

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Яблоков Станислав Николаевич

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД
ФОКА-ШВИНГЕРА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ
ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРОПАГАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Кузнецов Александр Васильевич

Ярославль – 2022

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Классический и модифицированный методы Фока–Швингера	26
1.1. Введение	26
1.2. Классический метод Фока–Швингера	27
1.2.1. Описание метода	27
1.2.2. Применение метода. Вычисление пропагатора скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле	31
1.3. Модифицированный метод Фока–Швингера	36
1.3.1. Описание метода	36
1.3.2. Применение метода. Вычисление пропагатора скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле	38
1.4. Основные результаты первой главы	43
Глава 2. Пропагаторы частиц со спином в импульсном представлении	45
2.1. Введение	45
2.2. Пропагатор фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау	46
2.3. Пропагатор массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау	51
2.3.1. Пропагатор в метрике с сигнатурой $(-, +, +, +)$	51

2.3.2.	Сравнение методов вычисления пропагатора массивного векторного бозона	61
2.3.3.	Пропагатор в метрике с сигнатурой $(+,-,-,-)$	64
2.4.	Пропагатор фермиона во вращающейся среде	67
2.5.	Основные результаты второй главы	71
Глава 3.	Пропагаторы в координатном представлении	74
3.1.	Введение	74
3.2.	Пропагатор скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау	75
3.2.1.	Построение через классический метод Фока–Швингера .	75
3.2.2.	Построение в формализме канонического квантования . .	78
3.2.3.	Построение через модифицированный метод Фока–Швингера	80
3.3.	Пропагаторы частиц со спином во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау	82
3.3.1.	Пропагатор фермиона	82
3.3.2.	Пропагатор массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке	83
3.4.	Некоторые свойства пропагаторов	85
3.5.	Основные результаты третьей главы	89
	Заключение	91
	Список литературы	97

Введение

Научный процесс конца XX-го и начала XXI-го веков – это во многом попытка объединения различных областей человеческого знания. При этом данные области могут находиться друг с другом в совершенно разных как качественных, так и количественных взаимоотношениях. Наибольший интерес, однако, представляет такой междисциплинарный синтез, в котором сочетаются далёкие друг от друга концепции и идеи. Одна из таких областей, *астрофизика элементарных частиц* [1–3], соединяет в себе наименьшие составные части природы, элементарные частицы, с гигантскими космическими объектами, звёздами. Последние, в свою очередь, выступают в качестве своеобразных небесных лабораторий [4–6] для изучения первых, тем самым предоставляя исследователю доступ к экстремальным физическим условиям, которые недостижимы в рамках наземных экспериментов с частицами.

Историю астрофизики элементарных частиц, пожалуй, стоит отсчитывать от начала 1930-х годов. Сразу после открытия нейтрона в экспериментах Дж. Чедвика в 1932-ом году [7] была предложена концепция нейтронной звезды. Авторами этой идеи выступили как Л.Д. Ландау [8], так и независимо от него В. Бааде и Ф. Цвикки [9]. Другой важнейшей вехой в развитии этой дисциплины стала регистрация межгалактических нейтрино в 1987 году, испущенных в результате взрыва сверхновой SN1987A [10] в Большом Магеллановом Облаке, минигалактике-спутнике Млечного Пути. Наконец, с той или иной степенью уверенности можно говорить о том, что окончательное становление астрофизики элементарных частиц произошло в 2001-ом году после решения проблемы солнечных нейтрино [11]. В результате эксперимента в нейтринной обсерватории в Садбери (Канада) была подтверждена идея Б.Понтекорво о нейтринных осцилляциях, что означало как наличие ненулевых параметров в лептонной матрице смешивания, так и отличную от нуля массу нейтрино [12–14].

Стоит отметить, что в случае с экспериментом по регистрации осцилля-

ций нейтрино экспериментальная установка состояла фактически из двух частей, первой из которых являлось Солнце, которое генерировало поток частиц со стабильными во времени и пространстве свойствами, а в качестве второй выступало непосредственно оборудование в Садбери. Такая конфигурация, где звёзды выступают в качестве фабрик по производству частиц, является характерной для данной науки. Однако, параметры самих звёзд, такие как, например, напряжённость магнитного поля, могут значительно варьировать, тем самым существенно влияя на характер протекаемых процессов.

Анализ квантово-полевых процессов во внешних электромагнитных полях требует точного учёта вклада этих полей в вычисляемые амплитуды. При этом, по сравнению с бесполевым случаем, модификации подвергаются как полевые функции одночастичных состояний, так и соответствующие пропагаторы [15]. При нахождении последних имеется два принципиально разных подхода. Первый из них применяется в схеме канонического квантования [16] и основан на использовании точных решений полевого уравнения:

$$H(\partial_X, X) \psi(X) = 0.$$

При этом для вычисления пропагатора требуется найти упорядоченное по времени вакуумное среднее произведения построенных по этим решениям полевых операторов:

$$G(X, X') = (-i) \langle 0 | T \{ \psi(X) \psi^*(X') \} | 0 \rangle.$$

Стоит отметить, что в данном случае неотъемлемой частью вычислений является нормировка одночастичных состояний, а также (при рассмотрении частиц со спином) их ортогонализация, за которой следует построение спиновой матрицы плотности. Наличие всех этих вычислительных этапов способно значительно усложнить процесс нахождения пропагатора, в особенности при исследовании процессов во внешних полях.

Второй часто используемый подход для построения пропагаторов происходит из формализма континуального интеграла [17] и заключается в нахождении

дении решения так называемого пропагаторного уравнения. Это уравнение по форме схоже с полевым уравнением, однако, вместо нуля в правой части оно содержит четырёхмерную дельта-функцию от разности пространственно-временных координат:

$$H(\partial_X, X) G(X, X') = \delta^{(4)}(X - X').$$

Упомянутые в контексте формализма канонического квантования вычислительные этапы, связанные с нормировкой и ортогонализацией одночастичных состояний, а также процедура построения спиновой матрицы плотности, в данном подходе отсутствуют, что во многом обеспечивается наличием дельта-функции. Этот факт позволяет избежать ряда трудоёмких вычислений, что в особенности актуально в случае больших как пространственно-временных, так и спиновых размерностей.

В бесполовом случае пропагаторное уравнение решается с использованием трансляционной инвариантности, что позволяет в один шаг перейти к фурье-образам обеих его частей:

$$\begin{aligned} G(X, X') = G(X - X') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(p(X-X'))} G(p), \\ \delta^{(4)}(X - X') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(p(X-X'))}. \end{aligned}$$

Такая переформулировка задачи сводит исходное дифференциальное уравнение к алгебраическому, что сразу же приводит нас к ответу в импульсном представлении:

$$G(p) = \frac{1}{H(p)}.$$

Однако, при наличии внешнего электромагнитного поля трансляционная инвариантность (частично) нарушается, и описанный подход становится неприменимым. Тем не менее для ряда конфигураций внешнего поля данная задача сохраняет достаточную степень симметрии, тем самым позволяя получить её точное аналитическое решение.

Одним из зарекомендовавших себя подходов для решения пропагаторного уравнения в этом случае является метод, разработанный Дж. Швингером [18] на основе формализма собственного времени В. Фока [19]. В основе классического метода Фока–Швингера (ФС) лежит представление искомого пропагатора в следующем интегральном виде:

$$G(X, X') = (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau U(X, X'; \tau).$$

Тем самым задача нахождения неизвестной функции $G(X, X')$ сводится к задаче определения другой неизвестной функции $U(X, X'; \tau)$, уравнение на которую может быть получено путём наложения некоторых естественных условий (см. Главу 1).

Однако, применение метода ФС в ряде случаев может быть сопряжено с определёнными трудностями. Во-первых, сам процесс построения швингеровской формы пропагатора не является тривиальным, включая в себя существенное число вычислительных этапов. Во-вторых, получающееся в результате его использования выражение оказывается записанным в координатном представлении. В связи с тем, что для значительного числа задач более предпочтительным оказывается использование импульсного представления, это влечёт за собой необходимость выполнять соответствующие преобразования Фурье. В-третьих, на всех вычислительных стадиях (вплоть до финального результата) присущие данной задаче квантовые числа фактически оказываются скрыты в соответствующих математических конструкциях, а интегральная параметризация через параметр собственного времени является плохо интерпретируемой. При этом переход от швингеровской формы к параметризации (например, разложению в ряд) с задействованием этих квантовых чисел (например, уровней Ландау) составляет трудоёмкую (хоть и разрешимую) задачу.

В связи с этим в данной диссертации представлена разработанная соискателем модификация классического метода Фока–Швингера, которая позволяет

во многом решить обозначенные выше проблемы. Модифицированный метод Фока–Швингера (МФС) вобрал в себя некоторые аспекты как исходного метода ФШ, так и подхода в рамках формализма канонического квантования. Как было показано в рамках данной работы на примере задач во внешнем постоянном однородном магнитном поле (а также для случая частицы во вращающейся среде), это приводит к существенному упрощению вычислительного процесса, что при использовании метода МФС для прочих физических конфигураций может в значительной степени понижать порог входа в соответствующую проблематику.

Актуальность темы исследования.

В настоящее время, благодаря значительному росту наблюдательных данных, астрофизика элементарных частиц активно развивается. При рассмотрении разнообразных астрофизических конфигураций наличие внешних полей является скорее нормой, нежели исключением. В первую очередь это касается магнитных полей, которые проявляются как на разных пространственных масштабах (до ~ 100 килопарсек), так и в широком диапазоне интенсивностей (от $\sim 10^{-21}$ Гс до $\sim 10^{17}$ Гс) [20–23]. Для соответствующих квантово-полевых процессов в таком случае принято говорить о наличии внешней активной среды [15, 24, 25], непосредственно влияющей на их протекание.

Типичным её проявлением является снятие кинематического запрета на ряд реакций в сильном магнитном поле. К таковым относятся распад фотона на электрон-позитронную пару $\gamma \rightarrow e^-e^+$ [26], расщепление фотона на два фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ [27–37], образование электрон-позитронной пары из нейтрино $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ [38–46], черенковское излучение нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ [47–50], распад фотона на пару нейтрино-антинейтрино $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ [47–49, 51, 52], распад аксиона $a \rightarrow f\bar{f}$ [53], а также некоторые другие процессы.

Для данного рода задач существуют характерные масштабы напряжённости магнитного поля, которые естественным образом возникают в процессе

вычислений. Например, для постоянного магнитного поля одним из таковых является критическое (швингеровское) значение напряжённости:

$$B_e = m_e^2/e \approx 4.4 \times 10^{13} \text{ Гс},$$

которое является квантующим для электрона. Магнитные поля с напряжённостью порядка B_e непосредственно связаны с магнитарами, то есть нейтронными звёздами, эволюция которых происходит при значительном влиянии магнитосферы [54–60].

Второй характерный масштаб определяется массой W -бозона:

$$B_W = m_W^2/e \approx 1.1 \times 10^{24} \text{ Гс}.$$

При таких огромных значениях поля встаёт вопрос о применимости Стандартной Модели, например, для описания электрослабого вакуума. В работе [61] при анализе пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле было обнаружено, что для массивного векторного бозона при значениях напряжённости поля $B > B_W$ имеет место так называемая нестабильность вакуума. Однако, в работе [62] при вычислении эффективной массы W -бозона было показано, что радиационные поправки препятствуют нестабильности вакуума.

Другими важными примерами проявления столь сильных полей (помимо астрофизических конфигураций) являются электромагнитные волны высокой интенсивности, генерируемые системой лазеров [63–66], а также эксперименты на современных коллайдерах, например, с нецентральными столкновениями тяжёлых ионов [67–70].

Наконец, заметим, что среди всевозможных конфигураций внешнего электромагнитного поля в последние годы сильно возрос интерес к случаю сверхсильного электрического поля, тесно связанному с так называемым швингеровским рождением электрон-позитронных пар (эффект Саутера-Швингера [18, 71, 72]). Соответствующий масштаб напряжённости электрического поля опре-

деляется пороговой энергией рождения швингеровской пары:

$$E_s = 2m_e^2/e \approx 2.64 \times 10^{18} \text{ В/м}.$$

Помимо классического 3+1-мерного пространства Минковского, данный эффект был исследован также в пространстве де Ситтера [73–75] и анти-де Ситтера [76–78]. В дополнение к случаю постоянного однородного электрического поля в литературе обсуждается как конфигурация с переменным [79], так и с неоднородным [80] электрическим полем. Кроме того, рассматриваются всевозможные модуляции внешнего электрического поля, например, путём добавки более слабого пульсирующего электрического поля [81, 82], магнитного поля [83], поля плоской электромагнитной волны [84], а также за счёт внедрения термального фона [85] и фонового поля аксионов [86].

Для исследования всех упомянутых выше конфигураций внешнего электромагнитного поля (а также многих других) важным является знание пропагаторов участвующих в процессах частиц. Из соответствующей задачи для внешнего постоянного магнитного поля мы знаем, что имеется разнообразие всевозможных их представлений. Пропагатор, во-первых, может быть записан либо в импульсном либо в координатном представлении, а во-вторых, влияние поля может быть описано посредством того или иного разложения, то есть в ряд по уровням Ландау или же в виде интеграла по параметру собственного времени.

Традиционно в квантовой теории поля превалирует импульсная парадигма. Это связано с удобством представления амплитуд процессов в импульсном пространстве посредством соответствующих диаграмм Фейнмана [16]. Поэтому важной характеристикой того или иного метода построения пропагаторов является его способность давать выражения для пропагатора максимально приближенные к импульсному представлению. В противном случае, требуется выполнение ряда (не всегда тривиальных) преобразований, что в целом повышает трудоёмкость вычислительного процесса, а также делает его менее прозрачным.

Однако, стоит заметить, что для ряда задач координатное представление оказывается более предпочтительным, так как позволяет упростить вычисление соответствующих петлевых интегралов. В частности, это относится к интегралам, возникающим при рассмотрении диаграмм sunset-типа, которые могут быть эффективно вычислены для сколь угодно большого числа петель. Для этих диаграмм был разработан специальный метод, основанный на использовании координатного представления пропагаторов [87–90]. Он предполагает применение рекуррентных соотношений, возникающих при интегрировании по частям в рамках формализма размерной регуляризации [91, 92]. Конечный результат в данном подходе выражается через немногочисленное семейство основных однопараметрических интегралов. Значения этих интегралов могут быть несложным образом найдены (аналитически либо численно), в то время как выражение диаграмм через эти интегралы требует лишь алгебраических манипуляций [93]. Запись конечного ответа через интегралы простого вида является важным не только с аналитической, но и с вычислительной точки зрения, так как это позволяет избежать ряда численных ошибок, накопление которых характерно при работе с интегралами высокой кратности.

Удобство работы с пропагаторами в координатном представлении проявляется также в том, что в нём (аналогично импульсному представлению) является возможной регуляризация расходимостей. Например, метод регуляризации путём ограничения пространственной области интегрирования с использованием экспоненциального множителя с масштабным параметром был рассмотрен в [94]. Это дало результатом компактные выражения для интегралов от произведений и степеней различных функций Бесселя, которые часто встречаются при исследовании петлевых диаграмм sunset-типа. В работе [95] была продемонстрирована схема размерной регуляризации в координатном представлении, которая заключалась в контроле порядка ν функций Бесселя. Сопутствующие выражения имели расходимость в начале координат, и представляли собой выражения, зависящие от ν -ой степени пространственно-временного интервала. Описанный

в данной работе метод был успешно применён как для пропагатора безмассовой частицы, так и для массивного случая. Авторы отмечают, что основным преимуществом размерной регуляризации в координатном пространстве является аналитическая зависимость выражений от порядка функции Бесселя ν . Хотя такой подход, конечно же, не избавляет от ультрафиолетовых расходимостей (которые проявляются как полюса ν -аналитической функции), прочие возникающие с расходимостями проблемы оказываются устранимы в том или ином смысле.

Типичной из таковых является проблема произведения обобщённых функций [96], к классу которых собственно и относятся пропагаторы частиц в квантовой теории поля. Говоря строго математически, произведение обобщённых функций с совпадающими сингулярностями не является вполне определённым объектом. Поэтому рассмотрение выражений (возникающих при исследовании петлевых диаграмм) с произведениями и степенями пропагаторов требует особой аккуратности. В частности, требуется доопределение этих операций таким образом, чтобы они не выводили из рассматриваемого класса обобщённых функций. В рамках предложенного в работе [95] подхода это достигается путём выбора определённой области на комплексной ν -плоскости, внутри которой операции произведения и степени пропагаторов вводятся естественным образом. Результатом же этих операций в полной области аналитичности считается их аналитическое продолжение на всю эту область согласно методу из [97]. Полученное таким образом выражение может в дальнейшем быть рассмотрено без дополнительных проблем с сингулярностями, например, уже в импульсном пространстве.

Наконец, стоит отметить, что методы нахождения пропагаторов во внешних электромагнитных полях применимы и для задач в криволинейных координатах [98], в частности, в искривлённом пространстве-времени. Это объясняется единством математического описания соответствующих физических конфигураций через аппарат ковариантной производной.

Всё вышесказанное свидетельствует об исключительной важности изучения всевозможных представлений пропагаторов частиц в различных физических конфигурациях, а также о необходимости развития соответствующих методов их построения.

Степень разработанности темы исследования.

История нахождения пропагаторов заряженных частиц во внешних электромагнитных полях берёт своё начало во многом со статьи Джулиана Швингера [18], в которой был впервые предложен в общем виде классический метод Фока–Швингера [99]. В данной работе было также получено выражение для пропагатора электрона в координатном представлении в виде интеграла по параметру собственного времени для случая постоянного электромагнитного поля (а также поля плоской электромагнитной волны), из которого можно вывести формулу для частного случая постоянного магнитного поля.

Среди других форм пропагатора электрона в постоянном однородном магнитном поле стоит отметить (i) результат из публикации [100], в которой был рассмотрен случай сверхсильного магнитного поля и оценен вклад основного уровня Ландау, (ii) разложение в ряд по величине напряженности магнитного поля из работы [101], а также (iii) представление, полученное в статье [102] переходом от швингеровской формы к разложению в ряд по целочисленному параметру, где полюса членов ряда соответствовали уровням Ландау. В последнем случае справедливость интерпретации разложения в ряд как разложения по уровням Ландау была подтверждена в [103] путём построения пропагатора исходя из точных решений уравнения Дирака.

Помимо фермиона, известны пропагаторы и для других заряженных частиц в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля, а именно, для скалярной частицы [104] и для массивного векторного бозона. В последнем случае выражения пропагатора были получены как методом Фока–Швингера [105] (см. также [106]) в произвольной ξ -калибровке, так и с использованием

точных решений полевого уравнения [107] в калибровке Фейнмана ($\xi = 1$). В работе [108] (см. также [15]) было выполнено интегрирование результата из [105] по параметру собственного времени, что дало выражение, совпадающее при $\xi = 1$ с формулой из [107].

Наконец, имеются аналитические выражения пропагатора для иных важных конфигураций электромагнитного поля. В первую очередь это касается случая плоской электромагнитной волны. Помимо ранее указанного результата из статьи Дж. Швингера, имеются и другие формы пропагатора уравнения Дирака в поле внешней плоской волны [109–116]. Эти выражения могут находить непосредственное применение при анализе таких процессов второго порядка, как, например, нелинейное двойное комптоновское рассеяние. Кроме того, данный пропагатор необходим для изучения радиационных поправок в процессах с наличием электромагнитных полей от лазерных установок, что достигается вычислением массового [117] и поляризационного [118, 119] операторов. Эти операторы широко использовались при исследовании радиационных поправок и поляризации вакуума в поле плоской электромагнитной волны, а также для нахождения скорости рождения пар Брейта–Уилера с использованием оптической теоремы [120].

При проведении вычислений для ряда физических конфигураций, например, при достаточно малых либо достаточно больших (по сравнению с рассмотренными выше масштабами) значениях величины магнитного поля, становятся возможными некоторые упрощения, в частности, обрезание ряда по уровням Ландау. Однако, имеется ряд прецедентов, когда непонимание особенностей этих конфигураций приводило к неверным результатам. Например, вычисление оператора собственной энергии нейтрино в магнитном поле было проведено в [121, 122] путём анализа однопетлевой диаграммы $\nu \rightarrow e^- W^+ \rightarrow \nu$. При этом авторы ограничились только лишь вкладом основного уровня Ландау в итоговое выражение пропагатора электрона. Как было показано в [123], в этом случае вклад основного уровня Ландау не является доминирующим из-за боль-

шой виртуальности электрона, что обязывает учитывать вклады других уровней Ландау, величины которых были того же порядка. Игнорирование данного факта привело авторов [121, 122] к неверным результатам.

Другим схожим примером является попытка оценить вероятность распада нейтрино $\nu \rightarrow e^- W^+$ во внешнем магнитном поле в пределе сверхбольших энергий нейтрино через мнимую часть однопетлевой амплитуды процесса $\nu \rightarrow e^- W^+ \rightarrow \nu$. Изначально выражение для данной вероятности было получено в работе [124]. Далее, вычисления были повторены в статье [125], где авторы настаивали на другом результате. Наконец, независимая проверка [126] подтвердила изначальный результат из работы [124]. Наиболее вероятной причиной ошибки в [125] видится использование лишь линейных (по интенсивности магнитного поля) членов разложения пропагатора W -бозона, в то время как квадратичные члены тоже давали существенный вклад.

Всё вышесказанное, с одной стороны, подчёркивает немалую степень разработанности темы исследования, а с другой, свидетельствует о важности как использования более простых и наглядных выражений пропагаторов, так и разработки методов их нахождения.

Цели и задачи диссертационной работы.

- Выполнить сравнительный анализ существующих методов нахождения пропагаторов заряженных частиц во внешних электромагнитных полях на предмет их вычислительной сложности, а также в контексте применения полученных представлений пропагаторов для конкретных физических задач.
- Исследовать действие экспоненциального оператора, возникающего в рамках классического метода Фока–Швингера, на дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.

- Используя разработанную модификацию классического метода Фока–Швингера, получить выражения для пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в импульсном представлении в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Получить выражения для координатного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Рассмотреть разные методы нахождения координатного представления.
- Изучить свойства найденных представлений пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.

Научная новизна.

- Разработана в общем виде модификация классического метода Фока–Швингера для решения пропагаторного уравнения.
- Впервые применён разработанный модифицированный метод Фока–Швингера для нахождения импульсного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Впервые найдено в общем виде представление пропагаторов заряженных частиц со спином (фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем произвольном постоянном однородном электромагнитном поле в виде интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, действу-

ющих на четырёхмерную дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.

- Впервые найдено координатное представление пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Впервые обнаружен эффект влияния радиальной координаты из двумерной евклидовой плоскости (перпендикулярной направлению магнитного поля) на полную амплитуду пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.
- Предложенный модифицированный метод Фока–Швингера прошёл независимую проверку сторонней группой авторов, в работе которой с его использованием был найден пропагатор фермиона во вращающейся среде.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты, изложенные в настоящей диссертации, обладают как теоретической, так и практической ценностью. Их значимость для теоретических исследований, во-первых, заключается в разработке нового метода построения пропагаторов, который сочетает в себе отдельные особенности как формализма канонического квантования, так и классического метода Фока–Швингера. Во-вторых, полученные в самом общем виде представления пропагаторов могут использоваться для теоретического анализа выражений в тех случаях, где не требуется их явный вид.

Напротив, конкретные выражения пропагаторов, представленные в данной работе, полезны с практической точки зрения для вычисления амплитуд процессов во внешнем постоянном однородном магнитном поле. При этом использоваться может как зарекомендовавшее себя в квантово-полевых расчётах импульсное представление, так и перспективное для некоторых классов диа-

грамм координатное представление. Наконец, определённой практической ценностью обладают не только полученные в рамках данной диссертации конечные формулы в виде разложения в ряд по уровням Ландау, но и несколько удобных промежуточных выражений.

Методология и методы исследования.

При выполнении данной работы использовались общие методы как квантовой теории поля, так и теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также более специализированные подходы, такие как (i) методы квантовой теории поля во внешних полях, (ii) методы теории обобщённых функций, (iii) элементы теории специальных функций математической физики. В частности, пропагаторы заряженных частиц вычислялись как с использованием формализма канонического квантования, так и путём решения пропагаторного уравнения, возникающего в рамках формализма континуального интеграла. В последнем случае использовался как классический метод собственного времени Фока–Швингера, так и разработанная в рамках данной работы его модификация. При этом всецело применялись различные представления дельта-функции в виде сумм и интегралов, а возникающие интегральные и дифференциальные выражения вычислялись с использованием свойств специальных функций математической физики.

Положения, выносимые на защиту.

- Разработана в общем виде модификация классического метода Фока–Швингера для решения пропагаторных уравнений.
- Впервые применён разработанный модифицированный метод Фока–Швингера для нахождения импульсного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном

поле в виде разложения по уровням Ландау.

- Впервые найдено в общем виде представление пропагаторов заряженных частиц со спином (фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем произвольном постоянном однородном *электромагнитном* поле в виде интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, действующих на четырёхмерную дельта-функцию от разности пространственно-временных координат из правой части пропагаторного уравнения.
- Впервые найдено координатное представление пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау.
- Исследованы некоторые свойства представления пропагаторов заряженных частиц в постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау, в частности впервые обнаружен эффект влияния радиальной координаты из двумерной евклидовой плоскости (перпендикулярной направлению магнитного поля) на полную амплитуду пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты работы докладывались лично автором на следующих российских и международных конференциях, школах и семинарах:

- 4th International Conference on Particle Physics and Astrophysics (г.Москва, НИЯУ МИФИ, 22-26 октября 2018 г.)
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 22-30 апреля 2019 г.

- Moscow International School of Physics 2020. 3-9 March 2020. HSE Study Center “Voronovo”
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 20-30 апреля 2020 г.
- 5th International Conference on Particle Physics and Astrophysics (г.Москва, НИЯУ МИФИ, 5-9 октября 2020 г.)
- Virtual Workshop on the Schwinger Effect and Strong Field Physics. January 18-29, 2021. Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University
- Всероссийская с международным участием молодежная научно-практическая конференция "Физика, техника и технология сложных систем". Ярославль, 22-30 апреля 2021 г.

Публикации.

Материалы диссертации представлены в 6 работах. Из них 4 были опубликованы [127–130] в международных рецензируемых (и включенных в индексы цитирования Scopus и Web of Science) журналах из списка, рекомендованного ВАК для публикации результатов кандидатских и докторских диссертаций:

- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Charged massive vector boson propagator in a constant magnetic field in arbitrary ξ -gauge obtained using the modified Fock-Schwinger method // Phys. Rev. D **102** (2020) no.9. P. 096015.
- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Position-space representation of charged particles' propagators in a constant magnetic field as an expansion over Landau levels // Eur. Phys. J. C **82**, 193 (2022).
- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Exponential operator method for finding exact solutions of the propagator equation in the presence of a magnetic field // J. Phys. Conf. Ser. **1390** (2019) no.1. P. 012078.

- S. N. Iablokov and A. V. Kuznetsov, Coordinate-space representation of a charged scalar particle propagator in a constant magnetic field expanded as a sum over the Landau levels // J. Phys. Conf. Ser. **1690** (2020) no.1. P. 012087.

Также имеются 2 публикации [131, 132] в сборниках тезисов конференций:

- Яблоков С. Н. Построение пропагаторов модифицированным методом собственного времени Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2019. С. 70-71.
- Яблоков С. Н. Построение пропагатора заряженного векторного бозона во внешнем постоянном магнитном поле модифицированным методом Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль, ЯрГУ, 2020. С. 75-76.

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. А именно, соискателем был разработан в общем виде модифицированный метод Фока–Швингера, получены разнообразные представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле, а также изучены некоторые свойства этих представлений. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад соискателя был определяющим. Результаты проведённых научных исследований вошли в специальный курс, читаемый на кафедре теоретической физики физического факультета ЯрГУ им. П.Г.Демидова (г.Ярославль).

Структура и объем диссертации.

Данная диссертация посвящена развитию методов построения пропагаторов заряженных частиц во внешних электромагнитных полях, в частности, модифицированному методу Фока–Швингера, который был представлен соискателем в работах [127–132]. Она состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 110 страниц, из них 96 страниц текста, включая 1 рисунок. Библиография включает 150 наименований на 14 страницах.

Во **введении** даётся краткая историческая справка, а также обсуждаются значимые научные результаты, как те, что отражают степень разработанности темы исследования, так и те, в контексте которых прослеживается актуальность данной работы. За введением следует содержательная часть диссертации, состоящая из трёх глав.

В **первой главе** даётся достаточно подробное описание классического метода Фока–Швингера (ФС) для решения пропагаторных уравнений, а также, в качестве примера, приводится его применение для нахождения швингеровского представления пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле. С одной стороны, соответствующий раздел данной главы выступает в качестве справочного материала, а с другой – закладывает основу и обоснование для развития модифицированного метода Фока–Швингера (МФС). Будучи сформулированным в общем виде, метод МФС в дальнейшем используется для нахождения импульсного представления пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Получившееся в итоге выражение совпало с известной ранее формулой из литературы, что служит косвенной проверкой предложенного метода. В заключении главы сравниваются (как с точки зрения общих свойств, так и в контексте рассмотренных примеров) три подхода для нахождения пропагаторов (формализм каноническо-

го квантования, а также методы ФШ и МФШ), обсуждаются плюсы и минусы каждого из них.

Вторая глава посвящена построению пропагаторов заряженных частиц со спином (а именно, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) с использованием метода МФШ в импульсном представлении в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Для случая внешнего произвольного постоянного однородного электромагнитного поля вычисляются коммутаторы слагаемых из оператора в правой части пропагаторного уравнения. Благодаря полученным коммутационным соотношениям удаётся провести разделение экспоненциального оператора согласно формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа. В итоге для данной физической конфигурации это приводит нас к общему виду представления пропагатора как интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, последовательно действующих на дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат. Далее, рассматривается частный случай постоянного однородного магнитного поля, для которого находятся импульсные представления пропагаторов заряженных частиц со спином в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Наконец, приводится краткое описание результата, полученного сторонней группой авторов, где ими был успешно применён метод МФШ для совершенно другой физической конфигурации, а именно, для решения задачи о нахождении пропагатора фермиона во вращающейся среде.

В третьей главе рассматривается процесс построения координатного представления пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. При этом для скалярной частицы обсуждаются три подхода (в рамках формализма канонического квантования, а также с использованием методов ФШ и МФШ), дающие идентичные результаты. Будучи предпочтительным подходом для частиц со спином, метод МФШ далее применяется для нахождения пропагаторов

фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке. Наконец, проводится анализ взаимосвязи множителей в членах разложения в ряд по уровням Ландау, в рамках которого оценивается влияние радиальной координаты (в евклидовой двумерной плоскости, перпендикулярной направлению поля) на масштаб амплитуды пропагатора косвенно через номер уровня Ландау.

Наконец, в **заключении** подытоживаются полученные результаты, а также даётся краткая сравнительная характеристика известных методов нахождения пропагаторов. В частности, обсуждаются достоинства и недостатки метода МФШ, возможности его применения для решения иных задач, а также потенциальные направления его развития.

Основные обозначения, используемые в диссертации

Если отдельно не оговорено иное, то по-умолчанию используется метрический тензор с сигнатурой $(+, -, -, -)$, а также задействована естественная система единиц $\hbar = 1, c = 1$.

Электрический заряд: $e = |e|$. Знак заряда: $Q = \pm 1$. Масса частиц: m .

Помимо тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (где A_ν – 4-потенциал электромагнитного поля), в случае постоянного однородного магнитного поля используется также обезразмеренный тензор: $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ (где B – величина напряжённости магнитного поля).

Матрицы Дирака γ^μ выбраны в представлении Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix},$$

где I – единичная матрица, а $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули.

У 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:

$$(\varphi Z)^\mu = \varphi^\mu_\nu Z^\nu, \quad (p\varphi\partial) = p_\mu \varphi^\mu_\nu \partial^\nu.$$

Глава 1

Классический и модифицированный методы Фока–Швингера

1.1. Введение

В данной главе даётся достаточно подробное описание классического метода Фока–Швингера (ФС) для решения пропагаторных уравнений, из которого в дальнейшем развивается модифицированный метод Фока–Швингера (МФС). Метод МФС был впервые опубликован соискателем в работе [127], и в дальнейшем использовался в статьях [128–130]. Для иллюстрации вычислительных аспектов, связанных с применением обоих методов, с их помощью находится выражение для пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле. При этом в результате применения метода ФС получается выражение в координатном представлении в виде швингеровского интеграла по параметру собственного времени, а результатом применения метода МФС является импульсное представление в виде разложения в ряд по уровням Ландау.

В процессе вычислений в рамках метода МФС выводится ряд соотношений, полезных при построении пропагаторов во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Эти соотношения далее будут использованы при нахождении выражений пропагаторов других частиц в тех или иных представлениях. В заключении главы приводится сравнение соответствующих вычислительных этапов, обсуждаются преимущества метода МФС перед методом ФС, а также перед схемой построения пропагатора в рамках формализма канонического квантования.

1.2. Классический метод Фока–Швингера

1.2.1. Описание метода

Квантование полей в рамках формализма континуального интеграла приводит к следующему дифференциальному уравнению на пропагатор рассматриваемой частицы:

$$H(\partial_X, X) G(X, X') = \delta^{(4)}(X - X'), \quad (1.1)$$

где $H(\partial_X, X)$ – оператор соответствующего полевого уравнения.

В рамках данной главы коснёмся задачи только лишь для скалярной частицы, а это означает, что H и G являются скалярными выражениями. Аналогичная задача для частиц со спином решается схожим образом.

Заметим, что при наличии внешнего электромагнитного поля возникает ряд трудностей в решении пропагаторного уравнения. Это связано с тем, что нарушается трансляционная инвариантность, наличие которой в случае свободных полей давало возможность перейти к фурье-образу. Однако, для некоторых конфигураций внешнего электромагнитного поля сохраняется достаточное число симметрий, что позволяет получить точное аналитическое выражение пропагатора. Этот факт находит отражение в одном из зарекомендовавших себя методов решения пропагаторного уравнения – классическом методе собственного времени Фока–Швингера [18].

В его основе лежит представление искомого пропагатора в следующем интегральном виде:

$$G(X, X') = (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau U(X, X'; \tau). \quad (1.2)$$

Тем самым задача нахождения неизвестной функции $G(X, X')$ сводится к задаче определения другой неизвестной функции $U(X, X'; \tau)$. Представление (1.2) автоматически даёт нам условие, которому должна удовлетворять эта функция,

а именно:

$$H(\partial_X, X) G(X, X') = (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau H(\partial_X, X) U(X, X'; \tau) = \delta^{(4)}(X - X'). \quad (1.3)$$

Может так оказаться, что разные подынтегральные функции $U(X, X'; \tau)$, будучи проинтегрированными по τ , приведут к одному и тому же выражению для пропагатора $G(X, X')$. Для решения (1.1) нужно найти хотя бы одну такую $U(X, X'; \tau)$, поэтому мы вправе накладывать на неё любые разумные условия, лишь бы выполнялось (1.3).

В рамках классического метода Фока–Швингера накладываются такие условия, которые позволили бы провести аналитические выкладки для любого H . Для уточнения вида этих условий сперва заметим, что процедура аналитического интегрирования сводится в конечном итоге к представлению подынтегральной функции в виде производной по τ от некоей другой функции $W(X, X'; \tau)$. При этом получающееся таким образом условие

$$\partial_\tau W(X, X'; \tau) = H(\partial_X, X) U(X, X'; \tau) \quad (1.4)$$

помимо искомой функции $U(X, X'; \tau)$ содержит ещё и саму эту неизвестную функцию $W(X, X'; \tau)$. Чтобы выражение (1.4) в итоге представляло собой (дифференциальное) уравнение лишь с одной неизвестной функцией (т.е. функцией U), мы должны дополнительно потребовать явную зависимость W от U . Одним из (тривиальных) вариантов такой зависимости является выбор $W = iU$, приводящий к уравнению типа Шрёдингера:

$$i \partial_\tau U(X, X'; \tau) = H(\partial_X, X) U(X, X'; \tau). \quad (1.5)$$

Решение этого уравнения известно и записывается в следующем общем виде:

$$U(X, X'; \tau) = e^{-i\tau H(\partial_X, X)} C(X, X'), \quad (1.6)$$

где возникающая при этом функция $C(X, X')$ должна быть доопределена из условия (1.3).

Принимая во внимание уравнение (1.5), равенство (1.3) даёт нам следующее условие:

$$U(X, X'; 0) - U(X, X'; -\infty) = \delta^{(4)}(X - X'). \quad (1.7)$$

Из (1.6) следует, что $U(X, X'; 0) = C(X, X')$, поэтому удобно наложить граничные условия на U в таком виде:

$$U(X, X'; 0) = \delta^{(4)}(X - X'), \quad U(X, X'; -\infty) = 0. \quad (1.8)$$

Второе условие оказывается возможным реализовать путём добавки $i\varepsilon$ к H в экспоненте, что приводит нас к окончательному ответу для подынтегральной функции:

$$U(X, X'; \tau) = e^{-i\tau H(\partial_X, X) + \varepsilon\tau} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (1.9)$$

Заметим, что данное выражение необходимо рассматривать в рамках теории обобщённых функций. В этом случае обоснованным является взятие производной любого порядка от дельта-функции.

Для последующих рассуждений нам требуется выбрать стратегию работы с (1.9). Как будет показано далее в контексте метода МФШ, вычисления можно производить путём прямого действия экспоненциального оператора на дельта-функцию. Однако, в классическом методе ФШ вид функции U находится иначе. А именно, сначала вводится тривиальное представление через интеграл с дельта-функцией:

$$U(X, X'; \tau) = \int d^4Y \delta^{(4)}(Y - X) e^{-i\tau H(\partial_Y, Y) + \varepsilon\tau} \delta^{(4)}(Y - X'). \quad (1.10)$$

Далее, мы возвращаемся к дифференциальному уравнению на U , однако, записанному в других терминах:

$$i\partial_\tau U(X, X'; \tau) = \int d^4Y \delta^{(4)}(Y - X) H(\partial_Y, Y) e^{-i\tau H(\partial_Y, Y) + \varepsilon\tau} \delta^{(4)}(Y - X'). \quad (1.11)$$

Для сокращения записи перепишем (1.10) и (1.11) более компактно в очевидных

“бра–кет” обозначениях:

$$U(X, X'; \tau) = \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle, \quad (1.12)$$

$$i \partial_\tau U(X, X'; \tau) = \langle X | H e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle. \quad (1.13)$$

Здесь “бра” и “кет” вектора координатных состояний отвечают дельта-функциям, а матричные элементы от операторов задают операцию вычисления соответствующих интегралов.

Ключевым моментом в вычислительной схеме метода ФШ является тот факт, что при рассмотрении определённого класса задач удаётся “вытащить” оператор H за пределы матричного элемента в виде скалярной функции:

$$\langle X | H e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle = F(X, X'; \tau) \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle. \quad (1.14)$$

Это позволяет перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию U :

$$i \partial_\tau U(X, X'; \tau) = F(X, X'; \tau) U(X, X'; \tau). \quad (1.15)$$

Главное отличие этого уравнения от (1.5) заключается в том, что в последнем присутствует оператор производной по координатам, что делает его с математической точки зрения уравнением в частных производных. Напротив, (1.15) представляет собой классическое обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию U по переменной τ с параметрами X и X' .

Данное уравнение тривиально интегрируется, а его решение записывается в следующем общем виде:

$$U(X, X'; \tau) = D(X, X') \exp \left\{ -i \int^\tau d\tau' F(X, X'; \tau') \right\}, \quad (1.16)$$

при этом значение интеграла на нижнем пределе оказывается удобным “спрятать” в константу интегрирования $D(X, X')$, которая требует дальнейшего определения.

1.2.2. Применение метода. Вычисление пропагатора скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле

Классический метод Фока–Швингера описан, например, в книге [99], где показывается нахождение пропагатора электрона как в произвольном внешнем постоянном однородном электромагнитном поле, так и в поле плоской электромагнитной волны. Ради большей наглядности вычислений рассмотрим более простую задачу решения пропагаторного уравнения для скалярной заряженной частицы. К тому же в качестве внешнего поля выберем частный случай постоянного однородного магнитного поля (направленного вдоль оси z):

$$\mathbf{V} = (0, 0, B). \quad (1.17)$$

Соответствующее пропагаторное уравнение записывается как

$$H(\partial_X, X)G(X, X') = (\Pi^\mu \Pi_\mu - m^2) G(X, X') = \delta^4(X - X'), \quad (1.18)$$

где использовано следующее обозначение

$$\Pi^\mu = i\partial^\mu - eQA^\mu(X). \quad (1.19)$$

Здесь $e > 0$ – элементарный электрический заряд, а Q – относительная величина заряда. Как будет видно из дальнейшего, выбор 4-потенциала A^μ не влияет на ход вычислений, так как все промежуточные результаты записываются в терминах тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы Эрэнфеста из квантовой механики, перейдем к представлению Гейзенберга:

$$\Pi^\mu(\tau) = e^{i\tau H} \Pi^\mu e^{-i\tau H}, \quad (1.20)$$

$$X^\mu(\tau) = e^{i\tau H} X^\mu e^{-i\tau H}, \quad (1.21)$$

$$H(\tau) = e^{i\tau H} H e^{-i\tau H} = H. \quad (1.22)$$

Опять же заметим, что параметр τ в данной задаче играет ту же роль, что и время в квантовой механике.

Введённые таким образом операторы удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\Pi^\mu(\tau)}{d\tau} = i[H(\tau), \Pi^\mu(\tau)] = -2eQF_\nu^\mu\Pi^\nu(\tau), \quad (1.23)$$

$$\frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} = i[H(\tau), X^\mu(\tau)] = -2\Pi^\mu(\tau). \quad (1.24)$$

Начальные условия для данных дифференциальных уравнений определяются из формул (1.20) и (1.21):

$$\Pi^\mu(0) = \Pi^\mu, \quad X^\mu(0) = X^\mu. \quad (1.25)$$

Для упрощения записи перейдём к матричным обозначениям, в которых решение уравнения (1.23) запишется как:

$$\Pi(\tau) = e^{-2eQ\tau F}\Pi(0). \quad (1.26)$$

Всё вышесказанное относится к произвольной конфигурации электромагнитного поля. Чтобы далее продвинуться в аналитических выкладках, запишем в явном виде тензор электромагнитного поля для рассматриваемого случая постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z :

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

В силу блочного строения тензора электромагнитного поля, рассматриваемая задача фактически разбивается на две части, а именно для tz (\parallel) и xy (\perp) подпространств. Интегрируя (1.23) и (1.24), получим:

$$X_\parallel(\tau) - X_\parallel(0) = -2\tau \Pi_\parallel(\tau), \quad (1.28)$$

$$eQF_\perp [X_\perp(\tau) - X_\perp(0)] = \Pi_\perp(\tau) - \Pi_\perp(0). \quad (1.29)$$

В последней формуле после тривиальных преобразований можно выделить явную зависимость для $\Pi_{\perp}(\tau)$, а именно:

$$\Pi_{\perp}(\tau) = -\frac{eQ}{2} \operatorname{sh}^{-1}(eQ\tau F_{\perp}) e^{-eQ\tau F_{\perp}} F_{\perp} [X_{\perp}(\tau) - X_{\perp}(0)]. \quad (1.30)$$

Стоит отметить, что хотя матрица F (соответствующая полному тензору поля $F^{\mu\nu}$) не обратима, матрица F_{\perp} , однако, является обратимой внутри соответствующего двумерного подпространства.

Вычисляя экспоненциальные функции от F_{\perp} , получим выражение для оператора Π в виде:

$$\begin{aligned} \Pi(\tau) = & -\frac{1}{2\tau} [X(\tau) - X(0)]_{\parallel} \\ & + \frac{\beta}{2 \sin(\beta\tau)} \left(-\cos(\beta\tau) I_{\perp} + Q \sin(\beta\tau) \varphi \right) [X(\tau) - X(0)]_{\perp}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где введены следующие обозначения:

$$\beta = eB, \quad \varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{B} F^{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Заметим, что $\Pi^{\mu}(\tau)\Pi_{\mu}(\tau)$ в матричной форме есть $\Pi^T g \Pi$, где метрический тензор представлен диагональной матрицей

$$g = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.33)$$

С учётом этого получим:

$$\Pi^{\mu}(\tau)\Pi_{\mu}(\tau) = \frac{1}{4\tau^2} [X^{\mu}(\tau) - X^{\mu}(0)]_{\parallel}^2 - \frac{\beta^2}{4 \sin^2(\beta\tau)} [X^{\mu}(\tau) - X^{\mu}(0)]_{\perp}^2. \quad (1.34)$$

Далее нам требуется факторизовать скалярную функцию из матричного элемента (1.13):

$$\begin{aligned} \langle X | H e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle &= \langle X | [\Pi^{\mu}\Pi_{\mu} - m^2] e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle \\ &= \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} [\Pi^{\mu}(\tau)\Pi_{\mu}(\tau) - m^2] | X' \rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Это становится возможным, если “подтащить” функции от оператора координаты к бра- и кет- векторам:

$$\langle X | f(\hat{X}) \dots g(\hat{X}) | X' \rangle = f(X) \langle X | \dots | X' \rangle g(X'). \quad (1.36)$$

Для избежания путаницы со значением пространственно-временной координаты X , в данной формуле соответствующий оператор был обозначен как \hat{X} . На языке исходных интегралов (1.10) и (1.11) это рецепт выражается в “подтаскивании” функций $f(Y)$ и $g(Y)$ к дельта-функциям.

При раскрытии скобок в (1.34) почти все операторы координат расставлены в порядке, допускающем факторизацию (1.14). Однако, для одного слагаемого в каждой скобке требуется использование следующего соотношения:

$$X^\mu(0)X_\mu(\tau) = X^\mu(\tau)X_\mu(0) - [X^\mu(\tau), X_\mu(0)] , \quad (1.37)$$

где коммутатор равен:

$$[X^\mu(\tau), X_\mu(0)] = -4i\tau - 2i\beta^{-1} \sin(2\beta\tau) . \quad (1.38)$$

Таким образом после применения данных коммутационных соотношений факторизация скалярной функции $F(X, X', \tau)$ становится тривиальной:

$$F(X, X', \tau) = \frac{(X - X')_\parallel^2}{4\tau^2} - \frac{i}{\tau} - \frac{\beta^2(X - X')_\perp^2}{4\sin^2(\beta\tau)} - \frac{i\beta}{\text{tg}(\beta\tau)} - m^2 . \quad (1.39)$$

Значение интеграла из (1.16) на верхнем пределе равно:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau d\tau' F(X, X'; \tau') &= -\frac{(X - X')_\parallel^2}{4\tau} + \frac{\beta(X - X')_\perp^2}{4\text{tg}(\beta\tau)} \\ &\quad - i\ln(\tau) - i\ln(\sin(\beta\tau)) - m^2\tau , \end{aligned} \quad (1.40)$$

что приводит нас к почти финальному выражению для функции U :

$$U(X, X'; \tau) = \frac{D(X, X')}{\tau \sin(\beta\tau)} \exp \left\{ i \left[\frac{(X - X')_\parallel^2}{4\tau} - \frac{\beta(X - X')_\perp^2}{4\text{tg}(\beta\tau)} + m^2\tau \right] \right\} . \quad (1.41)$$

Нормировочный множитель $D(X, X')$ можно определить из условий:

$$\begin{aligned} [i\partial_X^\mu - eQA^\mu(X)] \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle &= \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} \Pi^\mu(\tau) | X' \rangle , \\ [-i\partial_{X'}^\mu - eQA^\mu(X')] \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} | X' \rangle &= \langle X | e^{-i\tau H + \varepsilon\tau} \Pi^\mu(0) | X' \rangle , \end{aligned}$$

которые приводят к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\left[i\partial_X^\mu - eQA^\mu(X) - \frac{Q\beta}{2}\varphi_{\nu}^{\mu}(X - X')_{\perp}^{\nu} \right] D(X, X') = 0, \quad (1.42)$$

$$\left[-i\partial_{X'}^\mu - eQA^\mu(X') + \frac{Q\beta}{2}\varphi_{\nu}^{\mu}(X - X')_{\perp}^{\nu} \right] D(X, X') = 0. \quad (1.43)$$

Интегрируя их, получаем:

$$D(X, X') = D(X') \exp \left\{ -ieQ \int_{X'}^X d\xi^\mu \left[A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\xi - X')^\nu \right] \right\}. \quad (1.44)$$

Заметим, что ротор от выражения внутри интеграла равен нулю, поэтому значение интеграла не зависит от пути интегрирования. Используя линейную параметризацию переменной интегрирования, можно убедиться, что интеграл от второго слагаемого обнуляется:

$$D(X, X') = D(X') \exp \left\{ -ieQ \int_{X'}^X d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right\}. \quad (1.45)$$

Наконец, последняя константа интегрирования $D(X')$ определяется из условия (1.3), и равна:

$$D(X') = -\frac{i\beta}{(4\pi)^2}. \quad (1.46)$$

Приведём окончательное выражение для пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле, записанное в координатном представлении в параметризации собственного времени:

$$G(X, X') = -\frac{\beta}{(4\pi)^2} \exp^{-ieQ \int_{X'}^X d\xi^\mu A_\mu(\xi)} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{1}{\tau \sin(\beta\tau)} \quad (1.47)$$

$$\times \exp \left\{ i \left[\frac{(X - X')_{\parallel}^2}{4\tau} - \frac{\beta(X - X')_{\perp}^2}{4 \operatorname{tg}(\beta\tau)} + (m^2 - i\varepsilon)\tau \right] \right\}.$$

Заметим, что переход к пределу $\beta \rightarrow 0$ в (1.47) даёт известное выражение пропагатора для бесполевого случая.

Полученный результат пригодится нам в дальнейшем в третьей главе для поиска координатного представления пропагатора скалярной частицы в виде разложения по уровням Ландау.

1.3. Модифицированный метод Фока–Швингера

1.3.1. Описание метода

Как уже было указано, имеется иной подход для работы с ранее полученным выражением

$$U(X, X'; \tau) = e^{-i\tau[H(\partial_X, X) + i\varepsilon]} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (1.48)$$

А именно, для ряда ситуаций оказывается возможным вычислить аналитически действие экспоненциального оператора на дельта-функцию. В этом и состоит суть модифицированного метода Фока–Швингера (МФС).

В базовом сценарии решение задачи сводится к специальному выбору представления дельта-функции в виде ряда/интеграла:

$$\delta^{(4)}(X - X') = \sum \int \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'), \quad (1.49)$$

где $\psi_\lambda(X)$ – собственный вектор оператора H (параметризованный через набор квантовых чисел λ), которому соответствует собственное значение $H(\lambda)$:

$$H(\partial_X, X) \psi_\lambda(X) = H(\lambda) \psi_\lambda(X). \quad (1.50)$$

Таким образом пропагатор приобретает следующий промежуточный вид:

$$G(X, X') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \sum \int e^{-i\tau[H(\lambda) + i\varepsilon]} \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'). \quad (1.51)$$

Заметим, что теперь показателем экспоненты является уже не оператор, а числовая функция. Это позволяет нам снять интеграл по параметру собственного времени τ :

$$G(X, X') = \sum \int \frac{\psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X')}{H(\lambda) + i\varepsilon}. \quad (1.52)$$

В ряде случаев не весь оператор H удовлетворяет условию (1.50), а лишь некоторая его часть:

$$H = H_0 + H_1, \quad (1.53)$$

$$H_0(\partial_X, X)\psi_\lambda(X) = H_0(\lambda)\psi_\lambda(X). \quad (1.54)$$

Если так оказывается, что эти операторы коммутируют друг с другом,

$$[H_0, H_1] = 0, \quad (1.55)$$

то экспоненциальный оператор разделяется на две экспоненты согласно формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа [133]. При этом пропагатор принимает следующий вид:

$$G(X, X') = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \sum \int e^{-i\tau H_1} e^{-i\tau [H_0(\lambda) + i\varepsilon]} \psi_\lambda(X) \psi_\lambda(X'). \quad (1.56)$$

Как известно из линейной алгебры, равенство нулю коммутатора двух операторов влечёт за собой наличие общего набора их собственных векторов. Это, в свою очередь, означает, что при применении второго экспоненциального оператора после действия первого мы вправе рассчитывать на значительные упрощения в вычислительном процессе за счёт использования соотношения на собственные векторы и собственные числа.

Конкретный вид этих упрощений в значительной степени зависит от формы операторов H_0 и H_1 . Однако, в ряде случаев (см. Главу 2) удаётся выполнить преобразования таким образом, чтобы свести всю зависимость пропагатора от τ к виду, представленному в выражении (1.51), что позволяет в итоге тривиально выполнить соответствующее интегрирование.

Напоследок заметим, что успешное применение описанного выше метода напрямую зависит от возможности выбрать удобное разложение дельта-функции через собственные векторы соответствующего оператора, что в некотором смысле эквивалентно решению полевого уравнения.

1.3.2. Применение метода. Вычисление пропагатора скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле

Как было замечено ранее, пропагаторное уравнение для скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле имеет вид:

$$H(X, \partial_X)G(X, X') = [\Pi_\mu \Pi^\mu - m^2] G(X, X') = \delta^{(4)}(X - X'). \quad (1.57)$$

Для решения данного уравнения удачным оказывается использование калибровки Ландау:

$$A^\mu = (0, 0, Bx, 0). \quad (1.58)$$

При таком выборе калибровки трансляционная инвариантность нарушается только для координаты x , что позволит в процессе вычисления воспользоваться преобразованием Фурье для трёх остальных координат.

Для дальнейших преобразований введём следующие стандартные обозначения:

$$\eta = \sqrt{\beta} \left(x - Q \frac{p_y}{\beta} \right), \quad \eta' = \sqrt{\beta} \left(x' - Q \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (1.59)$$

При этом оператор H запишется как:

$$H(\partial_X, X) = (-\partial_0^2 + \partial_z^2 - m^2 + \beta(d_\eta^2 - \eta^2)). \quad (1.60)$$

Заметим, что в этом выражении заблаговременно была учтена следующая подстановка:

$$-i\partial_y \rightarrow p_y, \quad (1.61)$$

что оправдывается соответствующим выбором разложения дельта-функции:

$$\delta^{(4)}(X - X') = \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\parallel dp_y}{(2\pi)^3} e^{-i(p(X-X'))_{\parallel,y}} V_n(\eta) V_n(\eta'). \quad (1.62)$$

Как видим, данное представление является ни чем иным, как интегралом Фурье по переменным t , y , и z , а также рядом по проекционным операторам собственных состояний V_n из задачи о квантовом гармоническом осцилляторе:

$$V_n(\eta) = \frac{e^{-\eta^2/2} H_n(\eta)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad (1.63)$$

где H_n – полиномы Чебышёва-Эрмита.

Функции V_n удовлетворяют уравнению:

$$(\partial_\eta^2 - \eta^2)V_n(\eta) = -(2n + 1)V_n(\eta), \quad (1.64)$$

чем и обуславливается выбор разложения (1.62).

Заметим, что оператор полевого уравнения $H(X, \partial_X)$ имеет таким образом собственные состояния с квантовыми числами, удовлетворяющими соотношению

$$p_0^2 = p_z^2 + m^2 + \beta(2n + 1), \quad (1.65)$$

что соответствует описанию уровней Ландау.

Выбор представления (1.62) в итоге сводит вычисление действия экспоненциального оператора к подстановке в экспоненту собственного значения оператора H :

$$\begin{aligned} G(X, X') &= -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\tau[H(\partial_X, X) + i\varepsilon]} \delta^{(4)}(X - X') \\ &= -i\sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{||} dp_y}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\tau \\ &\quad e^{-i\tau(p_{||}^2 - m^2 - \beta(2n+1) + i\varepsilon)} e^{-i(p(X-X'))_{||,y}} V_n(\eta) V_n(\eta'). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Теперь интегрирование по τ становится тривиальной задачей, приводя к следующему выражению:

$$G(X, X') = \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{||} dp_y}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{||,y}}}{p_{||}^2 - m^2 - (2n + 1)\beta + i\varepsilon} V_n(\eta) V_n(\eta'). \quad (1.67)$$

Среди всевозможных форм пропагатора, представление (1.67) является не самым удачным в силу асимметричности по отношению к координатной плоскости xy . Для его симметризации требуется вычислить интеграл по dp_y . Заметим, что подынтегральное выражение в (1.67) зависит от p_y не только посредством экспоненциального множителя, но и через переменные η and η' в функциях V_n .

Таким образом, можно выделить следующий интеграл:

$$I_{n,n'} = \int dp_y e^{ip_y(y-y')} V_n(\eta) V_{n'}(\eta'). \quad (1.68)$$

Для его вычисления удобно произвести замену переменной интегрирования:

$$u = -Q \frac{p_y}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x+x') + iQ(y-y')]. \quad (1.69)$$

Это позволяет записать (1.68) в виде:

$$I_{n,n'} = \frac{e^{i\Phi(X,X')}}{\sqrt{2^{n+n'} n! n'!} \pi} \sqrt{\beta} e^{-\frac{\beta}{4}(X-X')_{\perp}^2} \tilde{I}_{n,n'}, \quad (1.70)$$

где

$$\Phi(X, X') = \frac{Q\beta}{2} (x+x')(y-y'), \quad (1.71)$$

$$\tilde{I}_{n,n'} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} H_n(u+a) H_{n'}(u+b), \quad (1.72)$$

а также использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x-x') - iQ(y-y')], \quad (1.73)$$

$$b = -\frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x-x') + iQ(y-y')].$$

Можно показать, что фазовый множитель (1.71) совпадает с ранее полученным выражением (1.45) [15].

Далее, согласно [134, 135], интеграл $\tilde{I}_{n,n'}$ равен:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{n,n'} &= 2^{n'} \sqrt{\pi} n! b^{n'-n} L_n^{(n'-n)}(-2ab) \\ &= 2^{n'} \sqrt{\pi} n! b^{n'-n} L_n^{(n'-n)}\left(\frac{\beta}{2} Z_{\perp}^2\right) \quad [n \leq n'], \end{aligned} \quad (1.74)$$

где функции $L_n^{(m)}$ есть полиномы Чебышёва-Лагерра, и введено обозначение $Z^{\mu} = X^{\mu} - X'^{\mu}$.

Таким образом симметризованная форма пропагатора принимает вид:

$$G(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi(X,X')} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} L_n(\beta Z_{\perp}^2/2), \quad (1.75)$$

где введено обозначение:

$$M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta. \quad (1.76)$$

Данное представление пропагатора (за исключением неинвариантного фазового множителя) наглядно отражает симметрии рассматриваемой задачи. Во-первых, изначально имевшаяся радиальная симметрия относительно вращений в плоскости xy , перпендикулярной направлению магнитного поля, теперь подчёркивается явной аналитической зависимостью от Z_\perp^2 . Во-вторых, наличие магнитного поля лишь отчасти нарушает полную Лоренц-инвариантность, выделяя при этом некое избранное направление в пространстве. Вдоль этого направления сохраняется частичная Лоренц-инвариантность, что видно из выражения двумерного фурье-интеграла, который фактически описывает пропагатор скалярной частицы с “эффективной” массой M_n в 1+1-мерном пространстве Минковского.

Дальнейшая работа с выражением (1.75) может вестись в двух направлениях. Во-первых, возможным является интегрирование по оставшимся компонентам импульса (т.е., p_0 и p_z), что приведёт нас к координатному представлению пропагатора в виде разложения по уровням Ландау (см. Главу 3). Однако, в данной главе будет рассмотрена вторая возможность, а именно, взятие фурье-образа от поперечной части пропагатора, что даст в итоге его импульсное представление.

Для начала заметим, что для любой “достаточно хорошей” функции $f(Z_\perp)$ справедливо утверждение теоремы о разложении в интеграл Фурье:

$$f(Z_\perp) = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} e^{i(pZ)_\perp} \int d^2 Z'_\perp e^{-i(pZ')_\perp} f(Z'_\perp). \quad (1.77)$$

Для поперечной части пропагатора из формулы (1.75) этот факт запишется как:

$$e^{-\beta Z_\perp^2/4} L_n(\beta Z_\perp^2/2) = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} e^{i(pZ)_\perp} F_n, \quad (1.78)$$

$$F_n = \int d^2 Z'_\perp e^{-i(pZ')_\perp} e^{-\beta Z'^2_\perp/4} L_n(\beta Z'^2_\perp/2). \quad (1.79)$$

Радиальная симметрия данного выражения позволяет перейти в полярные координаты (ρ, φ) :

$$F_n = \int d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) d\varphi e^{-i|p_\perp|\rho\cos(\varphi)} e^{-\beta\rho^2/4} L_n(\beta\rho^2/2). \quad (1.80)$$

Используя известное интегральное представление [134, 135] для функций Бесселя

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iwc\cos(\varphi)\pm im\varphi} = (-i)^m 2\pi J_m(w), \quad (1.81)$$

проинтегрируем F_n по переменной φ и получим:

$$F_n = \int_0^\infty d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) 2\pi J_0(|p_\perp|\rho) e^{-\beta\rho^2/4} L_n(\beta\rho^2/2). \quad (1.82)$$

Сделав замену $w = \rho^2/2$, запишем последнюю формулу как

$$F_n = 2\pi \int_0^\infty dw J_0(\sqrt{2w}|p_\perp|) e^{-\beta w/2} L_n(\beta w). \quad (1.83)$$

Известен следующий интеграл [134, 135]:

$$\int_0^\infty d\zeta \zeta^{\lambda/2} e^{-p\zeta} J_\lambda(b\sqrt{\zeta}) L_n^{(\lambda)}(c\zeta) = \left(\frac{b}{2}\right)^\lambda \frac{(p-c)^n}{p^{\lambda+n+1}} e^{-\frac{b^2}{4p}} L_n^{(\lambda)}\left(\frac{b^2 c}{4pc - 4p^2}\right). \quad (1.84)$$

Очевидно, что (1.83) сводится к (1.84) при некотором выборе параметров. Таким образом мы получаем окончательное выражение для F_n , а именно:

$$F_n = 2\frac{2\pi}{\beta} (-1)^n e^{-p_\perp^2/\beta} L_n(2p_\perp^2/\beta). \quad (1.85)$$

В итоге пропагатор скалярной заряженной частицы в постоянном внешнем однородном магнитном поле, записанный в импульсном представлении в виде разложения в ряд по уровням Ландау, даётся формулой:

$$G(X, X') = e^{i\Phi(X, X')} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(pZ)} G(p), \quad (1.86)$$

$$\Phi(X, X') = \frac{Q\beta}{2} (x+x')(y-y'), \quad (1.87)$$

$$G(p) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\exp(-p_\perp^2/\beta) L_n(2p_\perp^2/\beta)}{p_\parallel^2 - M_n^2 + i\varepsilon}, \quad (1.88)$$

$$M_n^2 = m^2 + (2n+1)\beta. \quad (1.89)$$

Заметим, что квадрат “эффективной” массы M_n является положительной величиной для всех значений n . Аналогичное утверждение для случая массивного векторного бозона, однако, не является верным, что приводит к так называемой нестабильности вакуума [61].

Также стоит отметить, что несмотря на наличие неинвариантной фазы (1.87), для ряда петлевых диаграмм этот фазовый множитель сокращается [15].

1.4. Основные результаты первой главы

Представленный в данной главе модифицированный метод Фока–Швингера (МФС) обладает рядом преимуществ как перед классическим методом Фока–Швингера (ФС), так и перед вычислительной схемой в рамках формализма канонического квантования. Перечислим эти преимущества на рассмотренном выше примере, а именно, задаче о нахождении пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Во-первых, получаемые после применения экспоненциального оператора к дельта-функции промежуточные выражения записываются почти полностью в импульсном пространстве. Это избавляет нас от необходимости выполнять дополнительные преобразования Фурье, как это делается при нахождении импульсного представления пропагатора стартуя со швингеровского представления.

Во-вторых, запись дельта-функции в виде ряда по собственным состояниям квантового гармонического осциллятора сразу же позволяет получить выражение пропагатора через разложение по уровням Ландау. Такой вид пропагатора обладает большей наглядностью и интерпретируемостью, нежели его интегральное представление через параметр собственного времени.

Наконец, метод МФС оказывается более удобным по сравнению с формализмом канонического квантования. Это не столь отчетливо видно для случая скалярной частицы, но проявит себя в полной мере при нахождении пропага-

тора фермиона и массивного векторного бозона (см. Главу 2). Хотя при использовании как формализма канонического квантования, так и метода МФШ, необходимо найти общий вид решения полевого уравнения, в последнем случае не требуется нормировка и ортогонализация спиновых состояний, а также нахождение соответствующей спиновой матрицы плотности. Это значительное вычислительное упрощение способно уменьшить порог входа при рассмотрении задач как во внешних полях, так и в криволинейных координатах.

Однако, модифицированный метод Фока–Швингера не является волшебным средством для разрешения абсолютно любых физических конфигураций. Во-первых, это связано с тем обстоятельством, что знание разложения дельта-функции в ряд/интеграл по собственным состояниям оператора H_0 из левой части пропагаторного уравнения эквивалентно нахождению решения полевого уравнения. Во-вторых, промежуточные вычисления в рамках метода МФШ опираются на те же симметрии рассматриваемой задачи, которые в том или ином виде задействованы при использовании как метода ФШ, так и формализма канонического квантования. В определённом смысле метод МФШ является синтезом этих двух подходов, позволяя сравнительно более простым и быстрым способом получить выражение пропагатора, стартуя с общего вида решения соответствующего полевого уравнения.

Глава 2

Пропагаторы частиц со спином в импульсном представлении

2.1. Введение

В данной главе рассматривается применение модифицированного метода Фока–Швингера (МФС) для нахождения пропагаторов заряженных частиц со спином. В частности, в двух первых разделах излагаются методы и результаты, опубликованные соискателем в работах [127, 129]. А именно, обсуждается вычисление пропагаторов электрона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке во внешнем постоянном однородном магнитном поле с помощью метода МШФ.

Одним из основных результатов данного раздела (и всей диссертации в целом) является представление пропагаторов электрона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке во внешнем постоянном однородном *электромагнитном* поле в виде интеграла по параметру собственного времени от цепочки коммутирующих экспоненциальных операторов, последовательно действующих на четырёхмерную дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат.

В силу наличия в литературе разных выражений для тех или иных представлений пропагатора массивного векторного бозона в постоянном однородном магнитном поле, в данной главе уделяется особое внимание переходу от одних форм записи пропагатора к другим путём выполнения некоторых преобразований с применением известных свойств специальных функций математической физики. Успешность такого перехода служит свидетельством как верности проведённых вычислений, так и правомерности применения метода МФС для данного класса задач.

В третьем разделе данной главы обсуждается работа сторонней группы авторов [98], где с помощью метода МФШ был построен пропагатор электрона во вращающейся среде. Этот результат является ещё одним примером успешного применения данного метода, однако, для совершенно другой физической конфигурации. Неким общим знаменателем между этой задачей в криволинейных координатах и рассматриваемыми в рамках данной диссертации задачами во внешнем электромагнитном поле является формализм ковариантной производной. Единство математического описания разных физических сценариев через ковариантную производную указывает на соответствующий класс задач, для которого применение метода МФШ могло бы дать плодотворные результаты.

2.2. Пропагатор фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау

В качестве первого примера, показывающего упрощение и ускорение вычислительного процесса при использовании метода МФШ для нахождения пропагаторов частиц со спином, рассмотрим задачу о решении пропагаторного уравнения для фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Само это уравнение имеет вид:

$$[\Pi_\mu \gamma^\mu - mI] G(X, X') = I \delta^{(4)}(X - X'), \quad (2.1)$$

где γ^μ – матрицы Дирака, I – единичная матрица, а выбор 4-потенциала поля сделан таким же, как и для случая скалярной частицы из предыдущей главы:

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= i\partial^\mu - eQA^\mu(X), \\ A^\mu &= (0, 0, Bx, 0). \end{aligned}$$

Стандартным подходом при работе с уравнением Дирака является его

квадрирование [136], а именно, представление неизвестной функции $G(X, X')$ в виде результата действия дираковского оператора (со знаком плюс у массового члена) на новую неизвестную функцию $S(X, X')$:

$$G(X, X') = [\Pi_\nu \gamma^\nu + mI] S(X, X'). \quad (2.2)$$

Воспользовавшись свойствами гамма-матриц, получим пропагаторное уравнение на функцию $S(X, X')$:

$$H(\partial_X, X) S(X, X') = I \delta^{(4)}(X - X'), \quad (2.3)$$

с оператором H в виде, схожем с аналогичным оператором из задачи для скалярной частицы, однако, с дополнительным слагаемым, отвечающим за взаимодействие спина с электромагнитным полем:

$$H(\partial_X, X) = [\Pi^2 - m^2] I - \frac{eQ}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

где введено стандартное обозначение для спиновых матриц:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.5)$$

В операторе из формулы (2.4) можно выделить два слагаемых ($H = H_0 + H_F$):

$$H_0 = (\Pi^2 - m^2) I, \quad (2.6)$$

$$H_F = -\frac{eQ}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

При условии $F_{\mu\nu} = const$ нетрудно убедиться, что эти операторы коммутируют ($[H_0, H_F] = 0$). Это, в свою очередь, позволяет разделить экспоненциальный оператор на две экспоненты согласно известной формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа [133]:

$$e^{-i\tau(H_0+H_F)} = e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0}. \quad (2.8)$$

Таким образом мы получаем следующее представление пропагатора фермиона в достаточно общем виде:

$$G(X, X') = -i [\Pi_\nu \gamma^\nu + mI] \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (2.9)$$

Так как единственным задействованным условием было постоянство тензора $F^{\mu\nu}$, то данное представление справедливо для любого постоянного однородного электромагнитного поля.

Вернёмся теперь к частному случаю внешнего постоянного однородного магнитного поля (направленного вдоль оси z). Для него оператор H будет иметь следующий вид:

$$H(\partial_X, X) = (-\partial_0^2 + \partial_z^2 - m^2 + \beta(d_\eta^2 - \eta^2)) I + Q\beta\Sigma_3, \quad (2.10)$$

где матрица проекции спина фермиона на ось z записывается в следующей стандартной форме:

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Заметим, что оператор $H(X, \partial_X)$ описывает 4 квантовых гармонических осциллятора с энергиями p_0 , удовлетворяющими следующему соотношению:

$$p_0^2 = p_z^2 + m^2 + \beta(2n + 1) \pm Q\beta. \quad (2.12)$$

Рассуждая аналогично случаю скалярной частицы, применим экспоненциальный оператор к уже ранее рассмотренному разложению дельта-функции (1.62):

$$S(X, X') = (-i)\sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\perp dp_y}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\tau \quad (2.13)$$

$$e^{-i\tau[(p_\parallel^2 - m^2 + i\varepsilon - \beta(2n+1))I + Q\beta\Sigma_3]} e^{-i(p(X-X'))_{\parallel,y}} V_n(\eta) V_n(\eta').$$

Для дальнейших вычислений мы могли бы воспользоваться (2.8), однако, в данной конкретной задаче этого не требуется, так как матрицы I и Σ_3 имеют диагональный вид, и удобнее оказывается не разделять их. Заметим, что в диагональных элементах объединённой матрицы собираются экспоненты двух видов:

$$e^{-i\tau[p_\parallel^2 - m^2 - 2Qn\beta + i\varepsilon]} \quad \text{и} \quad e^{-i\tau[p_\parallel^2 - m^2 - 2Q(n+1)\beta + i\varepsilon]}. \quad (2.14)$$

Так как при последующем интегрировании по параметру собственного времени τ выражения в квадратных скобках экспонент окажутся в знаменателе, то разумной является унификация записи результата интегрирования, чего можно достичь путём сдвига индекса суммирования там, где это требуется.

Проведём указанное выше интегрирование, получив следующее промежуточное представление пропагатора:

$$S(X, X') = \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{\parallel} dp_y}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel,y}}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \quad (2.15)$$

$$\times \left[V_{n-1} V'_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} + V_n V'_n \Pi_n^{(Q)} \right],$$

где

$$\Pi_{n-1}^{(Q)} = \frac{1-Q}{2} \Pi_+ + \frac{1+Q}{2} \Pi_-, \quad (2.16)$$

$$\Pi_n^{(Q)} = \frac{1+Q}{2} \Pi_+ + \frac{1-Q}{2} \Pi_-, \quad (2.17)$$

$$\Pi_+ = \text{diag}(1, 0, 1, 0), \quad (2.18)$$

$$\Pi_- = \text{diag}(0, 1, 0, 1), \quad (2.19)$$

$$M_n^2 = m^2 + 2\beta n. \quad (2.20)$$

Введённые выше операторы $\Pi_m^{(Q)}$ позволяют единообразно рассматривать как случай $Q = -1$, так и $Q = +1$. В выражении (2.15) также использовались обозначения $V_m = V_m(\eta)$ и $V'_m = V_m(\eta')$.

Как уже отмечалось в контексте аналогичной задачи для случая скалярной частицы, полученное представление не является симметричным. Дальнейшие наши действия заключаются в симметризации выражения (2.15) согласно ранее представленному рецепту (1.68) – (1.74). Это приводит нас к следующему выражению:

$$S(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi(X, X')} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \quad (2.21)$$

$$\times e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \left[L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} + L_n \Pi_n^{(Q)} \right],$$

где введено обозначение $L_m = L_m(\beta Z_{\perp}^2/2)$.

Воспользовавшись ранее полученным результатом (1.85), преобразуем данное выражение к виду:

$$S(X, X') = 2e^{i\Phi(X, X')} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(pZ)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\epsilon} \quad (2.22)$$

$$\times (-1)^n e^{-p_{\perp}^2/\beta} \left[L_n \Pi_n^{(Q)} - L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} \right],$$

где теперь подразумевается $L_m = L_m(2p_{\perp}^2/\beta)$.

Теперь нам нужно найти (2.2), т.е. вычислить действие дираковского оператора на $S(X, X')$. Для этого оказывается удобным одно полезное следствие из выражений (1.42) и (1.44), полученных нами ранее в первой главе:

$$\left(i\partial_{\mu} - eQA_{\mu} \right) [e^{i\Phi} f] = e^{i\Phi} \left(i\partial_{\mu} + \frac{eQ}{2} F_{\mu\nu} (X - X')^{\nu} \right) f \quad (2.23)$$

$$= e^{i\Phi} \left(i\partial_{\mu} + \frac{Q\beta}{2} \varphi_{\mu\nu} (X - X')^{\nu} \right) f,$$

где было введено обозначение для безразмерного тензора поля:

$$\varphi^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{B} F^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Формула (2.23) фактически определяет правило “протаскивания” ковариантной производной через фазовый множитель. Воспользовавшись ей, а также тем фактом, что внутри фурье-интеграла справедлива замена

$$Z^{\nu} \rightarrow -i\partial_p^{\nu} = -i\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}, \quad (2.25)$$

получим финальное выражение для импульсного представления пропагатора фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложе-

ния в ряд по уровням Ландау:

$$G(X, X') = 2e^{i\Phi(X, X')} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(pZ)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \quad (2.26)$$

$$\times \left[(p\gamma) - i\frac{\beta Q}{2} (\gamma\varphi\partial_p)_{\perp} + m \right] \left[e^{-p_{\perp}^2/\beta} \left(L_n \Pi_n^{(Q)} - L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} \right) \right].$$

Вычисление действия оператора дифференцирования ∂_p в формуле (2.26) является тривиальной задачей. Однако, из соображений лаконичности, имеет смысл оставить финальное выражение пропагатора именно в таком виде. Кроме того, такая запись оправдывается и тем наблюдением, что в практических вычислениях зачастую производная будет интегрироваться по частям.

Несложно показать, что выражение (2.26) находится в согласии, с точностью до обозначений, с формулой (3.37) из [15].

2.3. Пропагатор массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау

2.3.1. Пропагатор в метрике с сигнатурой $(-, +, +, +)$

Наиболее интересным случаем с точки зрения богатства математических структур является задача о нахождении пропагатора массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке. Впервые данный пропагатор был получен с использованием классического метода Фока–Швингера в представлении собственного времени в работе [105] (см. также [106]), где финальное выражение было преобразовано из координатного представления в импульсное. Впоследствии в статье [108] был выполнен переход от параметризации через собственное время к разложению в ряд по уровням Ландау.

Наконец, в работе соискателя [129] для решения данной задачи был предложен более короткий путь, вмещающий в себя результаты указанных выше статей и заключающийся в использовании модифицированного метода Фока–Швингера (МФШ). Применение метода МФШ позволило таким образом получить финальное выражение пропагатора “в один шаг”, а именно, минуя этапы перехода в импульсное пространство и преобразования швингеровской формы в ряд по уровням Ландау. Соответствующие вычисления и получившиеся результаты излагаются ниже.

Для удобства последующего сравнения результатов будем следовать обозначениям из статьи [105]. А именно, выберем метрику с сигнатурой $(-, +, +, +)$, для которой имеются следующие стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} X^\mu &= (t, x, y, z), & X_\mu &= g_{\mu\nu}X^\nu = (-t, x, y, z), \\ \partial_\mu &= (\partial_t, \nabla), & \partial^\mu &= (-\partial_t, \nabla), \\ D_\mu &= \partial_\mu + ieQA_\mu, & \Pi_\mu &= -iD_\mu, & \text{ПП} &= \Pi^\nu\Pi_\nu. \end{aligned}$$

Соответствующее пропагаторное уравнение в данных обозначениях запишется в виде:

$$H^\mu{}_\nu G^\nu{}_\rho(X, X') = \delta^\mu{}_\rho \delta^{(4)}(X - X'), \quad (2.27)$$

где

$$H^\mu{}_\nu = (\text{ПП} + m^2) \delta^\mu{}_\nu - 2ieQF^\mu{}_\nu + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \Pi^\mu\Pi_\nu. \quad (2.28)$$

Чтобы применить метод МФШ для решений данной задачи, сперва заметим, что оператор H состоит из трёх слагаемых ($H = H_0 + H_F + H_\xi$):

$$(H_0)^\mu{}_\nu = (\text{ПП} + m^2) \delta^\mu{}_\nu, \quad (2.29)$$

$$(H_F)^\mu{}_\nu = -2ieQF^\mu{}_\nu, \quad (2.30)$$

$$(H_\xi)^\mu{}_\nu = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \Pi^\mu\Pi_\nu. \quad (2.31)$$

Дальнейшие вычисления связаны с установлением коммутационных соотношений для указанных слагаемых. При этом оказываются полезными следующие

коммутаторы (последние два из которых верны только в случае произвольного постоянного однородного электромагнитного поля):

$$[\Pi^\mu, \Pi^\nu] = -ieQF^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

$$[\Pi^\mu, \Pi^\rho] = -2ieQF^\mu{}_\nu \Pi^\nu, \quad (2.33)$$

$$[\Pi^\mu \Pi_\nu, \Pi^\rho] = -2ieQ(F^\mu{}_\rho \Pi^\rho \Pi_\nu - \Pi^\mu \Pi_\rho F^\rho{}_\nu). \quad (2.34)$$

С их помощью можно легко убедиться, что только один из трёх попарных коммутаторов между операторами H_0 , H_F , и H_ξ равен нулю ($[H_0, H_F] = 0$). Хотя два других коммутатора по-отдельности не зануляются, их сумма тем не менее тоже оказывается равной нулю ($[H_0 + H_F, H_\xi] = 0$).

Всё это позволяет провести пошаговое разделение экспоненты $e^{-i\tau(H_0+H_F+H_\xi)}$, возникающей в рамках метода МФШ, согласно формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа [133]:

$$\begin{aligned} e^{-i\tau(H_0+H_F+H_\xi)} &= e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau(H_0+H_F)} \\ &= e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Заметим, что возможны и другие порядки следования экспоненциальных операторов друг за другом, однако, указанная выше запись оказывается особенно удачной для проведения соответствующих вычислений.

Таким образом мы получаем следующее представление пропагатора в виде интеграла по параметру собственного времени от трёх (частично) коммутирующих экспоненциальных операторов, последовательно действующих на четырёхмерную дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат:

$$G(X, X') = i \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (2.36)$$

Так как единственным условием во всех предшествующих выкладках было постоянство тензора $F^{\mu\nu}$, то данное общее представление справедливо для любой конфигурации постоянного однородного электромагнитного поля.

Рассмотрим более подробно анатомию построенного пропагатора. Экспонента от H_0 соответствует пропагатору скалярной частицы. Следующая за ней экспонента от H_F описывает дополнительную структуру, связанную со спином частицы. Вместе взятые, они дают выражение для пропагатора массивного векторного бозона в калибровке Фейнмана ($\xi = 1$). Однако, для случая $\xi \neq 1$ имеется дополнительный экспоненциальный оператор, отвечающий за иной выбор ξ -калибровки.

По аналогии с ранее рассмотренными случаями скалярной частицы и фермиона, для дальнейших вычислений сделаем такой же выбор как 4-потенциала электромагнитного поля (1.58), так и вида разложения дельта-функции в ряд/интеграл (1.62).

В итоге для оператора H_0 получаем следующий результат:

$$(H_0)^\mu{}_\nu = \left(p_\parallel^2 + m^2 - \beta(\partial_\eta^2 - \eta^2) \right) \delta^\mu{}_\nu. \quad (2.37)$$

С помощью этого выражения мы можем сделать первый шаг в вычислении последовательного действия трёх экспоненциальных операторов на дельта-функцию в (2.36):

$$\begin{aligned} (e^{-i\tau H_0})^\mu{}_\nu \delta^{(4)}(X - X') &= \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3 p_{\parallel,y}}{(2\pi)^3} \\ &e^{-i\tau[p_\parallel^2 + m^2 + (2n+1)\beta]} e^{i(p(X-X'))_{\parallel,y}} V_n(\eta) V_n(\eta') \delta^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Далее, найдём явное выражение для второго экспоненциального оператора (2.30). Как видно из формулы (2.24), ряд для экспоненты от матрицы такого вида легко вычисляется аналитически, что приводит нас в итоге к следующему результату:

$$\begin{aligned} [e^{-i\tau H_F}]^\mu{}_\nu &= [e^{-2Q\beta\tau\varphi}]^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + \cos(2\beta\tau)\delta^\mu{}_{\perp\nu} - Q \sin(2\beta\tau)\varphi^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + \frac{e^{i2\beta\tau}}{2} (\delta^\mu{}_{\perp\nu} + iQ\varphi^\mu{}_\nu) + \frac{e^{-i2\beta\tau}}{2} (\delta^\mu{}_{\perp\nu} - iQ\varphi^\mu{}_\nu). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь дополнительно были введены обозначения для символов Кронекера в двух подпространствах:

$$\delta_{\parallel\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_{\perp\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в случае задачи о нахождении пропагатора фермиона, в промежуточном выражении для пропагатора массивного векторного бозона появляются следующие экспоненты:

$$e^{-i\tau[p_{\parallel}^2+m^2+(2n+1)\beta]}, \quad e^{-i\tau[p_{\parallel}^2+m^2+(2n+3)\beta]} \quad \text{и} \quad e^{-i\tau[p_{\parallel}^2+m^2+(2n-1)\beta]}. \quad (2.40)$$

Чтобы при интегрировании по τ заработать одинаковые выражения в знаменателе для всех слагаемых, сдвинем индексы суммирования в (2.38) соответствующим образом. Заметим, что операция сдвига индекса суммирования не влияет на дальнейшее применение третьего экспоненциального оператора, поэтому её можно провести уже на данной стадии.

Это приводит нас к выражению для результата действия двух экспоненциальных операторов на дельта-функцию:

$$\begin{aligned} (e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0})^{\mu}_{\nu} \delta^{(4)}(X - X') &= \\ &= \sqrt{\beta} \sum_{n=-1}^{\infty} \int \frac{d^3 p_{\parallel,y}}{(2\pi)^3} e^{i(p(X-X'))_{\parallel,y}} e^{-i\tau[p_{\parallel}^2+m^2+(2n+1)\beta]} d^{\mu}_{\nu}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} d^{\mu}_{\nu} &= \delta_{\parallel\nu}^{\mu} V_n V'_n + \frac{1}{2} (\delta_{\perp\nu}^{\mu} + iQ\varphi^{\mu}_{\nu}) V_{n+1} V'_{n+1} \\ &+ \frac{1}{2} (\delta_{\perp\nu}^{\mu} - iQ\varphi^{\mu}_{\nu}) V_{n-1} V'_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В данном выражении для сокращения записи были введены следующие обозначения:

$$V_m = V_m(\eta) \quad \text{и} \quad V'_m = V_m(\eta'). \quad (2.43)$$

Наконец, перейдём к последнему экспоненциальному оператору. Его ряд также может быть аналитически вычислен, давая следующее компактное выражение:

$$e^{-is(\frac{1}{\xi}-1)\Pi^\mu\Pi_\nu} = \delta^\mu_\nu + \Pi^\mu \frac{e^{-is(\frac{1}{\xi}-1)\Pi\Pi} - 1}{\Pi\Pi} \Pi_\nu. \quad (2.44)$$

Как видим, зависимый от ξ -калибровки экспоненциальный оператор представляет собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое фактически отвечает выбору калибровки Фейнмана ($\xi = 1$) и приводит в итоге к выражению (2.41). Второе слагаемое, в свою очередь, описывает отклонение от этой калибровки. Чтобы найти результат его действия на выражение (2.41)

$$\left[\Pi^\mu \frac{e^{-i\tau(\frac{1}{\xi}-1)\Pi\Pi} - 1}{\Pi\Pi} \Pi_\nu \right] e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0} \delta^{(4)}(X - X'), \quad (2.45)$$

введём стандартные обозначения для повышающего и понижающего оператора из задачи о квантовом гармоническом осцилляторе:

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \partial_\eta), \quad a^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \partial_\eta). \quad (2.46)$$

Отсюда следует, что:

$$\partial_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^- - a^+), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^- + a^+). \quad (2.47)$$

Кроме того, удобным оказывается использование следующего вспомогательного вектора единичной нормы:

$$v_\rho = \left(0, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{Q}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad (2.48)$$

что связано с рядом его свойств, проявляющихся при вычислении свёрток со встречающимися в задаче тензорами:

$$\begin{aligned} v_\rho (\delta^\rho_{\perp\nu} + iQ\varphi^\rho_\nu) &= 0, & v_\rho^* (\delta^\rho_{\perp\nu} + iQ\varphi^\rho_\nu) &= 2v_\nu^*, \\ v_\rho^* (\delta^\rho_{\perp\nu} - iQ\varphi^\rho_\nu) &= 0, & v_\rho (\delta^\rho_{\perp\nu} - iQ\varphi^\rho_\nu) &= 2v_\nu. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Используя введённые выше обозначения, оператор импульса Π можно записать в виде:

$$\Pi_\rho = p_{\parallel\rho} + \sqrt{\beta}v_\rho a^+ + \sqrt{\beta}v_\rho^* a^-. \quad (2.50)$$

Его действие на тензор d^ρ_ν даёт следующий результат:

$$\Pi_\rho d^\rho_\nu = p_{\parallel\nu} V_n V'_n + \sqrt{n\beta} v_\nu V_n V'_{n-1} + \sqrt{(n+1)\beta} v_\nu^* V_n V'_{n+1}. \quad (2.51)$$

Важнейшим замечанием является тот факт, что несмотря на то, что в исходном тензоре d^ρ_ν присутствуют слагаемые с функциями $V_m(\eta)$, имеющими разные индексы ($m = n, n-1, n+1$), в выражении (2.51), однако, присутствуют только лишь функции $V_n(\eta)$. Это, в свою очередь, означает, что последующее действие оператора ПП из (2.45) на выражение (2.51) эквивалентно следующей замене (одной и той же в каждом из слагаемых):

$$\text{ПП} \rightarrow p_{\parallel}^2 + (2n+1)\beta. \quad (2.52)$$

Как уже было отмечено ранее, такого рода упрощения возникают благодаря имеющимся симметриям задачи, в частности, соотношению на собственные функции и собственные значения оператора ПП.

Таким образом средняя часть оператора [...] в выражении (2.45) может быть заблаговременно факторизована как c -число ещё до вычисления действия оператора Π^μ на (2.51). Это приводит нас к ещё одному промежуточному представлению пропагатора:

$$\begin{aligned} (e^{-i\tau H})^\mu_\nu \delta^{(4)}(X - X') &= (e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0})^\mu_\nu \delta^{(4)}(X - X') \quad (2.53) \\ &= \sqrt{\beta} \sum_{n=-1}^{\infty} \int \frac{d^3 p_{\parallel,y}}{(2\pi)^3} \\ &\times \left(\delta^\mu_\rho + \frac{e^{-i\tau(\frac{1}{\xi}-1)[p_{\parallel}^2+(2n+1)\beta]} - 1}{p_{\parallel}^2 + (2n+1)\beta} \Pi^\mu \Pi_\rho \right) \\ &\times e^{i(p(X-X'))_{\parallel,y}} e^{-i\tau[p_{\parallel}^2+m^2+(2n+1)\beta]} d^\rho_\nu. \end{aligned}$$

Хотя ещё остаётся невычисленным действие оператора $\Pi^\mu \Pi_\rho$, уже оказывается возможным выполнить интегрирование по τ , что приводит к следующему

результату:

$$\begin{aligned}
G^\mu_\nu(X, X') &= i \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau H} \delta^{(4)}(X - X') = \\
&= \sqrt{\beta} \sum_{n=-1}^\infty \int \frac{d^3 p_{\parallel, y}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(p(X-X'))_{\parallel, y}}}{p_\parallel^2 + M_n^2 + i\varepsilon} \left(1 + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 + \tilde{M}_n^2 + i\varepsilon} \Pi^\mu \Pi_\rho \right) d^\rho_\nu,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

где были введены обозначения для эффективных масс $M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta$ и $\tilde{M}_n^2 = \xi m^2 + (2n + 1)\beta$.

Наконец, используя свойства (2.46) – (2.49), найдём значение оставшегося выражения:

$$\begin{aligned}
f^\mu_\nu &\equiv \Pi^\mu \Pi_\rho d^\rho_\nu = p_\parallel^\mu p_{\parallel \nu} V_n V'_n + \\
&+ p_\parallel^\mu \left(\sqrt{\beta n} v_\nu V_n V'_{n-1} + \sqrt{\beta(n+1)} v_\nu^* V_n V'_{n+1} \right) \\
&+ \left(\sqrt{\beta n} v^{*\mu} V_{n-1} V'_n + \sqrt{\beta(n+1)} v^\mu V_{n+1} V'_n \right) p_{\parallel \nu} \\
&+ \beta \sqrt{n(n+1)} (v^\mu v_\nu V_{n+1} V'_{n-1} + v^{*\mu} v_\nu^* V_{n-1} V'_{n+1}) \\
&+ \beta(n+1) v^\mu v_\nu^* V_{n+1} V'_{n+1} + \beta n v^{*\mu} v_\nu V_{n-1} V'_{n-1}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Как уже отмечалось ранее в контексте задач о пропагаторах скалярной частицы и фермиона, представление вида (2.54) является не самым наглядным с точки зрения имеющихся симметрий задачи, в частности, радиальной симметрии в плоскости xy . Для симметризации этого выражения нужно вычислить интеграл по переменной p_y , зависимость от которой присутствует не только в экспоненциальном множителе, но также скрыта в переменных η и η' .

Всё это опять приводит нас к интегралам вида

$$I_{n, n'} = \int dp_y e^{ip_y(y-y')} V_n(\eta) V_{n'}(\eta'). \tag{2.56}$$

Однако, в отличие от скалярного и спинорного случаев, в задаче о пропагаторе массивного векторного бозона число таких интегралов значительно больше, что видно из разнообразия попарных комбинаций индексов в произведениях вида $V_l(\eta) V_m(\eta')$ из выражений (2.42) и (2.55).

В связи с тем, что для метрики с сигнатурой $(-, +, +, +)$ некоторые промежуточные обозначения отличаются от тех, что использовались при рассмотрении скалярной и спинорной задач, выпишем ещё раз рецепт для вычисления интегралов вида (2.56).

Сначала производится следующая стандартная замена переменной интегрирования:

$$u = Q \frac{p_y}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x + x') - iQ(y - y')] . \quad (2.57)$$

Это приводит нас к выражению

$$I_{n,n'} = \frac{e^{i\Phi(X,X')}}{\sqrt{2^{n+n'} n! n'!} \pi} \sqrt{\beta} e^{-\frac{\beta}{4}(X-X')^2_{\perp}} \tilde{I}_{n,n'} . \quad (2.58)$$

В формуле (2.58) выделились, во-первых, инвариантный фазовый множитель, а во-вторых, уже известный нам табличный интеграл для произведения многочленов Чебышёва–Эрмита:

$$\Phi(X, X') = -\frac{Q\beta}{2}(x + x')(y - y') , \quad (2.59)$$

$$\tilde{I}_{n,n'} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} H_n(u + a) H_{n'}(u + b) , \quad (2.60)$$

где введены следующие обозначения:

$$a = \frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x - x') + iQ(y - y')] , \quad (2.61)$$

$$b = -\frac{\sqrt{\beta}}{2} [(x - x') - iQ(y - y')] .$$

Дальнейшие вычисления делаются по аналогии с ранее рассмотренными случаями скалярной частицы и фермиона, что в конечном итоге приводит нас к симметризованному представлению для пропагатора массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной

ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау:

$$G^\mu_\nu(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi} \sum_{n=-1}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\parallel e^{i(pZ)_\parallel} e^{-\beta Z_\perp^2/4}}{(2\pi)^2 p_\parallel^2 + M_n^2 + i\epsilon} \quad (2.62)$$

$$\times \left(\tilde{d}^\mu_\nu + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 + \tilde{M}_n^2 + i\epsilon} \tilde{f}^\mu_\nu \right),$$

$$\tilde{d}^\mu_\nu = \delta^\mu_{\parallel\nu} L_n + \frac{1}{2} \delta^\mu_{\perp\nu} (L_{n+1} + L_{n-1}) \quad (2.63)$$

$$+ \frac{iQ}{2} \varphi^\mu_\nu (L_{n+1} - L_{n-1}),$$

$$\tilde{f}^\mu_\nu = \left[p_\parallel^\mu p_{\parallel\nu} - \frac{\beta Q}{2} (p_\parallel^\mu (Z\varphi)_\nu + (\varphi Z)^\mu p_{\parallel\nu}) \right] \quad (2.64)$$

$$+ \left((2n+1)\beta - \frac{\beta^2}{4} Z_\perp^2 \right) \delta^\mu_{\perp\nu} + \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu_\nu \Big] L_n$$

$$+ \frac{i\beta}{2} \left[(p_\parallel^\mu Z_{\perp\nu} + Z_{\perp}^\mu p_{\parallel\nu}) + i\delta^\mu_{\perp\nu} - \frac{Q\beta}{2} Z_\perp^2 \varphi^\mu_\nu \right] (L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)})$$

$$- \beta^2 (\varphi Z)^\mu (Z\varphi)_\nu L_{n-1}^{(2)}.$$

В формулах (2.63) и (2.64) у всех многочленов Чебышёва–Лагерра $L_n^{(m)}$ аргумент равен $\beta Z_\perp^2/2$, то есть $L_n^{(m)} = L_n^{(m)}(\beta Z_\perp^2/2)$. Тензорные выражения в круглых скобках стоит рассматривать как последовательные свёртки по соответствующим индексам, например, $(\varphi Z)^\mu = \varphi^\mu_\lambda Z^\lambda$.

Данная форма пропагатора является смешанной. В ней присутствуют как структуры, записанные в импульсном представлении (по переменным t и z), так и структуры, записанные в координатном представлении (по переменным x и y). Как и для случаев скаляра и фермиона, имеется два направления развития дальнейших вычислений. Одно из них, а именно, приведение выражения для пропагатора к полному координатному представлению, будет рассмотрено в следующей главе. В рамках же этой главы мы выполним преобразование к полному импульсному представлению. Для этого в очередной раз воспользуемся формулами (1.77) – (1.84).

В итоге получим импульсное представление пропагатора массивного векторного бозона в постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в

ряд по уровням Ландау в произвольной ξ -калибровке:

$$G^\mu_\nu(X, X') = e^{i\Phi} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(p(X-X'))} G^\mu_\nu(p), \quad (2.65)$$

$$G^\mu_\nu(p) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{-p_\perp^2/\beta}}{p_\parallel^2 + M_n^2 + i\varepsilon} \left(\tilde{d}^\mu_\nu + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 + \tilde{M}_n^2 + i\varepsilon} \tilde{f}^\mu_\nu \right), \quad (2.66)$$

$$\tilde{d}^\mu_\nu = \delta^\mu_{\parallel\nu} L_n - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\perp\nu} (L_{n+1} + L_{n-1}) - \frac{iQ}{2} \varphi^\mu_\nu (L_{n+1} - L_{n-1}), \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\mu_\nu &= \left(p^\mu p_\nu - \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu_\nu \right) L_n - (\varphi p)^\mu (p\varphi)_\nu \left(L_n + 4L_{n-1}^{(2)} \right) \\ &+ iQ \left(p^\mu (p\varphi)_\nu + (\varphi p)^\mu p_\nu + \frac{iQ\beta}{2} \delta^\mu_{\perp\nu} \right) \left(L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\Phi(X, X') = -\frac{Q\beta}{2} (x + x')(y - y'), \quad (2.69)$$

$$M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta, \quad (2.70)$$

$$\tilde{M}_n^2 = \xi m^2 + (2n + 1)\beta. \quad (2.71)$$

В выражениях (2.67) и (2.68) у всех многочленов Чебышёва–Лагерра $L_n^{(m)}$ аргументом является $2p_\perp^2/\beta$, то есть $L_n^{(m)} = L_n^{(m)}(2p_\perp^2/\beta)$.

Заметим, что суммирование в (2.66) начинается с $n = -1$. Это означает, что в достаточно сильном магнитном поле для основного уровня Ландау величина M_{-1}^2 будет иметь отрицательное значение, приводя к так называемой неустойчивости вакуума [61].

2.3.2. Сравнение методов вычисления пропагатора массивного векторного бозона

Сравним выражение для пропагатора (2.65) – (2.71), полученное в предыдущем разделе, с результатом из статьи [105]:

$$G^\mu_\nu(X, X') = \phi(X, X') \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(p(X-X'))} G^\mu_\nu(p), \quad (2.72)$$

где уже знакомый нам инвариантный фазовый множитель записан в виде

$$\phi(X, X') = \exp \left\{ \left(-\frac{ieQ}{2} X'^\rho F_{\rho\sigma} X^\sigma \right) \right\}, \quad (2.73)$$

а фурье-образ трансляционно-инвариантной части даётся следующей формулой в параметризации собственного времени:

$$\begin{aligned}
G_{\nu}^{\mu}(p) &= i \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\cos(\beta\tau)} e^{-i\tau(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \frac{\tan(\beta\tau)}{\beta})} \\
&\times \left\{ e^{-i\tau(m^2 - i\varepsilon)} \left[\delta_{\parallel\nu}^{\mu} + \delta_{\perp\nu}^{\mu} \cos(2\beta\tau) - Q \varphi_{\nu}^{\mu} \sin(2\beta\tau) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{m^2} \left(e^{-i\tau(m^2 - i\varepsilon)} - e^{-i\tau(\xi m^2 - i\varepsilon)} \right) \left[\left(p^{\mu} - Q (\varphi p)^{\mu} \tan(\beta\tau) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(p_{\nu} - Q (p\varphi)_{\nu} \tan(\beta\tau) \right) - \frac{i\beta}{2} \left(Q \varphi_{\nu}^{\mu} + \delta_{\perp\nu}^{\mu} \tan(\beta\tau) \right) \right] \right\}. \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Чтобы преобразовать (2.74) от швингеровской формы к разложению в ряд по уровням Ландау, воспользуемся подходом, предложенным в [102] (см. также [15] и [101]). Перепишем формулу (2.74) в более удобном для дальнейшего анализа виде:

$$\begin{aligned}
G_{\nu}^{\mu}(p) &= \frac{i}{\beta} \int_0^{\infty} dv e^{-i\rho v} \left[\delta_{\parallel\nu}^{\mu} F_1(v) + \delta_{\perp\nu}^{\mu} F_2(v) - Q \varphi_{\nu}^{\mu} F_3(v) \right] \\
&+ \frac{i}{\beta m^2} \int_0^{\infty} dv \left(e^{-i\rho v} - e^{-i\rho_{\xi} v} \right) \left[\left(p^{\mu} p_{\nu} - i \frac{Q\beta}{2} \varphi_{\nu}^{\mu} \right) F_1(v) \right. \\
&\quad \left. - \left(Q p^{\mu} (p\varphi)_{\nu} + Q (\varphi p)^{\mu} p_{\nu} + i \frac{\beta}{2} \delta_{\perp\nu}^{\mu} \right) F_4(v) + (\varphi p)^{\mu} (p\varphi)_{\nu} F_5(v) \right], \tag{2.75}
\end{aligned}$$

с функциями $F_i(v)$, имеющими вид:

$$F_1(v) = \frac{1}{\cos v} \exp(-i \alpha \tan v), \tag{2.76}$$

$$F_2(v) = \frac{\cos(2v)}{\cos v} \exp(-i \alpha \tan v), \tag{2.77}$$

$$F_3(v) = \frac{\sin(2v)}{\cos v} \exp(-i \alpha \tan v), \tag{2.78}$$

$$F_4(v) = \frac{\tan v}{\cos v} \exp(-i \alpha \tan v) = i \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1(v), \tag{2.79}$$

$$F_5(v) = \frac{\tan^2 v}{\cos v} \exp(-i \alpha \tan v) = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} F_1(v). \tag{2.80}$$

В данных формулах были использованы обозначения: $v = \beta\tau$, $\rho = (m^2 + p_{\parallel}^2)/\beta$, $\rho_{\xi} = (\xi m^2 + p_{\parallel}^2)/\beta$, $\alpha = p_{\perp}^2/\beta$.

Так как все функции $F_j(v)$ ($j = 1..5$) являются периодическими и удовлетворяют соотношению

$$F_j(v + \pi n) = (-1)^n F_j(v), \quad (2.81)$$

мы можем разделить всю область интегрирования $(0, \infty)$ на равные интервалы $(0, \pi), (\pi, 2\pi), \dots, (n\pi, [n+1]\pi), \dots$. Сделав в каждом из этих интервалов замену переменной интегрирования $v \rightarrow v + n\pi$, можно единообразно записать встречающиеся в (2.75) интегралы:

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^{\infty} dv \exp(-i\rho v) F_j(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(-i\rho n\pi) A_j \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-i\rho\pi)} A_j, \end{aligned} \quad (2.82)$$

где

$$A_j = \int_0^{\pi} dv \exp(-i\rho v) F_j(v). \quad (2.83)$$

Детали, связанные с вычислением интегралов A_j могут быть найдены в [15, 108].

Приведём лишь финальные выражения:

$$A_1 = -2i (1 + e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.84)$$

$$A_2 = -i (1 + e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell_n(\alpha) + \ell_{n-2}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.85)$$

$$A_3 = -(1 + e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell_n(\alpha) - \ell_{n-2}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.86)$$

$$A_4 = 2 (1 + e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell'_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.87)$$

$$A_5 = 2i (1 + e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ell''_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.88)$$

где для компактности записи формул было введено следующее вспомогательное обозначение:

$$\ell_n(\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} L_n(2\alpha). \quad (2.89)$$

После подстановки выражений (2.84) – (2.88) в формулу (2.75) и ряда тривиальных преобразований с использованием известных свойств многочленов Чебышёва–Лагерра мы обнаружим, что (2.75) преобразуется в точности к виду (2.65) – (2.71).

Тем самым мы видим, что выражение для пропагатора массивного векторного бозона в швингеровской форме, будучи преобразованным в два шага (сперва в импульсное представление, а затем в разложение в ряд по уровням Ландау), совпало с результатом, полученным в рамках модифицированного метода Фока–Швингера. Как уже было отмечено ранее, при использовании метода МФШ соответствующий вид (частично) достигается уже на начальных этапах вычислений благодаря раннему снятию интеграла по параметру собственного времени. Всё это значительно упрощает и ускоряет вычислительный процесс.

2.3.3. Пропагатор в метрике с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Выражение для пропагатора (2.65) – (2.68) было получено в метрике с сигнатурой $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$, что делало его удобным для сравнения с ранее опубликованным результатом из работы [105]. Однако, в современной литературе по физике элементарных частиц принят ряд других соглашений, в первую очередь, это связано с превалированием метрики $g_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$. В этом разделе задача о поиске импульсного представления пропагатора массивного векторного бозона в постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау будет рассмотрена в современных обозначениях.

Во-первых, перечислим обозначения, связанные с выбором сигнатуры метрического тензора:

$$\begin{aligned} X^\mu &= (t, x, y, z), & X_\mu &= g_{\mu\nu} X^\nu = (t, -x, -y, -z), \\ \partial_\mu &= (\partial_t, \nabla), & \partial^\mu &= (\partial_t, -\nabla), \\ D_\mu &= \partial_\mu + ieQA_\mu, & \Pi_\mu &= iD_\mu, & \Pi\Pi &= \Pi^\nu \Pi_\nu. \end{aligned}$$

Далее, из первых принципов найдём пропагаторное уравнение для рассматриваемой задачи. Для этого выпишем соответствующие члены в лагранжиане Стандартной Модели:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_{WWA} + \mathcal{L}_{WWAA} + \mathcal{L}_{gauge}, \quad (2.90) \\
\mathcal{L}_W &= -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} + m^2 W_\mu^\dagger W^\mu, \\
\mathcal{L}_{WWA} &= ieQ \left[F^{\mu\nu} W_\mu^\dagger W_\nu - W_{\mu\nu}^\dagger A^\mu W^\nu + W^{\mu\nu} A_\mu W_\nu^\dagger \right], \\
\mathcal{L}_{WWAA} &= e^2 \left[A^\mu W_\mu^\dagger A^\nu W_\nu^\dagger - A^\mu A_\mu W_\nu^\dagger W^\nu \right], \\
\mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{\xi} \left(D_\mu W^\mu \right)^\dagger \left(D_\nu W^\nu \right).
\end{aligned}$$

Последний член отвечает за фиксирование калибровки, как это было предложено в [105]. Относительные знаки между слагаемыми лагранжиана Стандартной Модели были выбраны в соответствии с соглашениями, принятыми большинством [137] современных учебников и пособий (например, [138]). Это, в свою очередь, влечёт за собой выбор параметра $\eta = 1$ в выражении

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - \eta g \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k. \quad (2.91)$$

Заметим, что в оригинальной работе [105] этот выбор был сделан в соответствии с [139], т.е., $\eta = -1$. Это внесло дополнительное отличие как в лагранжиан Стандартной Модели, так и в получающееся из него пропагаторное уравнение (2.27).

Сделав соответствующий выбор договорённостей касаясь сигнатуры метрического тензора и относительных знаков в лагранжиане Стандартной Модели, получим пропагаторное уравнение для массивного векторного бозона во внешнем электромагнитном поле:

$$H_\nu^\mu G_\rho^\nu(X, X') = \delta_\nu^\mu \delta^4(X - X'), \quad (2.92)$$

$$H_\nu^\mu = (\text{ПП} - m^2) \delta_\nu^\mu - 2ieQ F_\nu^\mu + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \text{П}^\mu \text{П}_\nu. \quad (2.93)$$

Применив соответствующие коммутационные соотношения для слагаемых в (2.93), получим выражение, аналогичное (2.36):

$$G(X, X') = (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\tau H_\xi} e^{-i\tau H_F} e^{-i\tau H_0} \delta^{(4)}(X - X'). \quad (2.94)$$

Далее, используя ту же схему вычислений, что была продемонстрирована ранее для другой сигнатуры метрического тензора, получим симметризованную форму пропагатора:

$$G^\mu{}_\nu(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi} \sum_{n=-1}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_\parallel} e^{-\beta Z_\perp^2/4}}{p_\parallel^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \quad (2.95)$$

$$\times \left(\tilde{d}^\mu{}_\nu + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 - \tilde{M}_n^2 + i\varepsilon} \tilde{f}^\mu{}_\nu \right),$$

$$\tilde{d}^\mu{}_\nu = \delta_{\parallel\nu}^\mu L_n + \frac{1}{2} \delta_{\perp\nu}^\mu \left(L_{n+1} + L_{n-1} \right) \quad (2.96)$$

$$- \frac{iQ}{2} \varphi^\mu{}_\nu \left(L_{n+1} - L_{n-1} \right),$$

$$\tilde{f}^\mu{}_\nu = \left[p_\parallel^\mu p_{\parallel\nu} + \frac{\beta Q}{2} \left(p_\parallel^\mu (Z\varphi)_\nu + (\varphi Z)^\mu p_{\parallel\nu} \right) \right] L_n \quad (2.97)$$

$$- \left((2n+1)\beta - \frac{\beta^2}{4} Z_\perp^2 \right) \delta_{\perp\nu}^\mu + \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu{}_\nu \Big] L_n$$

$$+ \frac{i\beta}{2} \left[\left(p_\parallel^\mu Z_{\perp\nu} + Z_{\perp\nu}^\mu p_{\parallel\nu} \right) - i\delta_{\perp\nu}^\mu - \frac{Q\beta}{2} Z_\perp^2 \varphi^\mu{}_\nu \right] \left(L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} \right)$$

$$- \beta^2 (\varphi Z)^\mu (Z\varphi)_\nu L_{n-1}^{(2)}.$$

Это выражение, помимо прочего, будет нами использовано в третьей главе, где из него будет найдено соответствующее координатное представление пропагатора.

В рамках же этой главы получим финальное выражение для полного импульсного представления пропагатора массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау, используя современные обозначения

ния:

$$G^\mu{}_\nu(X, X') = e^{-i\Phi} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(p(X-X'))} G^\mu{}_\nu(p), \quad (2.98)$$

$$G^\mu{}_\nu(p) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{-p_\perp^2/\beta}}{p_\parallel^2 - M_n^2 + i\varepsilon} \left(\tilde{d}^\mu{}_\nu + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 - \tilde{M}_n^2 + i\varepsilon} \tilde{f}^\mu{}_\nu \right), \quad (2.99)$$

$$\tilde{d}^\mu{}_\nu = \delta_{\parallel\nu}^\mu L_n - \frac{1}{2} \delta_{\perp\nu}^\mu (L_{n+1} + L_{n-1}) + \frac{iQ}{2} \varphi^\mu{}_\nu (L_{n+1} - L_{n-1}), \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\mu{}_\nu &= \left(p^\mu p_\nu - \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu{}_\nu \right) L_n - (\varphi p)^\mu (p\varphi)_\nu \left(L_n + 4L_{n-1}^{(2)} \right) \\ &\quad - iQ \left(p^\mu (p\varphi)_\nu + (\varphi p)^\mu p_\nu + \frac{iQ\beta}{2} \delta_{\perp\nu}^\mu \right) \left(L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\Phi(X, X') = -\frac{Q\beta}{2} (x + x')(y - y'), \quad (2.102)$$

$$M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta, \quad (2.103)$$

$$\tilde{M}_n^2 = \xi m^2 + (2n + 1)\beta. \quad (2.104)$$

2.4. Пропагатор фермиона во вращающейся среде

Ещё одним заслуживающим внимания примером использования модифицированного метода Фока–Швингера (МФС) является результат, полученный сторонней группой авторов [98], а именно, пропагатор фермиона во вращающейся среде. В этой работе всецело использовался тот факт, что как криволинейные координаты, так и внешние поля описываются через аппарат ковариантной производной. Хотя данный результат не был получен и опубликован непосредственно соискателем, его включение в диссертацию является оправданным, так как показывает качественно иные физические сценарии, где мог бы быть использован метод МФС.

Рассмотрим основные этапы вычислений, которые были проделаны в данной статье. Во-первых, авторы отмечают, что исследуемый ими физический сценарий, а именно, нецентральные столкновения тяжёлых ионов, допускает описание геометрии задачи в форме цилиндра, вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью Ω . Это, в свою очередь, позволяет записать соответствующую

щий метрический тензор в виде:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - (x^2 + y^2)\Omega^2 & y\Omega & -x\Omega & 0 \\ y\Omega & -1 & 0 & 0 \\ -x\Omega & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Во-вторых, уравнение Дирака в криволинейных координатах задаётся в следующем виде [140, 141]:

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m]\psi(X) = 0. \quad (2.106)$$

Здесь величины Γ_μ определяют коэффициенты аффинной связности согласно формулам:

$$\Gamma_\mu = -\frac{i}{4}\omega_{\mu ij}\sigma^{ij}, \quad (2.107)$$

$$\omega_{\mu ij} = g_{\alpha\beta}e_i^\alpha(\partial_\mu e_j^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta e_j^\nu), \quad (2.108)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j], \quad (2.109)$$

где символы Кристоффеля, выраженные через производные от метрического тензора, имеют стандартный вид:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.110)$$

В формулах выше греческие индексы ($\mu, \nu, \dots = t, x, y, z$) относятся к общим координатам движущейся системы отсчёта, в то время как латинские индексы ($i, j, \dots = t, x, y, z$) соответствуют локальной покоящейся декартовой системе координат. Заметим, что

$$\gamma^\mu = e_i^\mu \gamma^i \quad (2.111)$$

есть матрицы Дирака в искривлённом пространстве–времени, удовлетворяющие следующим антикоммутиационным соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0, \quad (2.112)$$

где e_i^μ – это тетрады, записанные в декартовой калибровке и связывающие общие и локальные координаты согласно формуле:

$$X^\mu = e_i^\mu X^i. \quad (2.113)$$

После ряда стандартных преобразований авторы получают следующий вид уравнения Дирака:

$$[\gamma^0(i\partial_t + \Omega\hat{J}_z) + i\gamma\nabla - m]\psi(X) = 0, \quad (2.114)$$

с введённым оператором полного спина

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) + \frac{1}{2}\sigma^{12}. \quad (2.115)$$

Решение данного уравнения обсуждалось в работах [140–144].

Для того, чтобы избежать вычислительных трудностей, связанных с координатной зависимостью матриц Дирака [145, 146], авторы прибегают к квадрированию этого уравнения согласно рецепту, схожему с тем, что использовался в первом разделе данной главы:

$$\psi(X) = [\gamma^0(i\partial_t + \Omega\hat{J}_z) + i\gamma\nabla + m]\phi(X). \quad (2.116)$$

Это приводит нас к дифференциальному уравнению второго порядка на новую неизвестную функцию $\phi(x)$:

$$[(i\partial_t + \Omega\hat{J}_z)^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2]\phi(X) = 0. \quad (2.117)$$

Данное уравнение уже не содержит гамма-матриц, а значит его можно переписать с учётом имеющейся радиальной симметрии, перейдя к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z) :

$$\left[(i\partial_t + \Omega\hat{J}_z)^2 + \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2 \right) + \partial_z^2 - m^2 \right] \phi(X) = 0. \quad (2.118)$$

Применив стандартные техники работы с уравнениями в частных производных, а также используя свойства специальных функций математической физики,

найдем выражение для общего вида решения уравнения (2.118):

$$\phi(X) = \begin{bmatrix} J_l(k_\perp \rho) \\ J_{l+1}(k_\perp \rho) e^{i\varphi} \\ J_l(k_\perp \rho) \\ J_{l+1}(k_\perp \rho) e^{i\varphi} \end{bmatrix} e^{-iEt + ik_z z + il\varphi}. \quad (2.119)$$

Подставив это выражение в формулу (2.116), получим общий вид решения уравнения (2.114):

$$\psi(X) = \begin{bmatrix} [\tilde{E} + m - k_z + ik_\perp] J_l(k_\perp \rho) \\ [\tilde{E} + m + k_z - ik_\perp] J_{l+1}(k_\perp \rho) e^{i\varphi} \\ [-\tilde{E} + m + k_z - ik_\perp] J_l(k_\perp \rho) \\ [-\tilde{E} + m - k_z + ik_\perp] J_{l+1}(k_\perp \rho) e^{i\varphi} \end{bmatrix} e^{-i\tilde{E}t + ik_z z + il\varphi}. \quad (2.120)$$

В формулах (2.119) и (2.120) были использованы следующие обозначения: $\tilde{E} = E + j\Omega$, $k_\perp^2 = \tilde{E}^2 - k_z^2 - m^2$, где J_m – функции Бесселя первого рода, $j = l + s$ – квантовое число полного углового момента, а l и s – квантовые числа орбитального и спинового угловых моментов, соответственно.

В случае построения пропагатора с использованием формализма канонического квантования нам пришлось бы выполнять нормировку и ортогонализацию (как положительночастотных, так и отрицательночастотных) решений (2.120) для разных спиновых состояний, а затем находить спиновую матрицу плотности. В целом эта задача видится посильной, однако, с вычислительной точки зрения является в значительной степени ресурсоёмкой. Напротив, авторы предпочли воспользоваться методом МФШ, в рамках которого оказалось достаточным работать только лишь с функциями вида (2.119).

Для этих функций можно показать, что выполняется следующее разложение дельта-функции:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{dE dk_z dk_\perp k_\perp}{(2\pi)^3} \phi(X) \phi^\dagger(X') = \delta^{(4)}(X - X'). \quad (2.121)$$

Это выражение открывает дорогу для применения метода МФШ, в рамках которого действие экспоненциального оператора приводит к скалярной экспоненте, содержащей параметр собственного времени:

$$G(X, X') = (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\tau(\tilde{E}^2 - k_{\perp}^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (2.122)$$

$$\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{dE dk_z dk_{\perp} k_{\perp}}{(2\pi)^3} \phi(X) \phi^{\dagger}(X').$$

Тривиальное снятие интеграла по параметру собственного времени в формуле (2.122) с дальнейшим применением свойств специальных функций математической физики даёт в итоге финальное выражение для пропагатора фермиона во вращающейся среде:

$$S(X, X') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(p(X-X'))} S(p), \quad (2.123)$$

$$S(p) = \frac{[p_0 + \Omega/2 - p_z + ip_{\perp}] \gamma_0 + m}{(p_0 + \Omega/2)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} O^+ \quad (2.124)$$

$$+ \frac{[p_0 - \Omega/2 + p_z - ip_{\perp}] \gamma_0 + m}{(p_0 - \Omega/2)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} O^-, \quad (2.125)$$

$$O^{\pm} = \frac{1}{2} [1 \pm i\gamma^1 \gamma^2]. \quad (2.126)$$

Заметим, что представленный выше вид пропагатора подходит для пертурбативных вычислений в импульсном пространстве.

2.5. Основные результаты второй главы

В данной главе было продемонстрировано успешное применение модифицированного метода Фока–Швингера (МФШ) для нахождения пропагаторов заряженных частиц со спином во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Ключевым отличием данного рода задач от скалярного случая является наличие дополнительных слагаемых в операторе из левой части пропагаторного уравнения, что может в той или иной степени затруднять вычисление действия

экспоненциального оператора на дельта-функцию. Однако, в том случае, когда эти слагаемые обладают хорошими коммутационными свойствами, становится возможной факторизация экспоненциального оператора на несколько коммутирующих экспонент. Это, в свою очередь, позволяет разбить вычисления на этапы, каждый из которых значительно менее трудоёмок.

В задачах по нахождению пропагаторов для частиц со спином (в особенности, для массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) метод МФШ явно демонстрирует свои преимущества перед другими подходами. Во-первых, по сравнению с формализмом канонического квантования, где требуется нахождение спиновых состояний с их дальнейшей нормировкой и ортогонализацией, а также их использование для нахождения соответствующей спиновой матрицы плотности, в методе МФШ происходит постепенное наращивание решения, начиная с тривиальной скалярной задачи, для которой результаты всех этих вышеозначенных шагов уже “спрятаны” в дельта-функцию.

Во-вторых, если рассматривать классический метод Фока–Швингера (ФС) как первый шаг в процессе нахождения импульсного представления пропагатора в виде разложения в ряд по уровням Ландау, то очевидно, что полученный на этом шаге результат необходимо далее преобразовать от координатного представления к импульсному, а также перейти от швингеровской интегральной формы к параметризации в виде ряда. Помимо не самых простых выкладок в рамках непосредственно метода ФС, вышеозначенные преобразования в ещё большей степени увеличивают общую трудоёмкость вычислений. Напротив, в рамках метода МФШ промежуточные выражения с самого начала оказываются записаны в виде нужного ряда, а также являются максимально приближенными к импульсному представлению. Кроме того, снятие интеграла по параметру собственного времени происходит непосредственно до того единственного момента, когда требуется рутинная работа по вычислению нескольких интегралов. Всё это в итоге позволяет сравнительно быстро получить финальное выражение для пропагатора.

Хотя данная глава, как впрочем и диссертация в целом, посвящена применению метода МФШ для сценария внешнего постоянного однородного магнитного поля, стоит отметить один из промежуточных результатов, полученных в процессе нахождения пропагаторов частиц со спином. А именно, представление пропагатора в достаточно общем виде как интеграла по параметру собственного времени от цепочки (частично) коммутирующих экспоненциальных операторов, последовательно действующих на четырёхмерную дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат. Главной особенностью такого представления является тот факт, что оно было получено для любого постоянного однородного электромагнитного поля, а значит может быть использовано для теоретического анализа, где требуется лишь знание соответствующих выражений в общем виде.

Наконец, примером совершенно иной физической конфигурации является задача о поиске пропагатора электрона во вращающейся среде, которая была решена сторонней группой авторов с использованием метода МФШ. Примечательным здесь является тот факт, что хотя в этой задаче отсутствовали внешние поля, вычисления велись с учётом имеющейся радиальной симметрии, которая была закодирована посредством ковариантной производной. Единство описания казалось бы разных физических конфигураций (внешнее поле и криволинейные координаты) через аппарат ковариантной производной позволило применить метод МФШ и в данном случае, тем самым указав на ещё один класс задач, для которых он может быть задействован.

Глава 3

Пропагаторы в координатном представлении

3.1. Введение

Как уже было отмечено во введении, несмотря на доминирующее положение импульсного представления в квантовой теории поля, для ряда задач оказывается удобным использование координатного представления. Например, к таковым относятся петлевые диаграммы sunset-типа. В конечном итоге их рассмотрение в координатном представлении сводится к вычислению интегралов от произведения нескольких функций Бесселя. Для этих интегралов известны как аналитические решения, так и рекуррентные соотношения, позволяющие значительно упростить в дальнейшем их численную оценку. Кроме того, как было показано в ряде работ, в случае наличия расходимостей, встречающихся при исследовании петлевых диаграмм, координатное представление допускает применение разнообразных методов регуляризации.

Хотя выражения наподобие (1.47) и записаны в координатном представлении, используемая в них интегральная параметризация через собственное время не проявляет в явном виде ни функций Бесселя ни других специальных функций математической физики. С другой стороны, как уже было установлено в рамках рассмотрения импульсного представления пропагаторов заряженных частиц в постоянном однородном магнитном поле, при переходе к разложению в ряд по уровням Ландау выражение для пропагатора распадается на слагаемые одинакового вида. В этих слагаемых один из множителей фактически соответствует пропагатору свободной частицы в $1+1$ -мерном пространстве Минковского, а значит может быть сведён к соответствующей функции Бесселя.

Всё вышесказанное служит весомым основанием для, во-первых, поиска координатных представлений рассмотренных ранее пропагаторов, а во-вторых,

именно в виде разложения по уровням Ландау. В данной главе обсуждаются методы и приводятся решения этой задачи для скаляра, фермиона и массивного векторного бозона, опубликованные соискателем в работах [128, 130]. Причём для случая скалярной заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле соответствующее выражение было получено тремя способами, а именно, в формализме канонического квантования, а также с использованием оригинального (ФС) и модифицированного (МФС) методов Фока–Швингера.

Для случаев же заряженных частиц со спином, т.е. фермиона и массивного векторного бозона использовался только лишь метод МФС, что опять же связано с меньшими вычислительными трудностями.

Наконец, в завершение данной главы рассматриваются некоторые свойства пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле. В частности, показывается, что несмотря на тот факт, что с вычислительной точки зрения $3+1$ -мерное пространство Минковского распадается на $1+1$ -мерное подпространство Минковского и 2 -мерное евклидово подпространство (что видно из зависимости соответствующих множителей только лишь от координат одного из подпространств), эти подпространства остаются в некотором смысле связанными, а именно, посредством номера уровня Ландау.

3.2. Пропагатор скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау

3.2.1. Построение через классический метод Фока–Швингера

Ранее с использованием классического метода Фока–Швингера нами была получена формула (1.47) для координатного представления пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде интеграла по параметру собственного времени. Приведём соответ-

ствующее выражение ещё раз:

$$G(X, X') = -\frac{\beta}{(4\pi)^2} \exp^{-ieQ \int_{X'}^X d\xi^\mu A_\mu(\xi)} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{1}{\tau \sin(\beta\tau)} \quad (3.1)$$

$$\times \exp \left\{ i \left[\frac{(X - X')_{\parallel}^2}{4\tau} - \frac{\beta(X - X')_{\perp}^2}{4 \operatorname{tg}(\beta\tau)} + (m^2 - i\varepsilon)\tau \right] \right\}.$$

Стартуя с данного выражения, получим представление пропагатора в виде суммы по уровням Ландау. Для этого заметим, что имеющийся в нём интеграл схож по форме с известным интегральным представлением для модифицированной функции Бесселя второго рода [134]:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{-t - \frac{z^2}{4t}}, \quad (3.2)$$

которое справедливо для $\operatorname{Re} z^2 > 0$ и $|\arg z| < \pi/4$.

Чтобы воспользоваться (3.2), преобразуем выражение (3.1) согласно следующему рецепту. Во-первых, перейдём к новой переменной интегрирования:

$$t \equiv -i(m^2 - i\varepsilon)\tau. \quad (3.3)$$

Эта замена фактически осуществляет поворот контура интегрирования в комплексной плоскости на угол $\approx -\pi/2 - \varepsilon/m^2$, давая следующий результат:

$$G(X, X') = \frac{i\beta}{(4\pi)^2} \int_{(i+\varepsilon)\infty}^0 \frac{dt}{t} e^{-\frac{(-z_{\parallel}^2)(m^2 - i\varepsilon)}{4t} - t}$$

$$\times \left([\sinh(\beta t/m^2)]^{-1} e^{-\frac{\beta z_{\perp}^2}{4} \operatorname{coth}(\beta t/m^2)} \right). \quad (3.4)$$

При этом выражение в круглых скобках может быть записано в других обозначениях:

$$[\sinh(\beta t/m^2)]^{-1} e^{-\frac{\beta z_{\perp}^2}{4} \operatorname{coth}(\beta t/m^2)} = \quad (3.5)$$

$$= 2 \frac{e^{-b}}{1-c} e^{a \frac{c+1}{c-1}} = 2 \frac{e^{-b} e^{-a}}{1-c} e^{-\frac{2ac}{1-c}},$$

где $a = \beta Z_{\perp}^2/4$, $b = t\beta/m^2$ и $c = e^{-2b}$.

Переход к сумме по уровням Ландау осуществляется с использованием формулы для производящей функции полиномов Чебышёва–Лагерра [134] L_n в предположении $|c| < 1$:

$$\frac{1}{1-c} e^{-\frac{2ac}{1-c}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2a) c^n. \quad (3.6)$$

Далее, дополнительно следует изменить контур интегрирования с $((i + \varepsilon)\infty, 0)$ на $(0, \infty)$, при этом условие $c = e^{-2b} = e^{-2t\beta/m^2} < 1$ становится автоматически удовлетворённым.

После ряда тривиальных преобразований в экспонентах в выражении (3.4) и следующих замен

$$\frac{t}{m^2} = \frac{s}{M_n^2}, \quad M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta, \quad (3.7)$$

применим формулу (3.2), чтобы получить для пространственноподобного интервала $Z_{\parallel}^2 < 0$ формулу:

$$G(X, X') = -\frac{i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \times \sum_{n=0}^{\infty} K_0 \left(M_n \sqrt{-Z_{\parallel}^2 + i\varepsilon} \right) L_n \left(\frac{\beta Z_{\perp}^2}{2} \right). \quad (3.8)$$

Для случая же времениподобного интервала ($Z_{\parallel}^2 > 0$) нужно преобразовать K_0 с использованием стандартного соотношения для функций Бесселя:

$$K_{\nu}(z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\pi\nu/2} H_{\nu}^{(2)} \left(z e^{-i\pi/2} \right), \quad (3.9)$$

где $H_{\nu}^{(2)}$ – функции Ханкеля второго рода.

В итоге конечное выражение для координатного представления пропагатора скалярной заряженной частицы во внешнем постоянном однородном маг-

нитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау запишется как:

$$G(X, X') = \frac{-i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \left[K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \right], \quad (3.10)$$

$$L_n = L_n \left(\frac{\beta Z_{\perp}^2}{2} \right), \quad (3.11)$$

$$K_0 = K_0 \left(M_n \sqrt{-Z_{\parallel}^2 + i\epsilon} \right) \theta(-Z_{\parallel}^2), \quad (3.12)$$

$$H_0^{(2)} = H_0^{(2)} \left(M_n \sqrt{Z_{\parallel}^2 - i\epsilon} \right) \theta(Z_{\parallel}^2), \quad (3.13)$$

$$M_n^2 = m^2 + (2n + 1)\beta. \quad (3.14)$$

Отдельно стоит отметить, что асимптотическое поведение функций K_0 и $H_0^{(2)}$ вблизи светового конуса обсуждается, например, в работе [147].

3.2.2. Построение в формализме канонического квантования

Иной способ получения аналитического выражения пропагаторов состоит в применении процедуры канонического квантования, для чего сперва требуется решить соответствующее полевое уравнение:

$$H(\partial_X, X)\psi(X) = 0. \quad (3.15)$$

Напомним ещё раз, что для задачи о пропагаторе скалярной заряженной частицы оператор H записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} H(\partial_X, X) &= \Pi^\mu \Pi_\mu - m^2 \\ &= (i\partial)_{\parallel}^2 + \beta [d_\eta^2 - \eta^2] - m^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\eta = \sqrt{\beta} \left(x - Q \frac{p_y}{\beta} \right)$ и $\beta = eB$.

Несложно убедиться в том, что отнормированные положительночастотные и отрицательночастотные решения данного уравнения имеют вид:

$$\psi_n^{(\pm)}(X) = \frac{\beta^{1/4}}{\sqrt{2p_0 L_y L_z}} e^{\mp i p_0 t + i p_y y + i p_z z} V_n(\eta), \quad (3.17)$$

где

$$p_0 = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}, \quad (3.18)$$

а L_y и L_z задают нормировочный объём.

Как уже ранее отмечалось, функции V_n являются отнормированными собственными состояниями задачи о квантовом гармоническом осцилляторе

$$V_n(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\eta^2/2} H_n(\eta), \quad (3.19)$$

удовлетворяющими следующему соотношению на собственные функции и собственные значения:

$$[d_\eta^2 - \eta^2] V_n(\eta) = -(2n + 1)V_n(\eta), \quad (3.20)$$

где H_n есть многочлены Чебышёва–Эрмита.

Выполняя стандартные вычисления в рамках схемы канонического квантования, а именно, рассмотрев вакуумное среднее упорядоченного по времени произведения полевых операторов $\hat{\psi}(X)$ и $\hat{\psi}^*(X')$, т.е.,

$$G(X, X') = (-i) \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(X) \hat{\psi}^*(X') \} | 0 \rangle, \quad (3.21)$$

мы получаем выражение для пропагатора в следующем виде:

$$G(X, X') = \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{||} dp_y}{(2\pi)^3} \quad (3.22)$$

$$\times \frac{e^{-i(p(X-X'))_{||} + ip_y(y-y')}}{p_{||}^2 - M_n^2 + i\varepsilon} V_n(\eta) V_n(\eta'),$$

где было введено обозначение: $\eta' = \sqrt{\beta} \left(x' - Q \frac{p_y}{\beta} \right)$. Заметим, что данное представление пропагатора в точности совпадает с формулой (1.67), которая была получена ранее в первой главе в результате использования метода МФШ.

Дальнейшие наши действия предполагают симметризацию выражения (3.22) согласно многократно рассмотренным в прошлых главах шагам (1.68) – (1.75), которые связаны с вычислением интеграла по переменной p_y .

Напомним, что симметризованное представление пропагатора заряженной скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле имеет следующий вид:

$$G(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(\frac{\beta Z_{\perp}^2}{2}\right) e^{-\beta Z_{\perp}^2/4} \times \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\epsilon}. \quad (3.23)$$

Заметим, что за исключением неинвариантной фазы $e^{i\Phi}$, слагаемые в (3.23) разбиваются на два инвариантных (в своих подпространствах) множителя. Первый множитель зависит только от координат 2-мерной евклидовой плоскости xu , перпендикулярной к направлению магнитного поля, и обладает в этой плоскости радиальной симметрией.

Второй множитель — двумерный интеграл Фурье в 1+1-мерном подпространстве Минковского с координатами t и z :

$$J_{\parallel} = \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\epsilon}. \quad (3.24)$$

Данный интеграл тривиально вычисляется, и в случае пространственноподобного интервала ($Z_{\parallel}^2 < 0$) он равен:

$$J_{\parallel} = \frac{-i}{2\pi} K_0\left(M_n \sqrt{-Z_{\parallel}^2 + i\epsilon}\right). \quad (3.25)$$

Для случая же времениподобного интервала ($Z_{\parallel}^2 > 0$) мы снова применяем (3.9), чтобы повторно получить уже известное выражение для пропагатора (3.10).

3.2.3. Построение через модифицированный метод Фока–Швингера

Наконец, координатное представление пропагатора заряженной скалярной частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения по уровням Ландау может быть получено и с помощью модифицированного метода Фока–Швингера (МФС). Стоит заметить, что все существенные этапы,

связанные с применением данного метода, уже были ранее описаны в тех или иных главах диссертации.

Перечислим их ещё раз без указания деталей.

1. Согласно методу МФШ, общим видом пропагатора является интеграл по параметру собственного времени от экспоненциального оператора, действующего на четырёхмерную дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат.
2. Для вычисления действия этого оператора на дельта-функцию, последняя должна быть представлена надлежащим образом, а именно, в виде разложения по проекторам, каждый из которых составлен из собственных функций оператора из левой части пропагаторного уравнения. Выбрав её для данной задачи в виде (1.62), получим несимметризованное представление пропагатора (1.67).
3. Симметризацию (по отношению к двумерному евклидову подпространству) выражения (1.67) проведём согласно рецепту, обозначенному в формулах (1.68) – (1.74).
4. В полученном симметризованном выражении (1.75) вычислим фурье-интеграл в $1+1$ -мерном подпространстве Минковского.

Шаги 2, 3 и 4 фактически являются общими с этапами вычисления, рассмотренными в предыдущем разделе. В связи с этим заметим, что для случая скалярной частицы метод МФШ не даёт каких-либо особых преимуществ по сравнению с формализмом канонического квантования, хотя и является в некоторой степени более быстрым и удобным, чем использование метода ФШ с дальнейшим преобразованием выражения от швингеровской интегральной формы к разложению в ряд по уровням Ландау.

Однако, как уже ранее было неоднократно замечено, в случае частиц со спином модифицированный метод Фока–Швингера оказывается в некоторой

степени более быстрым и удобным, поэтому соответствующие вычисления координатного представления пропагаторов фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау будут сделаны, стартуя с выражений, полученных с помощью метода МФШ.

3.3. Пропагаторы частиц со спином во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау

3.3.1. Пропагатор фермиона

Для нахождения координатного представления пропагатора фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле удобно стартовать с симметризованного представления (2.21), полученного во второй главе с использованием метода МФШ. Приведём соответствующее выражение ещё раз:

$$G(X, X') = [\Pi_\nu \gamma^\nu + mI] S(X, X'), \quad (3.26)$$

$$S(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi(X, X')} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_\parallel}}{p_\parallel^2 - M_n^2 + i\epsilon} \times e^{-\beta Z_\perp^2/4} \left[L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} + L_n \Pi_n^{(Q)} \right]. \quad (3.27)$$

После снятия уже встречавшегося нам двумерного интеграла Фурье (3.24) остаётся вычислить действие дираковского оператора в формуле (3.26) на $S(X, X')$. Для этого опять же воспользуемся правилом (2.23) для “протаскивания” ковариантной производной через фазовый множитель, чтобы в итоге получить следующее выражение для координатного представления пропагатора фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения по

уровням Ландау:

$$G(X, X') = \frac{-i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} \left[\left(i\partial_\mu + \frac{eQ}{2} F_{\mu\nu} Z^\nu \right) \gamma^\mu + m \right] \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta Z_\perp^2/4} \left[L_{n-1} \Pi_{n-1}^{(Q)} + L_n \Pi_n^{(Q)} \right] \left(K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \right), \\ \Pi_{n-1}^{(Q)} &= \frac{1-Q}{2} \Pi_+ + \frac{1+Q}{2} \Pi_-, \\ \Pi_n^{(Q)} &= \frac{1+Q}{2} \Pi_+ + \frac{1-Q}{2} \Pi_-, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\Pi_+ = \text{diag}(1, 0, 1, 0), \quad (3.30)$$

$$\Pi_- = \text{diag}(0, 1, 0, 1), \quad (3.31)$$

$$M_n^2 = m^2 + 2\beta n. \quad (3.32)$$

Вычисление действия оператора ∂_μ в формуле (3.28) является тривиальной задачей. Однако, из соображений лаконичности, имеет смысл оставить финальное выражение пропагатора именно в таком виде. Кроме того, такая запись оправдывается и тем наблюдением, что в практических вычислениях зачастую производная будет интегрироваться по частям.

3.3.2. Пропагатор массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке

Для нахождения координатного представления пропагатора массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау удобно стартовать с симметризованного представления (3.33), полученного во второй главе с использованием метода МФШ. Приведём соответствующее выражение

ещё раз:

$$G^\mu_\nu(X, X') = \frac{\beta}{2\pi} e^{i\Phi} \sum_{n=-1}^{\infty} \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_\parallel} e^{-\beta Z_\perp^2/4}}{p_\parallel^2 - M_n^2 + i\epsilon} \quad (3.33)$$

$$\times \left(\tilde{d}^\mu_\nu + \frac{\xi - 1}{p_\parallel^2 - \tilde{M}_n^2 + i\epsilon} \tilde{f}^\mu_\nu \right),$$

$$\tilde{d}^\mu_\nu = \delta^\mu_{\parallel\nu} L_n + \frac{1}{2} \delta^\mu_{\perp\nu} (L_{n+1} + L_{n-1}) \quad (3.34)$$

$$- \frac{iQ}{2} \varphi^\mu_\nu (L_{n+1} - L_{n-1}),$$

$$\tilde{f}^\mu_\nu = \left[p_\parallel^\mu p_{\parallel\nu} + \frac{\beta Q}{2} (p_\parallel^\mu (Z\varphi)_\nu + (\varphi Z)^\mu p_{\parallel\nu}) \right] \quad (3.35)$$

$$- \left((2n+1)\beta - \frac{\beta^2}{4} Z_\perp^2 \right) \delta^\mu_{\perp\nu} + \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu_\nu \Big] L_n$$

$$+ \frac{i\beta}{2} \left[(p_\parallel^\mu Z_{\perp\nu} + Z_{\perp}^\mu p_{\parallel\nu}) - i\delta^\mu_{\perp\nu} - \frac{Q\beta}{2} Z_\perp^2 \varphi^\mu_\nu \right] (L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)})$$

$$- \beta^2 (\varphi Z)^\mu (Z\varphi)_\nu L_{n-1}^{(2)}.$$

Помимо ранее рассмотренного интеграла J_\parallel , в данной задаче имеется ещё один двумерный фурье-интеграл схожего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\parallel &= \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_\parallel}}{\left[p_\parallel^2 - M_n^2 + i\epsilon \right] \left[p_\parallel^2 - \tilde{M}_n^2 + i\epsilon \right]} \quad (3.36) \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{1}{m^2(\xi - 1)} \left[K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} - \tilde{K}_0 + \frac{i\pi}{2} \tilde{H}_0^{(2)} \right], \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{K}_0 = K_0 \left(\tilde{M}_n \sqrt{-Z_\parallel^2 + i\epsilon} \right) \theta(-Z_\parallel^2), \quad (3.37)$$

$$\tilde{H}_0^{(2)} = H_0^{(2)} \left(\tilde{M}_n \sqrt{Z_\parallel^2 - i\epsilon} \right) \theta(Z_\parallel^2). \quad (3.38)$$

Дальнейшие действия заключаются в замене p_\parallel на оператор $i\partial_\parallel$ в (3.35). В итоге получаем координатное представление пропагатора массивного векторного бозона во внешнем постоянном однородном магнитном поле в произвольной

ξ -калибровке в виде разложения в ряд по уровням Ландау:

$$G^\mu_\nu(X, X') = \frac{-i\beta}{4\pi^2} e^{i\Phi} e^{-\beta Z_\perp^2/4} \sum_{n=-1}^{\infty} \left\{ P^\mu_\nu - \frac{1}{m^2} Q^\mu_\nu \right\}, \quad (3.39)$$

$$P^\mu_\nu = \left[\delta^\mu_{\parallel\nu} L_n + \frac{1}{2} \delta^\mu_{\perp\nu} (L_{n+1} + L_{n-1}) - \frac{iQ}{2} \varphi^\mu_\nu (L_{n+1} - L_{n-1}) \right] \times \left[K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} \right], \quad (3.40)$$

$$Q^\mu_\nu = \left[\left\{ -\partial^\mu_{\parallel} \partial_{\parallel\nu} + \frac{i\beta Q}{2} \left(\partial^\mu_{\parallel} (Z\varphi)_\nu + (\varphi Z)^\mu \partial_{\parallel\nu} \right) - \left((2n+1)\beta - \frac{\beta^2}{4} Z_\perp^2 \right) \delta^\mu_{\perp\nu} + \frac{iQ\beta}{2} \varphi^\mu_\nu \right\} L_n - \frac{\beta}{2} \left\{ \left(\partial^\mu_{\parallel} Z_{\perp\nu} + Z^\mu_{\perp} \partial_{\parallel\nu} \right) - \delta^\mu_{\perp\nu} + \frac{iQ\beta}{2} Z_\perp^2 \varphi^\mu_\nu \right\} \left(L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} \right) - \beta^2 (\varphi Z)^\mu (Z\varphi)_\nu L_{n-1}^{(2)} \right] \left[K_0 - \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)} - \tilde{K}_0 + \frac{i\pi}{2} \tilde{H}_0^{(2)} \right]. \quad (3.41)$$

3.4. Некоторые свойства пропагаторов

В данном разделе мы обсудим некоторые свойства пропагаторов заряженных частиц во внешнем постоянном однородном магнитном поле, когда они записаны в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Для анализа оказывается удобным использовать координатное представление, причём для простоты ограничимся лишь случаем скалярной частицы.

Во-первых, заметим, что если не учитывать общую неинвариантную фазу, каждый член разложения в (3.10) является произведением двух множителей, соответствующих одному из двух подпространств, двумерному евклидову подпространству (задаваемому координатами x и y), а также 1+1-мерному подпространству Минковского (задаваемому координатами t и z). Для всех полученных выражений пропагаторов множитель, описывающий плоскость xy , перпендикулярную направлению магнитного поля, является экспоненциально убывающим. Тем самым становится очевидно, что потенциальные расходимости в петлевых диаграммах могут либо возникать за счёт суммирования ряда

по уровням Ландау либо быть связанными с множителем в $1+1$ -мерном подпространстве Минковского. В последнем случае, как можно видеть, например, из интеграла Фурье в импульсном представлении, степень числителя равна степени знаменателя, что значительно улучшает свойства расходящихся выражений.

Во-вторых, обозначенные выше подпространства хоть и независимы с точки зрения соответствующих преобразований симметрий, но тем не менее связаны друг с другом посредством номера уровня Ландау n в следующем смысле.

Каждая из функций вида

$$\Phi_n(\alpha) = L_n(\alpha)e^{-\alpha/2} \quad \alpha = \beta Z_{\perp}^2/2 \quad (3.42)$$

описывает распространение частицы в плоскости xy . Её график состоит из двух участков, осцилляторного и монотонного (см. Рис. 3.1). На монотонном участке затухающая экспонента доминирует, тем самым делая незначительным соответствующий вклад в полную амплитуду пропагатора со стороны n -го уровня Ландау. Для осцилляторного участка известны его границы в аналитическом виде в зависимости от номера уровня Ландау [148]:

$$\alpha_{min} \approx 0, \alpha_{max} \approx 4n. \quad (3.43)$$

При этом внутри осцилляторного участка функции Φ_n достаточно хорошо аппроксимируются следующим выражением:

$$\Phi_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \mu(\alpha)}{[(\alpha_{max} - \alpha)(\alpha - \alpha_{min})]^{1/4}}, \quad (3.44)$$

где $\mu(\alpha)$ есть некая непрерывная функция, точный вид которой не является существенным для данной задачи (для подробностей, см. [149]).

Заметим, что можно провести некую аналогию между данной физической конфигурацией и той, что наблюдается в задаче об атоме водорода, а именно, тем фактом, что удалённые орбиты описываются большими значениями главных квантовых чисел [150].

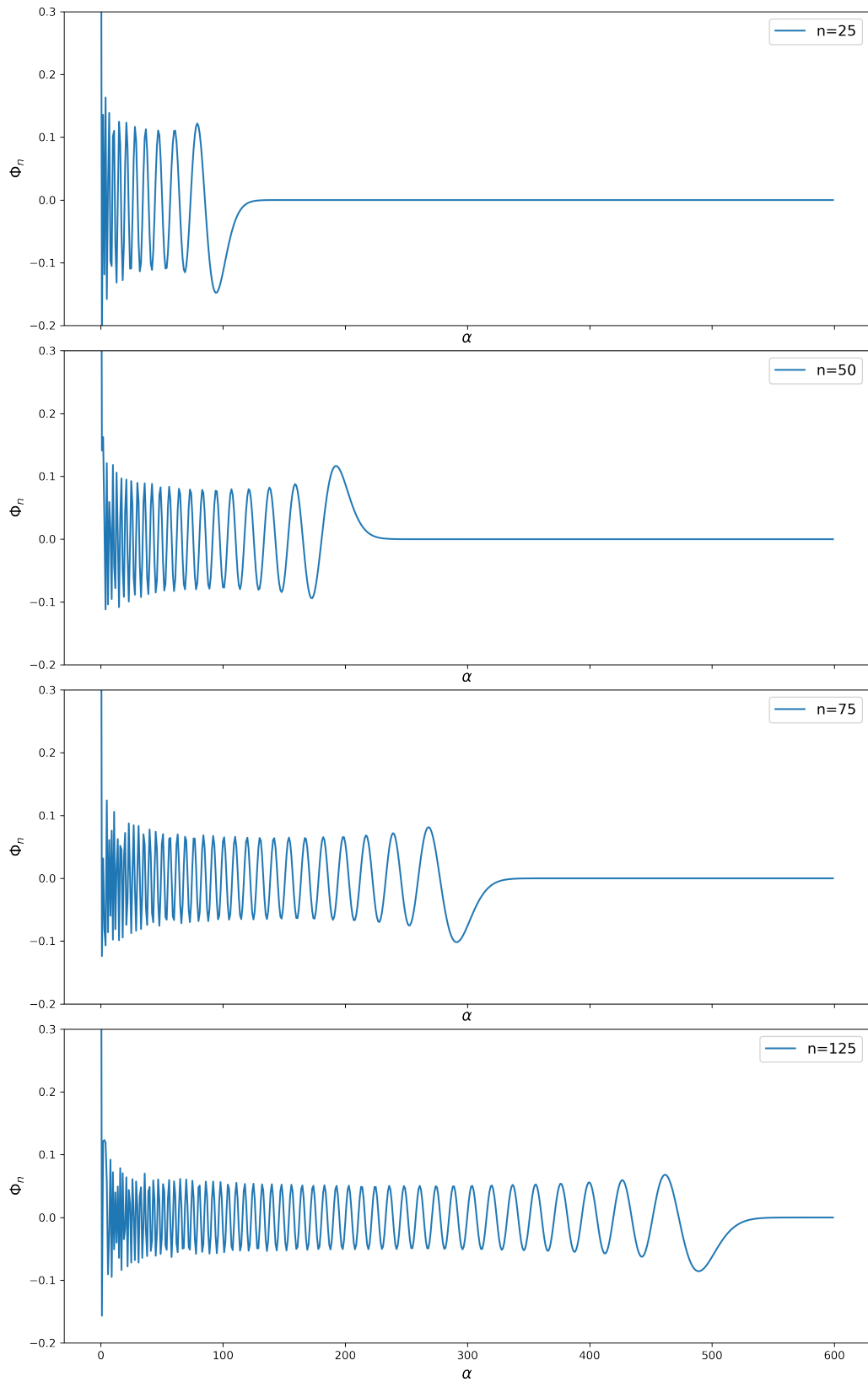


Рис. 3.1. Осцилляторный характер функций Φ_n для различных значений номера уровня Ландау ($n = 25, 50, 75, 125$). Осцилляторный участок ограничен значением $\alpha \approx 4n$.

Из формул выше можно установить, что если мы хотим описать распространение частицы в плоскости xy вплоть до расстояния R (т.е. до значения $\alpha = \beta R^2/2$), нам нужно рассмотреть как минимум n_{min} членов разложения, где:

$$n_{min} \approx \alpha/4 \approx \beta R^2/8. \quad (3.45)$$

Ещё одним наблюдением является тот факт, что амплитуда осцилляций функции $\Phi_n(\alpha)$ внутри осцилляторного участка (оцененная, например, в его средней точке $\alpha_{max}/2 = 2n$) зависит от n согласно следующему соотношению:

$$\Phi_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (3.46)$$

С учётом формулы (3.45) это означает, что масштаб функции $\Phi_{n_{min}}$ для начального ($n = n_{min}$) члена разложения в ряд по уровням Ландау, для которого значение этой функции в точке с радиальной координатой R не является исчезающе малым, зависит от R следующим образом:

$$\Phi_n \sim \frac{1}{\sqrt{\beta R}}. \quad (3.47)$$

Оказывается, что описанное выше не является единственным механизмом, посредством которого радиальная координата R влияет на полную амплитуду пропагатора. Заметим, что хоть функции K_0 и $H_0^{(2)}$ зависят только от квадрата интервала Z_{\parallel}^2 в 1+1-мерном подпространстве Минковского (и не зависят явно от координат x и y), некая связь с плоскостью xy всё-таки сохраняется, а именно, посредством номера уровня Ландау n , от которого зависит эффективная масса M_n . Как было установлено в выражении (3.45), большие значения R влекут за собой большие значения номера минимального уровня Ландау n_{min} , начиная с которого амплитуда пропагатора (а точнее, Φ_n) не является исчезающе малой. Это, в свою очередь, приводит к большим значениям для величины $\zeta = \sqrt{m^2 + (2n_{min} + 1)\beta} \sqrt{|Z_{\parallel}^2|}$. Используя известные выражения для асимпто-

тического поведения функций Бесселя [134, 135]

$$K_0(\zeta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta}, \quad (3.48)$$

$$H_0^{(2)}(\zeta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{-i(\zeta-\pi/4)}, \quad (3.49)$$

мы заключаем, что радиальная координата R из плоскости xy дополнительно контролирует масштаб полной амплитуды пропагатора через множители (зависящие от номера уровня Ландау), описывающие подпространство tz , согласно следующим асимптотикам:

$$K_0 \sim e^{-\beta R} / \sqrt{\beta R}, \quad (3.50)$$

$$H_0^{(2)} \sim 1 / \sqrt{\beta R}. \quad (3.51)$$

Полученные в данной главе формулы могут служить для аналитической оценки масштаба амплитуды пропагатора при обрезании ряда по уровням Ландау в разного рода физических конфигурациях.

3.5. Основные результаты третьей главы

В данной главе были найдены выражения для координатного представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Интерес в именно таком разложении подогревается тем фактом, что для случая свободных полей рассмотрение некоторых классов петлевых диаграмм приводит к интегралам, имеющим хорошие аналитические свойства именно в координатном представлении. Эти интегралы содержат в качестве подынтегрального выражения произведение различных функций Бесселя. В отличие от швингеровской формы, где внутри интеграла по параметру собственного времени содержатся тригонометрические функции, разложение в ряд по уровням Ландау приводит к выражению пропагатора, записанному в терминах функций Бесселя и многочленов

Чебышёва–Лагерра. В связи с этим есть все основания считать, что рассмотрение некоторых классов петлевых диаграмм во внешнем постоянном однородном магнитном поле будет иметь успех при использовании именно такого представления.

Для случая скалярной частицы вычисления были проведены тремя различными (хоть и местами похожими) способами, а именно, в рамках формализма канонического квантования, а также с помощью классического (ФС) и модифицированного (МФС) методов Фока–Швингера. Как и ожидалось, во всех случаях было получено одно и то же финальное выражение. Это выражение в дальнейшем использовалось для исследования асимптотического поведения членов ряда, а также для установления косвенного влияния радиальной координаты (из плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля) на полную амплитуду пропагатора посредством номера уровня Ландау.

Хотя для вычисления пропагатора скалярной частицы использование метода МФС не даёт существенных преимуществ, в случае частиц со спином (фермиона и массивного векторного бозона) его применение является более чем оправданным, что обсуждалось в соответствующих разделах данной главы.

Указанные представления пропагаторов получены впервые. В дальнейших исследованиях предполагается их использование для вычисления некоторых петлевых диаграмм в процессах с присутствием внешнего постоянного однородного магнитного поля.

Заключение

В настоящей диссертации была представлена разработанная соискателем модификация классического метода Фока–Швингера (ФС). Описанный как в общем виде, так и применённый к ряду частных задач, модифицированный метод Фока–Швингера (МФС) является рецептом для решения пропагаторных уравнений, состоящим из следующих шагов:

1. представление пропагатора в виде интеграла по параметру собственного времени от экспоненциального оператора, действующего на дельта-функцию (из правой части пропагаторного уравнения) от разности пространственно-временных координат;
2. разделение экспоненциального оператора на последовательность коммутирующих экспонент;
3. выбор разложения дельта-функции в ряд/интеграл по проекторам, составленным из собственных функций одного из операторов из левой части пропагаторного уравнения;
4. замена операторных конструкций на скалярные путём применения соотношения на собственные функции и собственные значения для экспоненциальных операторов;
5. тривиальное снятие интеграла по параметру собственного времени;
6. прочие преобразования к нужному представлению.

С некоторой точки зрения данный метод является комбинацией метода ФС и подхода к нахождению пропагаторов в рамках формализма канонического квантования. А именно, от первого заимствуется интегральное представление пропагатора по параметру собственного времени, а от второго – нахождение и использование общего вида решения соответствующего полевого уравнения. В

то же время метод МФШ выгодно отличается от своих “конкурентов” по ряду характеристик.

- Во-первых, так как разложение дельта-функции ведётся с использованием решений полевого уравнения, мы в явном (или почти явном) виде пользуемся имеющимися симметриями задачи, а также соответствующими квантовыми числами. Это, в частности, означает, что уже на начальных вычислительных этапах выражение пропагатора находится в виде, достаточно близком к импульсному представлению, использование которого является удобным для большого числа задач. Напротив, в рамках метода ФШ эти квантовые числа фактически скрыты в соответствующих математических конструкциях, а симметрии проявляются лишь косвенно.
- Во-вторых, в отличие от метода ФШ, где требуется дополнительно выполнять интегрирование финального выражения по параметру собственного времени, в рамках метода МФШ данный интеграл снимается уже на одном из начальных этапов вычислений, давая фактически тот же результат, что получается после вычисления спиновой матрицы плотности в рамках метода канонического квантования.
- В-третьих, метод МФШ не требует нахождения спиновых состояний, их нормировку и ортогонализацию, с дальнейшим нахождением спиновой матрицы плотности (как это происходит в рамках канонического квантования), что обусловлено наличием дельта-функции в правой части пропагаторного уравнения.
- Наконец, благодаря разделению экспоненциального оператора на последовательность коммутирующих экспонент, задача фактически разбивается на этапы, каждый следующий из которых в умеренной степени усложняет результат предыдущего. Это в целом делает вычисления более простыми, удобными и прозрачными.

В рамках данной диссертации метод МФШ был применён для построения пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения по уровням Ландау. Необходимость такого рода выражений диктуется тем фактом, что в современных задачах на стыке квантовой теории поля и астрофизики наличие внешнего поля (в частности, магнитного) является скорее правилом, нежели исключением. Знание аналитического вида соответствующего пропагатора в этом случае позволяет проводить точные вычисления амплитуд процессов как в древесном приближении, так и для петлевых диаграмм.

Задачи во внешних полях порождают множество представлений. С точки зрения формы записи финальных выражений пропагатора, помимо возможности использовать или координатное или импульсное (а также смешанное) представление, имеется ещё и независимый выбор между видом пропагатора либо через интеграл по параметру собственного времени либо в виде разложения в ряд по уровням Ландау. Последний случай обладает очевидной интерпретируемостью, в связи с чем именно он и был выбран для рассмотрения в рамках метода МФШ.

Кроме обозначенной выше интерпретируемости разложения в ряд по уровням Ландау, выражения для отдельных членов соответствующей суммы содержат в себе множитель, по форме схожий с пропагатором в $1+1$ -мерном пространстве Минковского. Это, в свою очередь, означает, что координатные представления таких пропагаторов будут выражаться через функции Бесселя. Принимая во внимание тот факт, что в этом случае для целого класса петлевых диаграмм имеются удобные методы вычисления и упрощения соответствующих интегралов, в данной диссертации были к тому же найдены координатные представления пропагаторов заряженных частиц (скаляра, фермиона и массивного векторного бозона в произвольной ξ -калибровке) во внешнем постоянном однородном магнитном поле в виде разложения по уровням Ландау.

Наконец, помимо финальных выражений пропагаторов, удобных для расчётов конкретных квантово-полевых процессов, были также найдены всевозможные промежуточные представления той или иной степени общности. Особо внимания заслуживает наиболее общее из них, а именно в виде интеграла по параметру собственного времени от серии коммутирующих экспоненциальных операторов, последовательно действующих на дельта-функцию от разности пространственно-временных координат, полученное для случаев фермиона и массивного векторного бозона в произвольном постоянном однородном электромагнитном поле. Такого рода представления могут быть полезны для теоретического анализа, например, путём всевозможных преобразований экспоненциальных операторов, в частности, их разложения в ряд по малому параметру.

Стоит также отметить, что благодаря единству математического описания задач во внешних полях с задачами в криволинейных координатах (в т.ч. в искривлённом пространстве) через аппарат ковариантной производной, все рассмотренные методы для первого класса задач могут быть применены и для второго. В частности, это означает, что при поиске пропагаторов частиц в криволинейных координатах использование метода МФШ будет давать те же преимущества, что обсуждались выше. Это факт нашёл отражение в работе сторонней группы авторов, где с использованием метода МФШ ими было найдено выражение для пропагатора фермиона во вращающейся среде.

В целом метод МФШ гармонично вливается в семейство методов поиска пропагаторов частиц, позволяя с иной стороны взглянуть на их структуру и свойства. Его дальнейшее развитие может вестись по ряду направлений.

- Во-первых, не рассмотренным остался случай постоянного электрического поля (со всевозможными его модуляциями), что имеет важность для таких процессов, как например, швингеровское рождение пар.
- Во-вторых, есть основания считать, что метод МФШ может быть успешно применён для другой важной конфигурации внешнего поля, а именно,

поля плоской электромагнитной волны.

- В-третьих, теоретический анализ экспоненциальных операторов, их преобразований и коммутационных свойств может помочь в отыскании иных конфигураций электромагнитного поля, разрешимых как аналитически точно, так и в виде некоего приближения.
- В-четвёртых, интерес представляет применение метода МФШ для больших размерностей (как пространственных, так и спиновых), например, для уравнения Рариты–Швингера. За счёт отсутствия необходимости манипуляций со спиновыми состояниями, это может дать значительный выигрыш в уменьшении количества рутинных вычислений, которые становятся всё более трудоёмкими по мере роста размерности.
- В-пятых, напротив, можно задаться целью исследовать меньшие размерности пространства Минковского, что потенциально должно расширить класс точно разрешимых задач. Типичным примером этого могут быть $1+1$ -мерные конформные теории поля.
- Наконец, продуктивным видится применение метода МФШ для задач в криволинейных координатах, в особенности, для поиска пропагаторов в искривлённом пространстве-времени.

Несмотря на имеющиеся преимущества перед другими методами поиска пропагаторов, модифицированный метод Фока–Швингера, однако, не является магическим средством для разрешения пропагаторных уравнений в любых физических конфигурациях. Успех его применения в значительной степени зависит как от надлежащего разложения дельта-функции (что эквивалентно нахождению общего решения полевого уравнения), так и от наличия хороших коммутационных соотношений между слагаемыми в операторе из пропагаторного уравнения. По состоянию на данный момент, метод МФШ стоит рассматривать

как способ нахождения пропагаторов более коротким путём с явным (или почти явным) использованием имеющихся симметрий, что в результате может значительно понизить порог вхождения в ту или иную область исследований в современной теоретической физике.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. проф. Кузнецову Александру Васильевичу за плодотворные дискуссии и неоценимую помощь в течение всех лет совместной работы.

Список литературы

1. Klapdor-Kleingrothaus H., Zuber K. Particle astrophysics. CRC Press, 1997.
2. Gaisser T., Halzen F., Stanev T. Particle astrophysics with high energy neutrinos // Physics Reports. 1995. Vol. 258, no. 3. P. 173–236.
3. Bergström L., Goobar A. Cosmology and particle astrophysics. Springer Science & Business Media, 2006.
4. Raffelt G. Stars as laboratories for fundamental physics: The astrophysics of neutrinos, axions, and other weakly interacting particles. University of Chicago press, 1996.
5. Isern J., Garcia-Berro E. White dwarf stars as particle physics laboratories // Nuclear Physics B-Proceedings Supplements. 2003. Vol. 114. P. 107–110.
6. Bandyopadhyay D. Neutron Stars: Laboratories for fundamental physics under extreme astrophysical conditions // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2017. Vol. 38, no. 3. P. 1–9.
7. Chadwick J. Possible existence of a neutron // Nature. 1932. Vol. 129, no. 3252. P. 312–312.
8. Lev Landau and the concept of neutron stars / D. Yakovlev, P. Haensel, G. Baym et al. // Physics-Uspekhi. 2013. Vol. 56, no. 3. P. 289.
9. Baade W., Zwicky F. Remarks on super-novae and cosmic rays // Physical Review. 1934. Vol. 46, no. 1. P. 76.
10. Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A / K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba et al. // Physical Review Letters. 1987. Vol. 58, no. 14. P. 1490.
11. Aguilar-Arevalo A., et al. Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam // Physical Review D. 2001. Vol. 64. P. 112007.
12. Понтекорво Б.М. Мезоний и антимезоний // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1957. Т. 33. С. 549–551.

13. Понтекорво Б.М. Нейтринные эксперименты и проблема сохранения лептонного числа // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 53. С. 1717–1725.
14. Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. Remarks on the unified model of elementary particles // Prog. Theor. Phys. 1962. Vol. 28. P. 870–880.
15. Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak Processes in External Active Media. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013. 282 p.
16. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
17. Bhagwat K., Khandekar D., Lawande S. Path integral methods and their applications. World Scientific, 1993.
18. Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Physical Review. 1951. Jun. Vol. 82. P. 664–679. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
19. Fock V. Proper time in classical and quantum mechanics // Phys. Z. Sowjetunion. 1937. Vol. 12. P. 404–425.
20. Magnetic fields in the large-scale structure of the universe / D. Ryu, D. Schleicher, R. Treumann et al. // Space Science Reviews. 2012. Vol. 166, no. 1–4. P. 1–35.
21. Бисноватый-Коган Г.С. Взрыв вращающейся звезды как механизм сверхновой // Астрон. журн. 1970. Т. 47. С. 813–816.
22. Бисноватый-Коган Г.С. Физические вопросы теории звездной эволюции. М: Наука, 1989. 487 с.
23. Neronov A., Vovk I. Evidence for Strong Extragalactic Magnetic Fields from Fermi Observations of TeV Blazars // Science. 2010. Vol. 328, no. 5974. P. 73–75.
24. Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
25. Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Квантовые процессы в силь-

- ном внешнем поле. М: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 192 с.
26. Клепиков Н.П. Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1954. Т. 26, № 1. С. 19–34.
 27. Photon splitting in a strong magnetic field / S. Adler, J. Bahcall, C. Callan et al. // Physical Review Lett. 1970. Vol. 25. P. 1061–1065.
 28. Bialynicka-Birula Z., Bialynicka-Birula I. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field // Physical Review D. 1970. no. 10. P. 2341–2345.
 29. Adler S. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field // Annals of Physics. 1971. Vol. 67. P. 599–647.
 30. Папанян В.О., Ритус В.И. Поляризация вакуума и расщепление фотонов в интенсивном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1971. Т. 61, № 6. С. 2231–2241.
 31. Папанян В.О., Ритус В.И. Трехфотонное взаимодействие в интенсивном поле и масштабная инвариантность // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1973. Т. 65. С. 1756–1771.
 32. Baring M. Photon-splitting limits to the hardness of emission in strongly magnetized soft gamma repeaters // Astrophysical Journal. 1995. Vol. 440, no. 2. P. 69–72.
 33. Adler S., Schubert C. Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. P. 1695–98.
 34. Baier V., Milstein A., Shaisultanov R. Photon splitting in a very strong magnetic field // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. P. 1691–1695.
 35. Wilke C., Wunner G. Photon splitting in strong magnetic fields: Asymptotic approximation formulas versus accurate numerical results // Physical Review D. 1997. Vol. 55, no. 2. P. 997.
 36. Chistyakov M., Kuznetsov A., Mikheev N. Photon splitting above the pair

- creation threshold in a strong magnetic field // *Physics Letters*. 1998. Vol. B434, no. 1. P. 67–73.
37. Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Чистяков М.В. Расщепление фотона на два фотона в сильном магнитном поле // *Ядерная физика*. 1999. Т. 62, № 9. С. 1638–1646.
38. Чобан Э.А., Иванов А.Н. Рождение лептонных пар высокоэнергетическими нейтрино в поле сильной электромагнитной волны // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1969. № 56. С. 194.
39. Борисов А.В., Жуковский В.Ч., Лысов Б.А. Рождение электрон – позитронной пары нейтрино в магнитном поле // *Изв. вузов. Физика*. 1983. № 8. С. 30–34.
40. Книжников М.Ю., Татаринцев А.В. Рождение электрон – позитронной пары нейтрино в постоянном внешнем поле // *Вестн. МГУ. Серия “Физика, астрономия”*. 1984. Т. 25, № 3. С. 26–30.
41. Borisov A., Ternov A., Zhukovsky V. Electron-positron pair production by a neutrino in an external electromagnetic field // *Physics Letters B*. 1993. Vol. 318, no. 3. P. 489–491.
42. Kuznetsov A., Mikheev N. Neutrino energy and momentum loss through the process $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ in a strong magnetic field // *Physics Letters B*. 1997. Vol. 394, no. 1-2. P. 123–126.
43. Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Нейтринное рождение электрон–позитронных пар в магнитном поле // *Ядерная физика*. 1997. Т. 60, № 11. С. 2038–2047.
44. Борисов А.В., Заморин Н.Б. Рождение электрон – позитронной пары в распаде массивного нейтрино в постоянном внешнем поле // *Ядерная физика*. 1999. Т. 62, № 9. С. 1647–1656.
45. Kuznetsov A., Mikheev N., Romyantsev D. Lepton pair production by high-energy neutrino in an external electromagnetic field // *Modern Physics Letters A*. 2000. Vol. 15, no. 08. P. 573–578.
46. Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Нейтринное рождение леп-

- тонных пар во внешнем электромагнитном поле // Ядерная физика. 2002. Т. 65, № 2. С. 303–306.
47. Гальцов Д.В., Никитина Н.С. Фотонейтринные процессы в сильном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1972. Т. 62, № 6. С. 2008–2012.
48. Скобелев В.В. О реакциях $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и $\nu \rightarrow \gamma\nu$ в сильном магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1976. Т. 71, № 4. С. 1263–1267.
49. Ioannisian A., Raffelt G. Cherenkov radiation by massless neutrinos in a magnetic field // Physical Review D. 1997. Vol. 55, no. 11. P. 7038.
50. Gvozdev A., Mikheev N., L.A. V. Resonance neutrino bremsstrahlung $\nu \rightarrow \nu\gamma$ in a strong magnetic field // Physics Letters B. 1997. Vol. 410, no. 2-4. P. 211–215.
51. DeRaad Jr. L., Milton K., Hari Dass N. Photon decay into neutrinos in a strong magnetic field // Physical Review D. 1976. Vol. 14, no. 12. P. 3326–3334.
52. Борисов А.В., Жуковский В.Ч., Эминов П.А. Испускание нейтринных пар электроном в сверхсильном магнитном поле // Известия ВУЗов. Физика. 1978. № 3. С. 110–114.
53. Mikheev N., Vassilevskaya L. Axion decay $a \rightarrow f\bar{f}$ in a strong magnetic field // Physics Letters B. 1997. Vol. 410, no. 2-4. P. 203–206.
54. Duncan R., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - implications for gamma-ray bursts // Astrophysical Journal Letters. 1992. Vol. 392. P. L9. URL: <https://doi.org/10.1086/186413>.
55. Kouveliotou C., et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20 // Nature. 1998. Vol. 393. P. 235–237.
56. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 / C. Kouveliotou, T. Strohmayer, K. Hurley et al. // Astrophysical Journal. 1999. Vol. 510. P. 115–118.
57. Gavriil F., Kaspi V., Woods P. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous

- x-ray pulsar // Nature. 2002. Vol. 419. P. 142–144.
58. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 / A. Ibrahim, S. Safi-Harb, J. Swank et al. // Astrophysical Journal. 2002. Vol. 574. P. 51–55.
 59. Ibrahim A., Swank J., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // Astrophysical Journal. 2003. Vol. 584. P. 17–22.
 60. Olausen S., Kaspi V. The McGill magnetar catalog // Astrophysical Journal. 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
 61. Nielsen N. K., Olesen P. An Unstable Yang-Mills Field Mode // Nuclear Physics B. 1978. Vol. 144. P. 376–396.
 62. Skalozub V. Effective Mass of W Boson in a Magnetic Field // Phys. At. Nucl. 2014. 01. Vol. 77. P. 949–955.
 63. Горизонты петаваттных лазерных комплексов / А. В. Коржиманов, А. А. Гonosков, Е. А. Хазанов [и др.] // Усп. физ. наук. 2011. Т. 181, № 1. С. 9–32. URL: <https://ufn.ru/ru/articles/2011/1/c/>.
 64. Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems / A. Di Piazza, C. Müller, K. Hatsagortsyan et al. // Review of Modern Physics. 2012. Aug. Vol. 84. P. 1177–1228. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1177>.
 65. Di Piazza A., Pätuleanu T. Electron mass shift in an intense plane wave // Physical Review D. 2021. Vol. 104, no. 7. P. 076003.
 66. Tajima T., Homma K. Fundamental Physics Explored with High Intensity Laser // International Journal of Modern Physics A. 2012. Vol. 27. P. 1230027.
 67. Skokov V., Illarionov A., Toneev V. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions // International Journal of Modern Physics A. 2009. Vol. 24, no. 31. P. 5925–5932. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X09047570>.
 68. Voloshin S. Testing the chiral magnetic effect with central U+ U collisions //

- Physical review letters. 2010. Vol. 105, no. 17. P. 172301.
69. Hattori K., Huang X.-G. Novel quantum phenomena induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions // Nuclear Science and Techniques. 2017. Vol. 28, no. 2. P. 1–29.
 70. Azimuthally fluctuating magnetic field and its impacts on observables in heavy-ion collisions / J. Bloczynski, X.-G. Huang, X. Zhang et al. // Physics Letters B. 2013. Vol. 718, no. 4-5. P. 1529–1535.
 71. Sauter F. Uber das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs // Zeitschrift fur Physik. 1931. no. 82. P. 742–764.
 72. Lei Z., Hu B., Zhao X. Pair production in strong electric fields // arXiv preprint arXiv:2201.01746. 2022.
 73. Hayashinaka T., Fujita T., Yokoyama J. Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space // JCAP. 2016. Vol. 07. P. 010.
 74. Stahl C., Xue S.-S. Schwinger effect and backreaction in de Sitter spacetime // Physics Letters B. 2016. Vol. 760. P. 288–292.
 75. Stahl C., Strobel E., Xue S.-S. Fermionic current and Schwinger effect in de Sitter spacetime // Physical Review D. 2016. Vol. 93, no. 2. P. 025004.
 76. Samantray P., Singh S. Schwinger pair production in hot anti-de Sitter space // Physical Review D. 2019. Vol. 99, no. 8. P. 085006.
 77. Cai R.-G., Kim S. P. One-Loop Effective Action and Schwinger Effect in (Anti-) de Sitter Space // JHEP. 2014. Vol. 09. P. 072.
 78. Kim S. P., Hwang W.-Y. P., Wang T.-C. Schwinger mechanism in global dS_2 and AdS_2 space // Chinese Journal of Physics. 2022. Vol. 77. P. 2073–2077.
 79. Brezin E., Itzykson C. Pair production in vacuum by an alternating field // Physical Review D. 1970. Vol. 2. P. 1191–1199.
 80. Mohamedsedik M., Li L.-J., Xie B. Schwinger pair production in inhomogeneous electric fields with symmetrical frequency chirp // Physical Review D. 2021. Vol. 104, no. 1. P. 016009.

81. Torgrimsson G., Oertel J., Schützhold R. Doubly assisted Sauter-Schwinger effect // Physical Review D. 2016. Vol. 94, no. 6. P. 065035.
82. Orthaber M., Hebenstreit F., Alkofer R. Momentum Spectra for Dynamically Assisted Schwinger Pair Production // Physics Letters B. 2011. Vol. 698. P. 80–85.
83. Copinger P., Fukushima K. Spatially Assisted Schwinger Mechanism and Magnetic Catalysis // Physical Review Letters. 2016. Vol. 117, no. 8. P. 081603. [Erratum: Phys.Rev.Lett. 118, 099903 (2017)].
84. Torgrimsson G., Schneider C., Schützhold R. Sauter-Schwinger pair creation dynamically assisted by a plane wave // Physical Review D. 2018. Vol. 97, no. 9. P. 096004.
85. Torgrimsson G. Thermally versus dynamically assisted Schwinger pair production // Physical Review D. 2019. Vol. 99, no. 9. P. 096007.
86. Domcke V., Ema Y., Mukaida K. Axion assisted Schwinger effect // JHEP. 2021. Vol. 05. P. 001.
87. Groote S., Korner J., Pivovarov A. Configuration space based recurrence relations for sunset - type diagrams // European Physical Journal C. 1999. Vol. 11. P. 279–292.
88. Groote S., Korner J., Pivovarov A. Laurent series expansion of sunrise type diagrams using configuration space techniques // European Physical Journal C. 2004. Vol. 36. P. 471–482.
89. Groote S., Korner J., Pivovarov A. On the evaluation of a certain class of Feynman diagrams in x-space: Sunrise-type topologies at any loop order // Annals Phys. 2007. Vol. 322. P. 2374–2445.
90. Groote S., Korner J., Pivovarov A. A Numerical Test of Differential Equations for One- and Two-Loop sunrise Diagrams using Configuration Space Techniques // European Physical Journal C. 2012. Vol. 72. P. 2085.
91. Chetyrkin K., Tkachov F. Integration by parts: the algorithm to calculate β -functions in 4 loops // Nuclear Physics B. 1981. Vol. 192, no. 1. P. 159–204.

92. Tkachov F. A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions // *Physics Letters B*. 1981. Vol. 100, no. 1. P. 65–68.
93. Broadhurst D. Three-loop on-shell charge renormalization without integration: Λ_{QED} to four loops // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. 1992. Vol. 54, no. 4. P. 599–606.
94. Groote S., Korner J. Coordinate space calculation of two- and three-loop sunrise-type diagrams, elliptic functions and truncated Bessel integral identities // *Nucl. Phys. B*. 2019. Vol. 938. P. 416–425.
95. Bollini C., Giambiagi J. Dimensional regularization in configuration space // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53. P. 5761–5764.
96. Plastino A., Rocca M. Quantum Field Theory, Feynman-, Wheeler Propagators, Dimensional Regularization in Configuration Space and Convolution of Lorentz Invariant Tempered Distributions // *J. Phys. Comm.* 2018. Vol. 2, no. 11. P. 115029.
97. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
98. Fermion propagator in a rotating environment / A. Ayala, L. Hernández, K. Raya et al. // *Physical Review D*. 2021. Vol. 103, no. 7. P. 076021.
99. Ициксон К., Зюбер Ж.Б. Квантовая теория поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 448 с.
100. Loskutov Y., Skobelev V. Nonlinear electrodynamics in a superstrong magnetic field // *Physics Letters A*. 1976. Vol. 56, no. 3. P. 151–152.
101. Weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field / T.-K. Chyi, C.-W. Hwang, W. F. Kao et al. // *Physical Review D*. 2000. Oct. Vol. 62. P. 105014. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.105014>.
102. Chodos A., Everding K., Owen D. QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field // *Physical Review D*. 1990. Oct. Vol. 42. P. 2881–2892. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.2881>.

103. Kuznetsov A., Okrugin A. The exact electron propagator in a magnetic field as the sum over Landau levels on a basis of the Dirac equation exact solutions // International Journal of Modern Physics A. 2011. Vol. 26, no. 16. P. 2725–2733.
104. Effective potential at finite temperature in a constant magnetic field: Ring diagrams in a scalar theory / A. Ayala, A. Sánchez, G. Piccinelli et al. // Physical Review D. 2005. Jan. Vol. 71. P. 023004. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.023004>.
105. Erdas A., Feldman G. Magnetic field effects on lagrangians and neutrino self-energies in the Salam-Weinberg theory in arbitrary gauges // Nuclear Physics B. 1990. Vol. 343, no. 3. P. 597 – 621. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090582X>.
106. Erdas A., Isola C. Neutrino self-energy in a magnetized medium in arbitrary ξ -gauge // Physics Letters B. 2000. Vol. 494, no. 3. P. 262 – 272. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300012077>.
107. Nikishov A. Vector boson in the constant electromagnetic field // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2001. Vol. 93, no. 2. P. 197–210.
108. Kuznetsov A., Okrugin A., Shitova A. Propagators of charged particles in an external magnetic field, expanded over Landau levels // International Journal of Modern Physics A. 2015. Vol. 30, no. 24. P. 1550140. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X15501407>.
109. Di Piazza A. Completeness and orthonormality of the Volkov states and the Volkov propagator in configuration space // Physical Review D. 2018. Vol. 97, no. 5. P. 056028.
110. Kibble L., T.W. B. Interactions of Intense Laser Beam with Electrons // Physical Review. 1964. Vol. 133. P. 705.
111. Mitter H. Quantum electrodynamics in laser fields // Electromagnetic Interactions and Field Theory. Springer, 1975. P. 397–468.
112. Ritus V. Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field // J. Sov. Laser Res. 1985. Vol. 6, no. 5.

113. Reiss H., Eberly J. Green's function in intense-field electrodynamics // *Physical Review*. 1966. Vol. 151, no. 4. P. 1058.
114. Eberly J., Reiss H. Electron self-energy in intense plane-wave field // *Physical Review*. 1966. Vol. 145, no. 4. P. 1035.
115. Lavelle M., McMullan D. Sideband mixing in intense laser backgrounds // *Physics Letters B*. 2014. Vol. 739. P. 421–424.
116. Lavelle M., McMullan D. Fermionic propagator in an intense background // *Physical Review D*. 2015. Vol. 91. P. 105022.
117. V. Baier, V. Katkov, A. Milstein et al. // *Sov. Phys. JETP*. 1976. Vol. 42. P. 400.
118. Becker W., Mitter H. Vacuum polarization in laser fields // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1975. Vol. 8, no. 10. P. 1638.
119. Baier V., Milstein A., Strakhovenko V. // *Sov. Phys. JETP*. 1976. Vol. 42. P. 961.
120. Polarization-operator approach to electron-positron pair production in combined laser and Coulomb fields / A. Milstein, C. Muller, K. Hatsagortsyan et al. // *Physical Review A*. 2006. Vol. 73, no. 6. P. 062106.
121. Elizalde E., Ferrer E., V. de la Incera. Neutrino Self-Energy and Index of Refraction in Strong Magnetic Field: A New Approach // *Annals of Physics*. 2002. Vol. 295, no. 1. P. 33 – 49. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491601962037>.
122. Elizalde E., Ferrer E., V. de la Incera. Neutrino propagation in a strongly magnetized medium // *Physical Review D*. 2004. Aug. Vol. 70. P. 043012. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.043012>.
123. Neutrino dispersion in external magnetic fields / A. Kuznetsov, N. Mikheev, G. Raffelt et al. // *Physical Review D*. 2006. Jan. Vol. 73. P. 023001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.023001>.
124. Erdas A., Lissia M. High-energy neutrino conversion into an electron-W pair in a magnetic field and its contribution to neutrino absorption //

- Physical Review D. 2003. Feb. Vol. 67. P. 033001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.033001>.
125. Bhattacharya K., Sahu S. Neutrino absorption by W production in the presence of a magnetic field // European Physics Journal C. 2009. Vol. 62. P. 481–489.
 126. Kuznetsov A., Mikheev N., Serghienko A. High energy neutrino absorption by W production in a strong magnetic field // Physics Letters B. 2010. Vol. 690, no. 4. P. 386 – 389. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310006519>.
 127. Iablokov S., Kuznetsov A. Exponential operator method for finding exact solutions of the propagator equation in the presence of a magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1390. P. 012078.
 128. Iablokov S., Kuznetsov A. Coordinate-space representation of a charged scalar particle propagator in a constant magnetic field expanded as a sum over the Landau levels // J. Phys. Conf. Ser. 2020. Vol. 1690, no. 1. P. 012087.
 129. Iablokov S., Kuznetsov A. Charged massive vector boson propagator in a constant magnetic field in arbitrary ξ -gauge obtained using the modified Fock-Schwinger method // Physical Review D. 2020. Vol. 102, no. 9. P. 096015.
 130. Iablokov S., Kuznetsov A. Position-space representation of charged particles' propagators in a constant magnetic field as an expansion over Landau levels // European Physical Journal C. 2022. Vol. 82, no. 3. P. 193.
 131. Яблоков С.Н. Построение пропагаторов модифицированным методом собственного времени Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. 2019. С. 70–71.
 132. Яблоков С.Н. Построение пропагатора заряженного векторного бозона во внешнем постоянном магнитном поле модифицированным методом Фока-Швингера // Физика, техника и технология сложных систем : тез. докл. конф. / под ред.: С. П. Зими́на, А. С. Гвоздарёва; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. 2020. С. 75–76.

133. Hall B. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction (2nd ed.). Springer, 2015.
134. Gradshteyn I., Ryzhik I. Table of Integrals, Series, and Products, 8th ed. Academic Press, 2015. URL: <https://doi.org/10.1016/c2010-0-64839-5>.
135. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003.
136. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М: Наука, 1989. 728 с.
137. Romão J., Silva J. A resource for signs and Feynman diagrams of the standard model // International Journal of Modern Physics A. 2012. Vol. 27, no. 26. P. 1230025. URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X12300256>.
138. Langacker P. The Standard Model and beyond. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017.
139. Cheng T., Li L. Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Oxford science publications. Clarendon Press, 1984.
140. Chernodub M., Gongyo S. Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics // JHEP. 2017. Vol. 01. P. 136.
141. Analogy between rotation and density for Dirac fermions in a magnetic field / H.-L. Chen, K. Fukushima, X.-G. Huang et al. // Physical Review D. 2016. Vol. 93, no. 10. P. 104052.
142. Ambrus V., Winstanley E. Rotating fermions inside a cylindrical boundary // Physical Review D. 2016. Vol. 93, no. 10. P. 104014.
143. Ambrus V., Winstanley E. Rotating quantum states // Physics Letters B. 2014. Vol. 734. P. 296–301.
144. Jiang Y., Liao J. Pairing Phase Transitions of Matter under Rotation // Physical Review Letters. 2016. Vol. 117, no. 19. P. 192302.
145. Loewe M., Marquez F., Zamora R. The cylindrical δ -potential and the Dirac equation // Journal of Physics A. 2012. Vol. 45. P. 465303.

146. Ley-Koo E., Wang R. // *Rev. Mex. Phys.* 1987. Vol. 34. P. 296.
147. On analytic formulas of Feynman propagators in position space / H.-H. Zhang, K.-X. Feng, S.-W. Qiu et al. // *Chinese Physics C.* 2010. Vol. 34. P. 1576–1582.
148. Temme N. Uniform asymptotic expansions of integrals: a selection of problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1995. Vol. 65, no. 1-3. P. 395–417.
149. Berry M., McDonald K. Exact and geometrical optics energy trajectories in twisted beams // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* 2008. Vol. 10, no. 3. P. 035005.
150. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М: Наука, 1989. 767 с.