(a, b; 1/2; -\text{sh}^2\alpha z) \quad (6.3)$$

$$G^{(o)}(p, z) = \text{sh}\alpha z \text{ch}^2\alpha z {}_2F_1(a + 1/2, b + 1/2; 3/2; -\text{sh}^2\alpha z), \quad (6.4)$$

где ${}_2F_1$ это гипергеометрическая функция, а параметры a и b определены следующим образом

$$a = 1 - \chi/(2\alpha), \quad b = 1 + \chi/(2\alpha), \quad (6.5)$$

а χ имеет вид

$$\chi = \sqrt{p^2 + \alpha^2}. \quad (6.6)$$

Наложим граничные условия на бесконечности

$$G^{(+)}(p, z)\Big|_{z=\infty} = 0, \quad G^{(-)}(p, z)\Big|_{z=-\infty} = 0. \quad (6.7)$$

Из уравнений (6.2) и (6.7) следует, что

$$B^{(+)} = -C^{(+)} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{G^{(o)}(p, z)}{G^{(e)}(p, z)} \equiv -C^{(+)} D(p) \quad (6.8)$$

$$B^{(-)} = -C^{(-)} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{G^{(o)}(p, z)}{G^{(e)}(p, z)} = C^{(-)} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{G^{(o)}(p, z)}{G^{(e)}(p, z)} \equiv C^{(-)} D(p). \quad (6.9)$$

Тогда (6.2) переписывается в следующем виде

$$\begin{aligned} G^{(+)}(p, z) &= C^{(+)}[-D(p)G^{(e)}(p, z) + G^{(o)}(p, z)], \\ G^{(-)}(p, z) &= C^{(-)}[D(p)G^{(e)}(p, z) + G^{(o)}(p, z)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из условия сшивки $G^{(+)}(p, 0) = G^{(-)}(p, 0)$ в точке $z = 0$, имеем

$$C^{(+)} = -C^{(-)} \equiv C.$$

А условие на разрыв производной $-\partial_z G^{(+)}(p, 0) + \partial_z G^{(-)}(p, 0) = 1$ дает значение константы

$$C = -1/(2\alpha).$$

Таким образом, пропагатор $G_B(p, z, 0)$ переписывается

$$G_B(p, z, 0) = \frac{1}{2\alpha} [D(p)G^{(e)}(p, z) - G^{(o)}(p, |z|)]. \quad (6.11)$$

Разлагая в ряд функции $G^{(e)}(p, z)$ и $G^{(o)}(p, z)$ при больших значениях аргумента $\xi = \text{ch}\alpha z$, имеем

$$\begin{aligned} G^{(o)}(p, \xi) \text{sign}(z) &= \xi^{\frac{\chi}{\alpha}} \left(\frac{2^{-1+\frac{\chi}{\alpha}} \alpha}{\alpha + \chi} + O(1/\xi^2) \right) \\ &+ \xi^{-\frac{\chi}{\alpha}} \left(\frac{2^{-1-\frac{\chi}{\alpha}} \alpha}{\alpha - \chi} + O(1/\xi^2) \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} G^{(e)}(p, \xi) &= \xi^{\frac{\chi}{\alpha}} \left(\frac{2^{-1+\frac{\chi}{\alpha}} (-\alpha + \chi)}{\chi} + O(1/\xi^2) \right) \\ &+ \xi^{-\frac{\chi}{\alpha}} \left(\frac{2^{-1-\frac{\chi}{\alpha}} (\alpha + \chi)}{\chi} + O(1/\xi^2) \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Это дает нам значение константы

$$D(p) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{G^{(o)}(p, \xi)}{G^{(e)}(p, \xi)} = \frac{\alpha\chi}{(\chi^2 - \alpha^2)}. \quad (6.14)$$

Подставляя уравнения (6.3), (6.4) и (6.14) в (6.11), и используя тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-1/y)} {}_2F_1\left(1-\frac{y}{2}, 1+\frac{y}{2}; \frac{1}{2}; -\text{sh}^2 t\right) - \text{sh}|t| {}_2F_1\left(\frac{3}{2}-\frac{y}{2}, \frac{3}{2}+\frac{y}{2}; \frac{3}{2}; -\text{sh}^2 t\right) = \\ = \frac{1}{2\text{ch}^3 t} \left(\frac{e^{-(y-1)|t|}}{y-1} + \frac{e^{-(y+1)|t|}}{y+1} \right), \end{aligned}$$

мы получим окончательное выражение для пропагатора векторного поля с браны с объемлющее пространство

$$G_B(p, z, 0) = \frac{1}{4\text{ch}\alpha z} \left(\frac{e^{-(\chi-\alpha)|z|}}{\chi-\alpha} + \frac{e^{-(\chi+\alpha)|z|}}{\chi+\alpha} \right). \quad (6.15)$$

В терминах поля $A_\mu(x, z)$, пропагатор (6.15) переписывается в виде

$$G_A(p, z, 0) \equiv \frac{1}{\phi(z)} G_B(p, z, 0) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-(\chi-\alpha)|z|}}{\chi-\alpha} + \frac{e^{-(\chi+\alpha)|z|}}{\chi+\alpha} \right). \quad (6.16)$$

Приложение В: пропагатор векторного поля в модели РС2-1

В этом приложении мы выведем векторный пропагатор с браны в объемлющее пространство в рамках модели РС2-1. Такой пропагатор подчиняется уравнению

$$\left(p^2 - \partial_z^2 + \frac{2k^2}{(1+k|z|)} - 2k\delta(z) \right) G_B(p, z, 0) = \delta(z). \quad (6.17)$$

Решение уравнения (6.17) будем искать в виде

$$G_B(p, z, 0) = \theta(z)G^{(+)}(p, z) + \theta(-z)G^{(-)}(p, z). \quad (6.18)$$

Функции $G^{(+)}(p, z)$ и $G^{(-)}(p, z)$ должны убывать на бесконечности, следовательно

$$\begin{aligned} G^{(+)}(p, z) &= C^{(+)} \left(1 + \frac{k}{p} \frac{1}{(1+kz)} \right) e^{-\frac{p}{k}(1+kz)}, \\ G^{(-)}(p, z) &= C^{(-)} \left(1 + \frac{k}{p} \frac{1}{(1-kz)} \right) e^{-\frac{p}{k}(1-kz)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Условие сшивки на функции $G^{(+)}(p, z)$ и $G^{(-)}(p, z)$, а также условие на разрыв производной в точке $z = 0$ имеют соответствующий вид

$$G^{(+)}(p, 0) = G^{(-)}(p, 0), \quad -\partial_z G^{(+)}(p, 0) + \partial_z G^{(-)}(p, 0) - 2kG(p, 0) = 1. \quad (6.20)$$

Это дает нам значение констант

$$C^{(+)} = C^{(-)} = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{p}{k}\right).$$

Таким образом, получим

$$G_B(p, z, 0) = \frac{e^{-p|z|}}{2p} + \frac{ke^{-p|z|}}{2p^2} \frac{1}{(1+k|z|)}. \quad (6.21)$$

Приложение С: фермионное поле в модели РС2-1

Утверждение о конформности безмассовых фермионов справедливо для спинов в произвольной размерности пространства времени. В данном приложении мы продемонстрируем это утверждение на примере модели РС2-1. Рассмотрим спинорную часть действия (4.53)

$$S[\psi] = \int d^4x d\theta dz w^6 \left[i\bar{\psi}\Gamma^{\bar{M}} E_{\bar{M}}^M \nabla_M \psi \right], \quad (6.22)$$

где тетрады определены следующим образом

$$E^{\bar{M}M} = \eta^{\bar{M}M} \frac{1}{w}, \quad E_{\bar{M}M} = \eta_{\bar{M}M} w, \quad E_{\bar{M}}^{\bar{M}} = \delta_{\bar{M}}^{\bar{M}} w, \quad E_M^M = \delta_M^M \frac{1}{w}. \quad (6.23)$$

Спинорная ковариантная производная равна

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} \Gamma_{\bar{M}\bar{N}} = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} \Gamma_{\bar{M}} \Gamma_{\bar{N}}, \quad \Gamma_{\bar{M}\bar{N}} = \frac{1}{2} [\Gamma_{\bar{M}}, \Gamma_{\bar{N}}], \quad (6.24)$$

Шестимерные евклидовы гамма матрицы выберем в виде

$$\Gamma^{\bar{M}} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^{\bar{M}} \\ \bar{\Sigma}^{\bar{M}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

здесь $\Sigma^{\bar{6}} = -\bar{\Sigma}^{\bar{6}} = -i$ и $\Sigma^{\bar{a}} = \bar{\Sigma}^{\bar{a}} = \gamma_{(E)}^{\bar{a}}$. Пятимерные гамма матрицы определяются следующим образом

$$\gamma_{(E)}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(E)}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(E)}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{(E)}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(E)}^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спиновая связность равна

$$\begin{aligned} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} = \frac{1}{2} E^{\bar{M}L} (\partial_M E_L^{\bar{N}} - \partial_L E_M^{\bar{N}}) + \frac{1}{2} E^{\bar{N}L} (\partial_L E_M^{\bar{M}} - \partial_M E_L^{\bar{M}}) \\ + \frac{1}{2} E^{\bar{N}K} E^{\bar{M}L} (\partial_K E_L^{\bar{Q}} - \partial_L E_K^{\bar{Q}}) E_{\bar{Q}M}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ненулевые компоненты $\omega_M^{\bar{M}\bar{N}}$ имеют вид

$$\omega_\nu^{\bar{\mu}6} = -\omega_\nu^{6\bar{\mu}} = -\delta_\nu^{\bar{\mu}} \left(\frac{w'}{w} \right). \quad (6.27)$$

Объединяя (6.23), (6.24), (6.27) и вводя перемасштабированное поле

$$\psi = w^{-5/2} \Psi, \quad (6.28)$$

получим окончательное выражение для действия (6.22)

$$S[\Psi] = \int d^4x d\theta dz \left[i \bar{\Psi} \Gamma^{\bar{M}} \partial_{\bar{M}} \Psi \right]. \quad (6.29)$$

Это доказывает конформность безмассовых фермионов.

Приложение D: пропагатор массивных фермионов в смешанном представлении

В данном приложении мы выведем функцию Грина для массивных θ -неоднородных фермионов модели РС2-1, распространяющихся в эффективном евклидовом плоском пятимерном пространстве (компактная координата θ отынтегрирована). Такая функция Грина подчиняется уравнению

$$[-\Gamma_\mu p_\mu + i \Gamma_z \partial_z + im_f] \widehat{D}_f(p, z, z') = \delta(z - z'), \quad (6.30)$$

где Γ_μ и Γ_z это шестимерные гамма матрицы, введенные в Приложении С. Будем искать решение $\widehat{D}_m(p, z, z')$ в следующем виде

$$\widehat{D}_f(p, z, z') = [\Gamma_\mu p_\mu - i \Gamma_z \partial_z + im_f] \widetilde{D}_f(p, z, z'). \quad (6.31)$$

Тогда $\tilde{D}_f(p, z, z')$ подчиняется уравнению

$$[-p^2 + \partial_z^2 - m_f^2]\tilde{D}_f(p, z, z') = \delta(z - z'). \quad (6.32)$$

Решение уравнения (6.32), удовлетворяющее нулевым граничным условиям на бесконечности, запишется в виде

$$\tilde{D}_f(p, z, z') = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m_f^2}} e^{-\sqrt{p^2 + m_f^2}|z - z'|} \quad (6.33)$$

Фермионный пропагатор (6.31), с учетом (6.33), удобно переписать в спектральном представлении

$$\hat{D}_f(p, z, z') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{[\Gamma_\mu p_\mu + \Gamma_z p_z + im_f]}{p^2 + p_z^2 + m_f^2} e^{ip_z(z - z')} \quad (6.34)$$

Приложение Е: вакуумный поляризационный оператор фотона в объемлющем пространстве.

В разделе 4.2.2 было сделано утверждение о том, что шестимерные безмассовые θ -неоднородные фермионы можно рассматривать в качестве массивных частиц, распространяющихся в эффективном пятимерном пространстве. Поэтому в данном приложении мы вычислим однопетлевой интеграл, обусловленный массивными фермионами в пятимерном евклидовом пространстве. Пропагатор массивного фермионного поля выведен в Приложении D (см. выражение (6.34)). Рассмотрим теперь соответствующий интеграл по фермионной петле

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \int \frac{d^5 q}{(2\pi)^5} \frac{\text{Tr} \left[\Gamma_\mu (q_\lambda \Gamma_\lambda + q_z \Gamma_z + im_f) \Gamma_\nu (l_\rho \Gamma_\rho + l_z \Gamma_z + im_f) \right]}{(q^2 + q_z^2 + m^2)(l^2 + l_z^2 + m^2)}. \quad (6.35)$$

Здесь мы обозначили $l = q - p$. Вводя фейнмановский параметр интегрирования x и раскрывая следовую структуру в (6.35), получим

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \int \frac{d^5 q}{(2\pi)^5} \int_0^1 dx \frac{2^3 (q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - \eta_{\mu\nu}(q, l) - \eta_{\mu\nu} q_z l_z - \eta_{\mu\nu} m_f^2)}{[(1-x)(q^2 + q_z^2 + m_f^2) + x(l^2 + l_z^2 + m_f^2)]^2}. \quad (6.36)$$

Выделяя полный квадрат в знаменателе и сдвигая переменную интегрирования $\widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q} - x\widehat{P}$, имеем

$$\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{2^3 \left[-\eta_{\mu\nu} \left(1 - \frac{2}{D}\right) Q^2 + (\eta_{\mu\nu} P^2 - 2p_\mu p_\nu) x(1-x) - m_f^2 \eta_{\mu\nu} \right]}{[Q^2 + \Delta_m]^2} \quad (6.37)$$

где $\Delta_m = m_f^2 + P^2 x(1-x)$, $P^2 = p_z^2 + p^2$ а $D = 5$. Используя известные значения интегралов в размерной регуляризации

$$\int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[Q^2 + \Delta_m]^2} = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(\frac{1}{\Delta_m} \right)^{2-D/2} \quad (6.38)$$

$$\int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{\left(-\frac{2}{D} + 1\right) Q^2}{[Q^2 + \Delta_m]^2} = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} (-\Delta_m) \left(\frac{1}{\Delta_m} \right)^{2-D/2}, \quad (6.39)$$

получим

$$\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, p_z) = \int_0^1 dx \frac{2^3}{(4\pi)^2} 2\sqrt{\Delta_m} (\eta_{\mu\nu} P^2 - p_\mu p_\nu) x(1-x). \quad (6.40)$$

Литература

1. G. Nordstrom, “On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields” // *Phys. Z.* **15**, 504 (1914).
2. T. Kaluza, “On the Problem of Unity in Physics” // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921**, 966 (1921).
3. O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)” // *Z. Phys.* **37**, 895 (1926).
4. V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Do We Live Inside A Domain Wall?” // *Phys. Lett. B* **125**, 136 (1983).
5. K. Akama, “An Early Proposal of 'Brane World'” // *Lect. Notes Phys.* **176**, 267 (1982)
6. S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov and S. M. Sibiryakov, “Quasi-localized states on noncommutative solitons” // *JHEP* **0201**, 037 (2002).
7. L. Randall and R. Sundrum, “An alternative to compactification” // *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
8. B. Bajc and G. Gabadadze, “Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de Sitter space” // *Phys. Lett. B* **474**, 282 (2000).
9. I. Oda, “Localization of matters on a string-like defect” // *Phys. Lett. B* **496**, 113 (2000).
10. S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, “Brane world: Disappearing massive matter” // *Phys. Rev. D* **62**, 105011 (2000).
11. S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, “Is the electric charge conserved in brane world?” // *JHEP* **0008**, 041 (2000).
12. R. Gregory, V. A. Rubakov and S. M. Sibiryakov, “Brane worlds: The gravity of escaping matter” // *Class. Quant. Grav.* **17**, 4437 (2000).
13. P. Mathews, V. Ravindran, K. Sridhar and W. L. van Neerven, “Next-to-leading order QCD corrections to the Drell-Yan cross section in models of TeV-scale gravity” // *Nucl. Phys. B* **713**, 333 (2005)

14. D. de Florian, M. Mahakhud, P. Mathews, J. Mazzitelli and V. Ravindran, “Next-to-Next-to-Leading Order QCD Corrections in Models of TeV-Scale Gravity” // arXiv:1312.7173 [hep-ph].
15. R. Frederix, M. K. Mandal, P. Mathews, V. Ravindran and S. Seth, “Drell-Yan, ZZ, W+W- production in SM ADD model to NLO+PS accuracy at the LHC” // Eur. Phys. J. C **74**, 2745 (2014).
16. E. E. Boos, V. E. Bunichev, I. P. Volobuev and M. N. Smolyakov, “Geometry, physics, and phenomenology of the Randall-Sundrum model,” // Phys. Part. Nucl. **43**, 42 (2012).
17. N. Agarwal, V. Ravindran, V. K. Tiwari and A. Tripathi, “Z boson pair production at the LHC to $O(\alpha(s))$ in TeV scale gravity models” // Nucl. Phys. B **830**, 248 (2010).
18. G. F. Giudice, R. Rattazzi and J. D. Wells, Nucl. Phys. B **544**, 3 (1999) <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9811291>[arXiv:hep-ph/9811291].
19. S. B. Giddings and E. Katz, “Effective theories and black hole production in warped compactifications” // J. Math. Phys. **42**, 3082 (2001).
20. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter” // Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
21. T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, “Localizing gravity on a string-like defect in six dimensions”// Phys. Rev. Lett. **85**, 240 (2000).
22. S. L. Dubovsky and V. A. Rubakov, “On models of gauge field localization on a brane” // Int. J. Mod. Phys. A **16**, 4331 (2001).
23. H. J. Mosquera Cuesta, A. Penna-Firme and A. Perez-Lorenzana, Phys. Rev. D **67**, 087702 (2003) [<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0203010>arXiv:hep-ph/0203010]
24. K. Ichiki, P. M. Garnavich, T. Kajino, G. J. Mathews and M. Yahiro, Phys. Rev. D **68**, 083518 (2003) [<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0210052>arXiv:astro-ph/0210052]

25. T. Tanaka and Y. Himemoto, Phys. Rev. D **67**, 104007 (2003) [<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0301010>arXiv:gr-qc/0301010]
26. K. Enqvist, A. Mazumdar and A. Perez-Lorenzana, Phys. Rev. D **70**, 103508 (2004) [<http://arxiv.org/abs/hep-th/0403044>arXiv:hep-th/0403044]
27. H. A. Morales-Tecotl, O. Pedraza and L. O. Pimentel, Gen. Rel. Grav. **39**, 1185 (2007) [<http://arxiv.org/abs/physics/0611241>arXiv:physics/0611241]
28. S. N. Gninenko, N. V. Krasnikov, and A. Rubbia, ‘Extra dimensions and invisible decay of orthopositronium’ // Phys. Rev. D **67**, 075012 (2003).
29. A. Friedland and M. Giannotti, “Astrophysical bounds on photons escaping into extra dimensions” // Phys. Rev. Lett. **100**, 031602 (2008)
30. S. N. Gninenko, N. V. Krasnikov and V. A. Matveev, “Invisible Z' as a probe of extra dimensions at the CERN LHC” // Phys. Rev. D **78**, 097701 (2008)
31. D. I. Astakhov and D. V. Kirpichnikov, ”Vector bosons escaping from the brane: $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{nothing}$ ” // Phys. Rev. D **83**, 104031 (2011)
32. E. Boos, V. Bunichev, M. Dubinin, L. Dudko, V. Edneral, V. Ilyin, A. Kryukov, V. Savrin, A. Semenov, and A. Sherstnev PoS ACAT08:008, 2009
33. Sjostrand T Eden P Friberg C Lonnblad L Miu G Mrenna S and Norrbin E 2001 “High-energy physics event generation with PYTHIA 6.1” // *Comput. Phys. Commun.* **135** 238
34. S. Randjbar-Daemi and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **492**, 361 (2000) [[hep-th/0008079](http://arxiv.org/abs/hep-th/0008079)].
35. S. Ichinose, “Fermions in Kaluza-Klein and Randall-Sundrum theories” // Phys. Rev. D **66**, 104015 (2002)
36. Y. -X. Liu, L. Zhao and Y. -S. Duan, “Localization of Fermions on a String-like Defect” // JHEP **0704**, 097 (2007)
37. S. Pal and S. Kar, “De Sitter branes with a bulk scalar” // Gen. Rel. Grav. **41**, 1165 (2009).

38. L. -J. Zhang and G. -H. Yang, “Zero Modes of Matter Fields on Scalar Flat Thick Branes” // arXiv:0907.1178 [hep-th].
39. H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y. -X. Liu, D. Malagon-Morejon and R. R. Morala Luna, “Localization of bulk matter fields on a pure de Sitter thick braneworld” // arXiv:1103.2430 [hep-th].
40. Y. -X. Liu, X. -N. Zhou, K. Yang and F. -W. Chen, “Localization of 5D Elko Spinors on Minkowski Branes” // Phys. Rev. D **86**, 064012 (2012).
41. J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold” // Phys. Rev. D **84**, 085027 (2011)/
42. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov and O. O. Novikov, “Localization of scalar fields on self-gravitating thick branes” // arXiv:1210.3698 [hep-th].
43. G. R. Dvali and M. A. Shifman, “Domain walls in strongly coupled theories” // Phys. Lett. B **396**, 64 (1997)
44. M. N. Smolyakov, “On unremovable divergencies in four-dimensional electrodynamics localized on a domain wall” // Phys. Rev. D **85**, 045036 (2012) [<http://arxiv.org/abs/1111.1366>arXiv:hep-th/1111.1366]
45. M. N. Smolyakov, “More on divergences in brane world models” // Phys. Rev. D **87**, 104035 (2013)
46. T. Gherghetta, E. Roessl and M. E. Shaposhnikov, “Living inside a hedgehog: Higher dimensional solutions that localize gravity,” Phys. Lett. B **491**, 353 (2000)
47. V. A. Rubakov, “Large and infinite extra dimensions: An introduction” // Phys. Usp. **44**, 871 (2001)
48. C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics” // Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
49. M. Gluck, E. Reya and A. Vogt, “Dynamical parton distributions revisited” // Eur. Phys. J. C **5**, 461 (1998) [<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9806404>arXiv:hep-ph/9806404]

50. A. T. Barnaveli and O. V. Kancheli, “The Gauge fields on the soliton membrane. (In Russian)” // *Sov. J. Nucl. Phys.* **52**, 576 (1990) [*Yad. Fiz.* **52**, 905 (1990)].
51. A. Kehagias and K. Tamvakis, “Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce” // *Phys. Lett. B* **504**, 38 (2001) [hep-th/0010112].
52. M. E. Shaposhnikov and P. Tinyakov, “Extra dimensions as an alternative to Higgs mechanism?” // *Phys. Lett. B* **515**, 442 (2001).
53. L. Randall and M. D. Schwartz, “Quantum field theory and unification in AdS5” // *JHEP* **0111**, 003 (2001).