

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН)

На правах рукописи

Фархтдинов Булат Ринатович

**Процессы многочастичного рождения в  
квантовой теории поля**

1.3.3 – Теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
кандидат физ.-мат. наук  
Демидов Сергей Владимирович

Москва – 2023

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Классически разрешённая область процессов многочастичного рождения</b> . . . . .	19
1.1. Введение к первой главе . . . . .	19
1.2. Постановка задачи рассеяния . . . . .	21
1.3. Алгоритм поиска границы классически разрешённой области . . . . .	24
1.4. Классическое рассеяние: численные результаты . . . . .	28
1.5. Выводы к первой главе . . . . .	48
<b>Глава 2. Численная реализация метода сингулярных решений</b> . . . . .	50
2.1. Введение ко второй главе . . . . .	50
2.2. Метод сингулярных решений . . . . .	51
2.3. Сингулярная структура седловых решений . . . . .	57
2.4. Предел $J \rightarrow 0$ . . . . .	60
2.5. Численная реализация метода сингулярных решений . . . . .	63
2.6. Численный поиск сингулярных решений . . . . .	65
2.7. Выводы ко второй главе . . . . .	70
<b>Глава 3. Вероятность многочастичного рождения в скалярной теории с потенциалом <math>\lambda\phi^4</math></b> . . . . .	72
3.1. Введение к третьей главе . . . . .	72
3.2. Сравнение при малых $\lambda n$ . . . . .	73
3.3. Результаты при больших $\lambda n$ . . . . .	75
3.4. Обсуждение и выводы к третьей главе . . . . .	88
<b>Заключение</b> . . . . .	94
<b>Список литературы</b> . . . . .	96

Список иллюстративного материала . . . . .	106
Приложение А. Формулировка граничной задачи на пространственно-временной решётке . . . . .	113
А.1. Действие, энергия и уравнения на решётке . . . . .	113
А.2. Граничные условия на решётке . . . . .	116

# Введение

**Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Квантовая теория поля является основным инструментом теоретического описания микромира. На её языке сформулирована Стандартная Модель физики элементарных частиц, которая включает все известные на данный момент типы взаимодействий, за исключением гравитационного. Несмотря на имеющиеся указания на существование физики за её пределами, Стандартная Модель успешно описывает подавляющее большинство экспериментальных данных. Этот успех в значительной степени обусловлен применимостью основного метода для вычисления амплитуд рассеяния и распада частиц в квантовой теории поля — теории возмущений. Известно, однако, что в ряде случаев этот метод оказывается неприменимым даже в режиме слабой связи. Примером такой ситуации является многочастичное рождение в скалярных теориях поля с малой константой связи, которое и является предметом изучения в настоящей диссертации.

Впервые на необходимость выхода за рамки теории возмущений для описания многочастичного рождения было указано при рассмотрении инстантонных процессов в электрослабой теории. Их вероятности являются экспоненциально подавленными при низких энергиях. Однако, если конечное состояние содержит большое число бозонов  $n$ , подавление уменьшается [1; 2] (обзоры представлены, например, в работах [3; 4]) за счет того, что вероятности растут с увеличением  $n$ , как  $n!$ . Позже подобный факториальный рост был обнаружен для процессов рождения большого числа бозонов (многочастичное рождение) в слабо связанных скалярных теориях поля. Так, в теории скалярного поля с действием

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right], \quad (1)$$

амплитуда  $1 \rightarrow n$  распада виртуальной частицы в  $n$  реальных покоящихся

частиц

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow n} = \left\langle n, E = nm \left| \hat{\mathcal{S}} \hat{\phi} \right| 0 \right\rangle, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathcal{S}}$  обозначает S-матрицу, а оператор  $\hat{\phi}$  рождает виртуальную частицу в начальном состоянии<sup>1</sup>, дается на древесном уровне следующим выражением [5–7]

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = n! \left( \frac{\lambda}{8m^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n — \text{нечётные}. \quad (3)$$

Если амплитуда слабо зависит от импульсов вблизи порога, то вероятность  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow n}(E)$  рассматриваемого процесса при энергии  $E$  можно оценить как

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow n}(E) \sim |\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}|^2 \frac{\mathcal{V}_n}{n!} \sim n! \lambda^n \varepsilon^{\frac{3n}{2}}, \quad (4)$$

где  $\mathcal{V}_n$  —  $n$ -частичный фазовый объём,  $n!$  в знаменателе учитывает тождественность частиц в конечном состоянии и

$$\varepsilon = \frac{E - mn}{n} \ll m. \quad (5)$$

Подобное поведение древесных амплитуд было обнаружено в широком классе бозонных теорий как на пороге [6; 8–11] так и вне его [12–14], и оно связано с факториальным ростом числа диаграмм Фейнмана, дающих вклад в амплитуду процесса при увеличении числа  $n$  бозонов в конечном состоянии [6; 15; 16]. Экстраполяция факториального роста вероятности (4) в область больших  $n$  противоречит унитарности. Основанные на ней аргументы, приведенные в работах [17–19], свидетельствуют о том, что при достаточно больших  $n \gtrsim \lambda^{-1}$  вероятность  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow n}(E)$  должна быть подавлена сильнее чем любая степень  $\lambda$ . Как следствие, древесное поведение многочастичных амплитуд и вероятностей вида (3) и (4) должно существенно меняться при учете петлевых поправок. В работах [20–23] были вычислены однопетлевые поправки к амплитудам многочастичного рождения на пороге для ряда скалярных теорий поля. В частности,

---

<sup>1</sup> Процесс  $1 \rightarrow n$  можно связать с физически возможным, например, добавив в теорию дополнительное фермионное поле  $\psi$ , взаимодействие Юкавы вида  $y \phi \bar{\psi} \psi$  и рассматривая многочастичное рождение  $\psi \bar{\psi} \rightarrow n \phi$  в лидирующем порядке по константе связи  $y$ .

в теории (1) однопетлевая поправка к древесной амплитуде на пороге (3) при  $1 \ll n \ll \lambda^{-1}$  имеет вид

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{1\text{-loop}} = \mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \lambda (Bn^2 + \mathcal{O}(n)) , \quad (6)$$

где  $B$  — константа, определяемая формулой ( $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + 1}$ )

$$B = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{9}{8\omega_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}}^2 - 1)(\omega_{\mathbf{k}}^2 - 4)} = \frac{3^{3/2}}{64\pi^2} \left[ i\pi - \ln(7 + 4\sqrt{3}) \right] . \quad (7)$$

Анализ многопетлевых поправок выявил больше интересных особенностей рассматриваемых амплитуд [13; 24]. Число диаграмм для  $n$ -частичного рождения в  $L$  петлях растёт как  $n^{2L}n!$  [13; 20; 21; 25]. В результате лидирующие (в каждом порядке по  $\lambda$ ) по  $n$  петлевые вклады в амплитуды представляют собой ряд по  $\lambda n^2$ , причем коэффициенты этого ряда определяются однопетлевым результатом (6). Эти вклады можно пересуммировать во всех порядках теории возмущений [13], что приводит к следующему экспоненциальному виду для амплитуды

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow n} = \mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \left( e^{B\lambda n^2} + \dots \right) , \quad (8)$$

где многоточием обозначены члены ряда с меньшими степенями  $n$  в каждом порядке по  $\lambda$ , оставшиеся после частичного суммирования. Дальнейший анализ показал, что лидирующие по  $n$  поправки к древесным амплитудам многочастичного рождения по  $\varepsilon$  (5) вблизи порога, т.е. при  $\varepsilon \ll m$ , также экспоненцируются [13]:

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n) = \mathcal{A}_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \left( e^{-\frac{5n\varepsilon}{6m}} + \dots \right) . \quad (9)$$

Эти наблюдения привели к формулировке гипотезы о том, что вероятность многочастичного рождения в режиме  $\lambda \rightarrow 0$  и фиксированных значениях  $\varepsilon$  и  $\lambda n$  имеет экспоненциальный вид [13]

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow n}(E) \propto e^{F(\lambda n, \varepsilon)/\lambda} . \quad (10)$$

Кроме того, явные вычисления, проведенные в работах [13; 24], продемонстрировали, что экспонента подавления вероятности, т.е. величина  $F(\lambda n, \varepsilon)$ , по-видимому, обладает свойством *универсальности*, т.е. она не зависит от начального

состояния при условии, что последнее содержит достаточно малое число частиц  $n_i \ll \lambda^{-1}$ . Несмотря на то, что перечисленные особенности амплитуд и вероятностей процессов многочастичного рождения характерны для целого ряда скалярных теорий поля, отметим, что существуют примеры их альтернативного поведения (см., например, [22; 23; 26]).

Недавно возобновившийся интерес к изучению многочастичного рассеяния стимулировал ряд связанных исследований в квантовой механике [27; 28]. В этих работах рассматривалась модель ангармонического осциллятора  $x(t)$  —  $(0+1)$ -мерный аналог теории скалярного поля (1). Аналогами многочастичных амплитуд в рассмотренной модели являются матричные элементы оператора координаты между вакуумом и состоянием с квазиклассически большой энергией  $E$  вида  $\langle E | \hat{x}^l | 0 \rangle$ . Уже в работах [29; 30] было продемонстрировано, что абсолютные значения таких матричных элементов экспоненциально убывают с ростом разницы энергий этих состояний. В работах [27; 28] было показано, что ряд теории возмущений для этих матричных элементов экспоненцируется, а возникающая экспонента подавления отрицательна и обладает свойством универсальности — она не зависит от  $l$  при достаточно малых  $l$  и достаточно больших  $E$ . Приведённые квантовомеханические результаты не могут быть напрямую экстраполированы на вероятности многочастичного рождения, однако они полезны для поиска аналогий между квантовой механикой и теорией поля.

Экспоненциальная форма вероятности (10) и универсальность экспоненты подавления позволяют предположить, что многочастичное рождение может быть описано квазиклассическими методами при  $\lambda \rightarrow 0$  и фиксированных  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . Этот режим соответствует слабой связи и большим числам заполнения в конечном состоянии. В литературе обсуждались различные варианты применения квазиклассического подхода к изучению многочастичного рождения [31—36]. Все они в той или иной степени используют решения классических уравнений поля. Так, в одном из предложенных подходов предлагается рассмотреть вместо процессов рассеяния “мало”  $\rightarrow$  “много” процессы “много”  $\rightarrow$  “много” и

изучить классический аналог квантового рассеяния — рассеяние классических волновых пакетов [36]. Свободные волны в квантовой теории соответствуют когерентным состояниям с некоторыми средними значениями энергии  $E$  и числа заполнения  $n$ , причем применимость такого соответствия оправдана при  $n \gg 1$ . Классическим аналогом процесса многочастичного рассеяния  $n_i \rightarrow n_f$  при энергии  $E$  и  $n_i, n_f \gg 1$  служит рассеяние волновых пакетов с теми же характеристиками. С точки зрения квантовой теории соответствующее решение классического уравнения поля будет являться седловой точкой в интеграле по траекториям для вероятности квантового перехода. При этом, поскольку такой процесс классически разрешён, то ожидается, что эта вероятность не будет экспоненциально подавлена. Нахождение множества таких решений дает возможность найти классически разрешённую область процессов многочастичного рассеяния и, в частности, выяснить, находится ли в ней наиболее интересный класс процессов рассеяния, в которых начальное состояние содержит малое число частиц, таких как, например,  $2 \rightarrow n_f$ . Подобное исследование классических аналогов квантовых процессов было проведено при изучении ряда туннельных процессов, индуцированных столкновением частиц, в частности, распада ложного вакуума [37], процессов, нарушающих барионное число в Стандартной Модели [38; 39], а также рождения пары солитон-антисолитон в  $(1 + 1)$ -мерной теории скалярного поля [40]. В ранних исследованиях классического рассеяния волновых пакетов в теории  $\lambda\varphi^4$  не было найдено решений со значительным изменением числа заполнения при рассеянии [41]. Глава 1 настоящей диссертации посвящена детальному изучению классических процессов рассеяния и нахождению классически разрешенных областей многочастичного рассеяния в этой теории [42; 43].

Исследование классического рассеяния волновых пакетов может дать лишь указание на экспоненциальное подавление вероятности процессов многочастичного рождения, но оно не позволяет ничего сказать о величине их вероятности. Среди предложенных в литературе квазиклассических подходов для непосредственного вычисления вероятности многочастичного рождения наибольший ин-



терес представляет метод сингулярных решений Д.Т. Шона [35] (см. также недавний обзор [44]). Данный подход представляет собой теоретико-полевое обобщение метода Л.Д. Ландау квазиклассического вычисления матричных элементов в квантовой механике [45] в применении к многочастичному рождению. Метод сингулярных решений сводит вычисление квазиклассической экспоненты подавления  $F(\lambda n, \varepsilon)$ , входящей в (10), к нахождению определенного сингулярного комплекснозначного решения классического уравнения поля и вычислению классического действия на этом решении. Первые применения метода Л.Д. Ландау к нахождению вероятностей многочастичного рождения в скалярных [32] и калибровочных [34] теориях не были систематическими. В работе Д.Т. Шона [35] была выведена граничная задача, которой должна удовлетворять соответствующая сингулярная полевая конфигурация. При этом, снова сперва рассматривается многочастичное рождение из начального состояния с большим числом частиц. Вероятность такого процесса может быть вычислена квазиклассическими методами — путем нахождения седловой точки соответствующего функционального интеграла. После этого берется предел малого количества частиц в начальном состоянии и используется предположение об универсальности экспоненты подавления. В этом пределе седловое решение становится сингулярным. По своей идее данный метод близок к аналогичным квазиклассическим методам, применяемым к туннельным процессам, индуцированным столкновениями малого количества высокоэнергичных частиц [46—50]. Аналогом предположения об универсальности в этих примерах является гипотеза Рубакова-Шона-Тинякова о независимости туннельной экспоненты от начального состояния с маленьким числом частиц [51]. Метод сингулярных решений применим при  $n \gg 1$  и, в частности, в интересном случае  $n \gtrsim \lambda^{-1}$ . С его помощью в оригинальной работе [35] были восстановлены уже известные на тот момент древесный и однопетлевой вклады в экспоненту подавления вероятности многочастичного рождения на пороге в теории с действием (1). В последующих работах [52; 53] при помощи этого метода в режиме  $n \ll \lambda^{-1}$  была

получена поправка к древесной экспоненте подавления порядка  $\varepsilon^2/m^2$  вблизи порога, а также древесная экспонента при  $\varepsilon \gtrsim m$  [53; 54]. Однако, несмотря на упомянутое выше активное развитие эффективных квазиклассических методов, достоверный ответ для вероятности многочастичного рождения в режиме очень большого числа частиц  $n \gg \lambda^{-1}$  так и не был получен. Основная причина состоит в сложности даже численного нахождения решений граничной задачи квазиклассического метода Д.Т. Шона, что обусловлено, в частности, их сингулярной природой. Результаты данного диссертационного исследования, представленные в главах 2 и 3, восполняют этот пробел.

Основная часть описанных выше результатов была получена в 90-х годах прошлого века. Однако, в последнее время отмечается повышенный интерес к этой теме, что связано, в том числе, с открытием скалярного бозона Хиггса [55; 56]. Вопрос об экспоненциальном подавлении вероятности процессов многочастичного рождения был вновь поставлен в контексте гипотезы о “Хиггсовском взрыве” (от англ. — Higgspllosion), предложенной в работах [44; 57; 58]. Согласно этой гипотезе вероятность множественного рождения бозонов Хиггса в столкновениях частиц высоких энергий, которые можно будет пронаблюдать на будущих коллайдерах, не является экспоненциально подавленной. В частности, для экспоненты подавления вероятности рождения  $n$  нерелятивистских бозонов Хиггса в результате столкновения глюонов было предложено следующее выражение

$$F_{\text{Higgspllosion}} \approx \lambda n \ln \frac{\lambda n}{4} + \frac{3}{2} \lambda n \ln \frac{\varepsilon}{3\pi m} + \frac{\lambda n}{2} + 0.854 (\lambda n)^{3/2} \quad \text{при } n \leq n_*. \quad (11)$$

Здесь параметр  $m$  — масса хиггсовского бозона,  $\lambda$  — константа его самодействия, а  $n_*$  определяется из условия  $F_{\text{Higgspllosion}}(\lambda n_*) = 0$ . Важно отметить, что выражение (11) было получено аналитически в квазиклассическом приближении с использованием метода Д.Т. Шона [35], а также ряда дополнительных приближений, связанных с определенными предположениями о структуре сингулярных решений [44; 58]. Формально, оно может быть применимо в областях

значений конечного числа частиц  $n \leq n_* \sim 3.08 \lambda^{-1} \ln^2(\varepsilon/m)$ , где экспонента не положительна. При  $n \approx n_*$  вероятность процесса перестаёт быть подавленной и, поскольку вероятность не может быть экспоненциально большой, естественно ожидать, что при бóльших  $n$  поправки к уравнению (11) начинают доминировать и могут сделать теорию унитарной [57; 59]. Результат (11) как и гипотеза о “Хиггсовском взрыве” вызвали критику в ряде работ [59–61], как противоречащие самосогласованности квантовой теории. В частности, было указано на то, что они не согласуются с постулатом локальности в квантовой теории [60], а также вступают в противоречие с выводами, следующими из дисперсионных соотношений [17; 62; 63]. Остановимся подробнее на последнем аргументе. В пользу экспоненциального подавления многочастичных вероятностей при произвольных значениях параметров говорят следующие соображения. Добавим в теорию (1) безмассовые фермионы со взаимодействием Юкавы  $y\phi\bar{\psi}\psi$  с очень малой константой связи  $y$ . Тогда дисперсионное соотношение и оптическая теорема выражают ампутированную функцию Грина  $\Pi(Q^2)$  двух  $\phi$ -операторов в терминах полного сечения аннигиляции фермионов  $\sigma_{\text{tot}}(E)$ :  $\psi\bar{\psi} \rightarrow$  “что угодно” [17],

$$\frac{d^2}{(dQ^2)^2} \Pi(Q^2) \Big|_{Q^2=0} = -\frac{8}{\pi y^2} \int \frac{dE}{E} \left(1 - \frac{m^2}{E^2}\right)^2 \sigma_{\text{tot}}(E) + O(y^2). \quad (12)$$

Интеграл в правой части сходится, потому что физическое сечение связано с вероятностью и не может быстро расти с энергией. Теперь вспомним, что стандартная теория возмущений позволяет надёжно вычислить двухточечную функцию при малых евклидовых импульсах, и все непертурбативные поправки подавлены как  $\exp(-\text{const}/\lambda)$ . Это означает, что вклады многочастичных промежуточных состояний также экспоненциально малы, а значит и сечение многочастичного рождения  $\psi\bar{\psi} \rightarrow n$ , т.к.  $\sigma_n \leq \sigma_{\text{tot}}$ . Таким образом мы приходим к выводу, что  $F \sim \lambda \ln \sigma_n < 0$  при произвольных  $n \gg 1$  и  $E$ . Едва ли можно отказаться от вышеприведённого аргумента. Например, нигилистический подход [59; 64], предполагающий полный отказ от дисперсионных соотношений, не сильно помогает: теория перестаёт быть разумной, если суммы по промежуточ-

ным состояниям расходятся. На текущий момент обсуждение этих вопросов ещё ведется [64], однако даже при ограниченной применимости формулы (11), она может ощутимо изменить феноменологию хиггсовского бозона, приводя к подавленному множественному рождению этих частиц в столкновениях частиц высоких энергий и в распадах новых тяжёлых резонансов [57; 65], см. также [66]. Для разрешения данного весьма актуального вопроса требуется развитие численных методов получения сингулярных решений, возникающих в результате применения квазиклассического метода Д.Т.Шона, и получение надежных результатов для вероятности многочастичного рождения в области больших  $n$ .

**Цели и задачи диссертационной работы:** Целью настоящей работы является изучение процессов многочастичного рождения методами классической и квантовой теории поля в приложении к теории действительного скалярного поля с потенциалом  $\lambda\phi^4$  и ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией. Она разбивается на следующие три задачи.

Во-первых, необходимо определить классически разрешённую область процессов многочастичного рассеяния  $n_i \rightarrow n_f$  при энергии  $E$  и  $n_i, n_f \gg 1$ . Эта задача решается при помощи исследования классического рассеяния волновых пакетов, имеющих полную энергию  $\lambda E$  и числа заполнения  $\lambda n_i, \lambda n_f$  в начальной и конечной полевой конфигурации, соответственно. Случаю многочастичного рождения соответствует предел  $\lambda n_i \rightarrow 0$ . В силу того, что вероятности процессов, соответствующих классически разрешённому рассеянию, не являются экспоненциально подавленными, близость границы классически разрешённой области к малым значениям  $\lambda n_i$  при фиксированных  $\lambda E$  и  $\lambda n_f$  была бы указанием на возможное отсутствие экспоненциального подавления вероятностей многочастичного рождения. И наоборот, если рассеяние “мало”  $\rightarrow$  “много” лежит глубоко в классически запрещённой области, это будет указанием на экспоненциальное подавление вероятности.

Во-вторых, необходимо разработать численный метод на основе квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона [35], позволяющий вычис-

лять вероятности многочастичного рождения. Необходимо убедиться, что построенная численная процедура воспроизводит известные результаты при малых значениях  $\lambda n$ .

В-третьих, при помощи разработанного численного метода необходимо получить вероятности многочастичного рождения в широких диапазонах параметров  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ , выяснить поведение вероятности в пределе больших  $\lambda n$ , а также изучить свойства квазиклассических решений.

### **Научная новизна.**

Все результаты, полученные в настоящей работе, являются новыми.

Проведенное численное моделирование процессов рассеяния классических волновых пакетов в теории  $\lambda\phi^4$  впервые позволило получить границы классически разрешённой области многочастичного рассеяния, а также найти классические полевые конфигурации, соответствующие максимальному изменению числа частиц. В результате данного исследования было впервые показано, что в этой теории процессы многочастичного рождения лежат глубоко в классически запрещённой области.

Впервые разработан численный алгоритм, реализующий квазиклассический метод сингулярных решений Д.Т. Шона для нахождения экспоненты подавления вероятности процессов многочастичного рождения. Разработанный численный метод позволил впервые надёжно получить вероятности многочастичного рождения для ранее не изученного широкого интервала по  $\lambda n \gtrsim 1$  и набора  $\varepsilon$  от  $0.35m$  до  $5m$  ( $m$  — масса скалярного бозона), в том числе были получены результаты в пределе  $\lambda n \rightarrow +\infty$ . Было непосредственно продемонстрировано экспоненциальное подавление вероятностей многочастичного рождения в теории  $\lambda\phi^4$  с ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Результаты исследования классического рассеяния волновых пакетов в теории  $\lambda\phi^4$  продемонстрировали, что процессы многочастичного рождения (“мало”  $\rightarrow$  “много”) лежат глубоко в классически запрещённой области. Предложен-

ная численная процедура может быть использована для установления границы классически разрешённой области многочастичного рассеяния в других моделях.

Численная реализация квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона служит мощным инструментом для исследования многочастичных процессов. Она позволяет получать вероятности этих процессов для значений  $\lambda n \gtrsim 1$  недоступных аналитическому описанию. Полученные с помощью этого метода результаты продемонстрировали экспоненциальное подавление вероятности многочастичного рождения в скалярной теории  $\lambda\phi^4$  с ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией. Также удалось найти поведение вероятности в пределе  $\lambda n \rightarrow +\infty$ . Разработанная численная реализация метода Д.Т. Шона может быть применена для изучения многочастичного рождения в других бозонных теориях и, в частности, в интересном случае теории  $\lambda\phi^4$  с нарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией, моделирующей самодействие поля бозона Хиггса Стандартной Модели.

**Методология и методы исследования.** При исследовании рассеяния классических волновых пакетов в теории с потенциалом  $\lambda\phi^4$  использовались стандартные численные методы решения уравнения поля: преобразование Фурье по пространственным переменным и метод Булирша-Штоера для решения оставшегося обыкновенного дифференциального уравнения по времени [67]. Численный поиск минимума начального числа частиц при фиксированном конечном осуществлялся при помощи стохастического варьирования полевой конфигурации и метода имитации отжига [67–69] для отбора нужных конфигураций после варьирования.

При разработке численной реализации квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона использовались аналитические свойства сингулярных решений и метод Ньютона-Рафсона [67] для решения возникающей в этом методе граничной задачи на поле. Для ускорения вычислений использовались мощности видеокарт при помощи CUDA [70]. Физические результаты восстанавливались взятием сингулярного предела в соответствии с тем, как это про-

исходит в методе Д.Т. Шона.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Проведено численное моделирование процессов классического рассеяния волновых пакетов в теории с потенциалом  $\lambda\phi^4$  и ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией. Соответствующие классические решения характеризуются энергией  $E$ , а также начальным  $n_i$  и конечным  $n_f$  числами частиц. Разработан алгоритм численного нахождения классически разрешённой области пространства параметров  $E$ ,  $n_i$  и  $n_f$ , найдена её граница для ряда значений начального числа частиц  $n_i$  и изучены свойства классических решений вблизи этой границы. Численно продемонстрировано существование нетривиального минимального начального числа частиц  $n_i$  при фиксированных  $E$  и  $n_f$ , причём  $n_i \sim n_f$ , что указывает на экспоненциальное подавление процессов многочастичного рождения в столкновениях малого числа частиц.
2. Разработан и реализован численный алгоритм, позволяющий находить вероятности многочастичного рождения для произвольных энергии и числа частиц конечного состояния с помощью квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона в скалярных теориях поля.
3. Вычислена экспонента подавления вероятности многочастичного рождения в теории с потенциалом  $\lambda\phi^4$  и ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией для числа частиц в конечном состоянии  $n \gtrsim \lambda^{-1}$ . Показано, что процессы многочастичного рождения в этой теории остаются экспоненциально подавленными при произвольно больших  $n$  и фиксированной средней кинетической энергии на частицу. Численно получена асимптотика экспоненты подавления при  $\lambda n \rightarrow +\infty$ .

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных результатов обоснована использованием стандартных численных методов и методов теории поля, а также их сравнением с уже известными резуль-

татами.

Публикации [42; 71; 72], подготовленные по результатам, полученным в настоящей диссертационном исследовании, были опубликованы в международных изданиях, где прошли процедуру рецензирования.

Результаты работы докладывались на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. Международная конференция-конкурс молодых физиков, ФИАН, Москва. 5 марта 2018 г.
2. Физика элементарных частиц и космология 2018, ФИАН, Москва. 9 – 10 апреля 2018 г.
3. 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, МФТИ, Долгопрудный. 19 - 25 ноября 2018 г.
4. 43rd IMPRS Workshop, Общество Макса Планка, Мюнхен. 20 марта 2019 г.
5. Young scientists forum of Moscow International School of Physics 2020, Воронеж. 3-9 марта 2020 г.
6. 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Google Meet. 23-29 ноября 2020 г.
7. X Межинститутская молодежная конференция Физика элементарных частиц и космология 2021, Zoom. 20 апреля 2021 г.
8. International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology, ОИЯИ, Дубна. 18-21 июля 2022 г.

Также по материалам диссертации были сделаны доклады на научных семинарах в Институте ядерных исследований РАН, Университете Южной Каролины, Московском физико-техническом институте и в Институте теоретиче-



ской и математической физики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

**Публикации.** По итогам исследования были опубликованы следующие работы

- Demidov S. V., Farkhtdinov B. R. Numerical study of multiparticle scattering in  $\lambda\phi^4$  theory // JHEP. — 2018. — Т. 11. — С. 068.
- Demidov S. V., Farkhtdinov B. R., Levkov D. G. Numerical study of multiparticle production in  $\phi^4$  theory: comparison with analytic results // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2021. — Т. 114. — С. 723.
- Demidov S. V., Farkhtdinov B. R., Levkov D. G. Suppression exponent for multiparticle production in  $\lambda\phi^4$  theory // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 205.

также были опубликованы труды конференций

- Demidov S. V., Farkhtdinov B. R. Constraints on multiparticle production in scalar field theory from classical simulations // EPJ Web Conf. / под ред. V. E. Volkova [и др.]. — 2018. — Т. 191. — С. 02021.
- Демидов С.В., Фархтдинов Б.Р. Многочастичное рождение в теории скалярного поля // Физическое образование в вузах. — 2018. — Т.24 — С.109-110.
- Фархтдинов Б.Р. Многочастичное рождение в теории скалярного поля // Проблемы современной физики-2016. Труды 59-й научной конференции МФТИ. — 2016. — С.136-138.

**Личный вклад автора.** Все результаты, представленные в диссертации, получены лично автором либо при его непосредственном участии.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. В Главе 1 описывается численное

исследование классически разрешённой области для процессов многочастичного рассеяния в теории с потенциалом  $\lambda\phi^4$ . В Главе 2 дается описание разработанного численного алгоритма, позволяющего вычислить вероятности многочастичного рождения с помощью квазиклассического метода сингулярных решений. В Главе 3 детально описываются результаты для экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения в теории с потенциалом  $\lambda\phi^4$  и ненарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией в широком диапазоне значений  $\lambda n$  и средней кинетической энергии  $\varepsilon$ , полученные с помощью разработанного численного алгоритма. В частности обсуждаются пределы  $\lambda n \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . В Приложении А приведены детали численной реализации метода сингулярных решений, описанного в Главе 2. Объём текста составляет 118 страниц, включает в себя 32 рисунка. В списке литературы 77 наименований.

# Глава 1

## Классически разрешённая область процессов многочастичного рождения

### 1.1. Введение к первой главе

В первой главе диссертации процессы многочастичного рождения в теории скалярного поля с действием (1) изучаются методами классической теории поля. Для этого мы рассматриваем классический аналог многочастичного рассеяния  $n_i \rightarrow n_f$  — рассеяние волновых пакетов, которое описывается решениями классического уравнения движения. Предполагая, что эти решения линеаризуются при  $t \rightarrow \pm\infty$ , соответствующие начальные и конечные полевые конфигурации могут быть сопоставлены когерентным состояниям квантовой теории, имеющим средние значения энергии  $E$  и числа частиц  $n_i$  и  $n_f$ . Процессы, которые описываются такими решениями, составляют классически разрешённую область в пространстве  $(E, n_i, n_f)$ , и их вероятности не являются экспоненциально подавленными. Для некоторых фиксированных значений энергии  $E_*$  и конечного числа частиц  $n_f$  можно попытаться минимизировать начальное число частиц  $n_i$ , оставаясь в классически разрешённой области. Если минимум доходит до области  $n_i \ll \lambda^{-1}$  при какой-то энергии, то ожидается, что вероятности процессов при энергиях выше неё не будут экспоненциально подавлены [36]. Напротив, существование нетривиального минимума при больших значениях  $n_i^{\min} \sim \lambda^{-1}$  будет аргументом в пользу экспоненциального подавления процессов рассеяния  $n_i \rightarrow n_f$  для  $n_i < n_i^{\min}$ , в том числе и процессов многочастичного рождения.

Таким образом, данная глава посвящена поиску классических решений в теории с действием (1), описывающих рассеяние волн с максимальным изменением числа частиц. Для получения классически разрешённой области в про-

странстве параметров  $(E, n_i, n_f)$  мы использовали оптимизацию начальной полевой конфигурации с помощью метода стохастического варьирования и метода имитации отжига [67; 68]. Мы ограничиваемся рассмотрением сферически симметричных полевых конфигураций. Как обсуждалось во Введении, в силу предположения об универсальности ожидается, что экспонента подавления вероятности многочастичного рождения не зависит от конкретного вида начального состояния при  $n_i \ll \lambda^{-1}$ . Поэтому мы можем ожидать, что вывод об экспоненциальном подавлении многочастичного рождения можно сделать на основании рассмотрения рассеяния сферически симметричных волновых пакетов. С другой стороны, сферическая редукция сводит изначальную  $(3+1)$ -мерную задачу к  $(1+1)$ -мерной и упрощает вычисления. Также оказалось удобнее фиксировать не конечное число частиц  $n_f$ , а начальное  $n_i$  и искать минимум  $n_f$ . Этот подход эквивалентен фиксации конечного числа частиц и поиску минимума для начального в силу того, что классическое уравнение поля инвариантно относительно отражения времени  $t \rightarrow -t$ . Таким образом, если существует классическое решение, описывающее рассеяние  $n_i \rightarrow n_f$ , всегда можно построить второе решение, соответствующее  $n_f \rightarrow n_i$ , эволюционируя первое решение обратно во времени. Для дальнейшего будет удобно переопределить поле  $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{\lambda}$  и перейти в переопределённом действии к безразмерным величинам для координат  $x^\mu \rightarrow t^{-1}x^\mu$  и поля  $\phi \rightarrow t\phi$

$$S = \frac{1}{2\lambda} \int d^4x \left[ (\partial_\mu \phi)^2 - \phi^2 - \phi^4/2 \right]. \quad (1.1)$$

Таким образом *все размерные величины будут измеряться в соответствующих размерности степенях  $t$* , что будет использовано на протяжении текущей главы. В контексте квазиклассики становится более понятным выбор вида действия (1.1) — константа связи выступает здесь квазиклассическим параметром подобно  $\hbar$  в квантовой механике. При этом энергия, полученная из теоремы Нётер для такого действия, тоже будет иметь явный множитель  $\lambda^{-1}$ . То же самое будет верно и для числа частиц. Этот явный учёт квазиклассического фактора

позволит легко зафиксировать  $\lambda n$  и  $\varepsilon$  (5).

Остальная часть главы имеет следующую структуру. Раздел 1.2 посвящён обсуждению постановки задачи рассеяния. В Разделе 1.3 описывается численный поиск экстремумов  $n_f$ . Наконец, в Разделе 1.4 приведены полученные численные результаты, а Раздел 1.5 содержит выводы к Главе 1.

## 1.2. Постановка задачи рассеяния

Как обсуждалось выше, мы ограничиваемся рассмотрением только сферически симметричных полевых конфигураций. В этом случае удобно переписать изначальную теорию (1.1), введя новое поле  $\chi$ :

$$\chi(r, t) = r\phi(r, t), \quad (1.2)$$

что приводит рассмотренную теорию к  $(1 + 1)$ -мерной модели с действием

$$S = \frac{2\pi}{\lambda} \int dt dr \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 - \chi^2 - \frac{\chi^4}{2r^2} \right]. \quad (1.3)$$

Отметим, что в такой форме член взаимодействия явно зависит от пространственной координаты, а поле  $\chi$  в точке  $r = 0$  удовлетворяет условию  $\chi(0, t) = 0$ , если  $\phi(r, t)$  регулярно в этой точке. Наличие отрицательной степени  $r$  в знаменателе члена взаимодействия  $\propto \chi^4$  показывает, что при достаточно больших  $r$  решение будет находиться в линейном режиме. Действию (1.3) соответствует уравнение движения

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \chi + \frac{\chi^3}{r^2} = 0, \quad (1.4)$$

а функционал энергии даётся формулой

$$E = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{+\infty} dr \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 + \chi^2 + \frac{\chi^4}{2r^2} \right]. \quad (1.5)$$

В дальнейшем мы будем решать уравнение (1.4) численно. Для этого мы ограничиваем множество значений радиальной координаты  $r$  конечным интервалом

$[0, R]$ , где  $R$  берётся достаточно большим (выбор  $R$  определяется условием линеаризации начальных и конечных волновых пакетов). В точке  $r = R$  мы накладываем отражающее граничное условие  $\partial_r \chi(R, t) = 0$ <sup>1</sup>. В этом случае поле можно разложить в ряд Фурье по пространству следующим образом

$$\chi(r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) \sqrt{\frac{2}{R}} \sin(k_n r), \quad k_n = \frac{\pi}{2R}(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

После подстановки разложения (1.6) в уравнение поля, мы получаем систему уравнений на коэффициенты  $c_n(t)$

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n + I_n = 0, \quad (1.7)$$

где  $\omega_n^2 = k_n^2 + 1$  и  $I_n$  получается из члена самодействия поля в (1.4) путём его разложения по базисным функциям

$$I_n = \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R dr \frac{\chi^3(r, t)}{r^2} \sin(k_n r), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

Энергия поля (1.5) в терминах  $c_n(t)$  записывается как

$$E = \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \dot{c}_n^2 + \omega_n^2 c_n^2 + \frac{1}{2} c_n I_n \right]. \quad (1.9)$$

Для того, чтобы можно было поставить задачу рассеяния, нужно, чтобы решение уравнения поля на бесконечно удалённых временах находилось в линейном режиме, то есть описывалось линейным уравнением поля. Этого можно добиться, локализовав начальный и конечный волновые пакеты в области достаточно больших  $r$ , что приведёт к подавлению взаимодействия  $\propto r^{-2}$ , см. уравнение (1.4). В линейном режиме Фурье компоненты  $c_n(t)$  могут быть выражены через положительно и отрицательно частотные компоненты следующим

---

<sup>1</sup> Строго говоря, это условие совпадает с отражающим для  $\phi$  только для бесконечно большого  $R$ . Значение  $R$  бралось достаточно большим, чтобы данные были не чувствительны к этим различиям. В главах 2 и 3 при решении классического уравнения использовалось отражающее условие на поле  $\phi$ .

образом

$$c_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^* e^{i\omega_n t}), \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \quad (1.10)$$

$$c_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (b_n e^{-i\omega_n t} + b_n^* e^{i\omega_n t}), \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (1.11)$$

где использовалась действительность  $c_n(t)$ . Применяя эти разложения можно получить следующее выражение для энергии

$$E = \frac{4\pi}{\lambda} \sum_n \omega_n |a_n|^2 = \frac{4\pi}{\lambda} \sum_n \omega_n |b_n|^2, \quad (1.12)$$

здесь  $|a_n|^2$  и  $|b_n|^2$  можно трактовать как (с точностью до множителя) числа заполнения в начальном и конечном состоянии в  $n$ -ой Фурье компоненте. Также можно определить полные числа заполнения начальных и конечных волновых пакетов как

$$n_i = \frac{4\pi}{\lambda} \sum_n |a_n|^2, \quad n_f = \frac{4\pi}{\lambda} \sum_n |b_n|^2. \quad (1.13)$$

Эти величины не изменяются при линейной эволюции. С точки зрения квантовой теории поля, рассеяние волновых пакетов с граничными условиями (1.10) и (1.11) можно трактовать как седловую траекторию в функциональном интеграле, описывающем переход между двумя когерентными состояниями. Энергия (1.12) и полные числа заполнения (1.13) решения при  $t \rightarrow \pm\infty$  будут в таком случае соответствовать средним энергии и числам частиц когерентных состояний, между которыми происходит переход.

Из-за использования сферически симметричного анзаца (1.2), в выражениях для действия, энергии и числа частиц возникает множитель  $4\pi/\lambda$ . По этой причине, в данной главе мы будем использовать перемасштабированные величины

$$\tilde{E} = \frac{\lambda E}{4\pi}, \quad \tilde{N}_{i,f} = \frac{\lambda n_{i,f}}{4\pi}. \quad (1.14)$$

Для численного нахождения решения классического уравнения (1.4) мы заменим ряд Фурье (1.6) конечной суммой с максимальным значением  $n = N_r$

и решаем систему уравнений (1.7) с использованием метода Булирша-Штотера [67]. Часть результатов была перепроверена с помощью метода Рунге-Кутты [67] четвёртого порядка с очень малым шагом по времени. Для построения пространственного профиля решения и вычислений, использующих его (см. например (1.8)), мы использовали равномерную решётку по переменной  $r = \{r_i\}$ , где  $r_i = i \cdot \Delta r$ ,  $\Delta r = R/(N_r - 1)$ ,  $i = 0, \dots, N_r - 1$ . Для оценки численной ошибки, конечные результаты были получены для нескольких значений  $R = 20, 30$  и  $50$  и  $N_r = 400, 600$  и  $1000$ .

### 1.3. Алгоритм поиска границы классически разрешённой области

Исходя из постановки задачи рассеяния, описанной выше, интересующие нас решения имеют следующий вид: начальный сходящийся сферический волновой пакет прилетает в область взаимодействия (окрестность точки  $r = 0$ ), где отражается, образуя расходящийся конечный волновой пакет. Каждое такое решение характеризуется своими параметрами  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{N}_i$  и  $\tilde{N}_f$ . Для поиска границы классически разрешённой области мы ищем такие решения, которые максимизируют разность  $|\tilde{N}_i - \tilde{N}_f|$  при данной энергии  $\tilde{E}$ . В дальнейшем мы будем фиксировать  $\tilde{N}_i$  и  $\tilde{E}$  и искать максимум  $|\tilde{N}_i - \tilde{N}_f|$ . Как уже упоминалось ранее, такая постановка задачи связана с поиском максимума изменения числа частиц с фиксированным  $\tilde{N}_f$  симметрией относительно обращения времени.

Мы будем задавать начальную полевою конфигурацию волновым пакетом, локализованным на некотором пространственном интервале  $[r_1, r_2]$  вдали от области взаимодействия и распространяющимся в направлении  $r = 0$ . В качестве первого шага внутри выбранного интервала задаётся следующая полевая кон-



фигурация

$$\chi(r) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{i_2-i_1} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_n}} f_n \sin\left(\tilde{k}_n(r-r_1)\right), & r \in [r_1, r_2] \\ 0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь  $\tilde{k}_n = \pi n / (r_2 - r_1)$ ,  $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\tilde{k}_n^2 + 1}$ ,  $n = 1, \dots, i_2 - i_1$  ( $i_1$  и  $i_2$  — индексы  $r_1$  и  $r_2$  на пространственной решётке соответственно) и  $f_n$  выступают в роли коэффициентов обрезанного ряда Фурье. По построению, конфигурация (1.15) обращается в ноль на границах интервала  $[r_1; r_2]$ . Однако на его границах у функции (1.15) имеется разрыв производной по  $r$ , который может приводить к нежелательным артефактам при численном решении уравнения поля. Для исправления этой ситуации использовалось сглаживание начальной конфигурации (1.15) на границах при помощи умножения на вспомогательную функцию

$$\left[ \exp\left(\frac{r_1 + d - r}{a}\right) + 1 \right]^{-1} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{r_2 - d - r}{a}\right) + 1 \right]^{-1}, \quad (1.16)$$

где  $a$  и  $d$  — некоторые параметры, выбранные следующим образом<sup>2</sup>:  $d = 0.2$  и  $a = 0.1$ . После этой процедуры вычисляются коэффициенты ряда Фурье  $\tilde{f}_n$  (см. (1.15)) для сглаженной конфигурации, которая в дальнейшем используется как начальная. Её линейная эволюция по времени в начальный момент  $t = t_i$ , которая приводит к волновому пакету, распространяющемуся в направлении  $r = 0$ , задаётся выражением

$$\chi_i(t, r) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{i_2-i_1} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_n}} \tilde{f}_n \sin\left(\tilde{k}_n(r-r_1) + \tilde{\omega}_n(t-t_i)\right), & r \in [r_1, r_2], \\ 0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (1.17)$$

Таким образом начальная полевая конфигурация полностью определяется коэффициентами ряда Фурье  $\tilde{f}_n$ .

Для полученной начальной конфигурации вычисляется начальное число частиц  $\tilde{N}_i$  и энергия  $\tilde{E}$  при помощи формул (1.9), (1.10), (1.12) и (1.13) с учётом (1.14). В дальнейшем нам понадобится строить начальные конфигурации

---

<sup>2</sup> Была сделана проверка, что результат для границы классически разрешённой области слабо зависит от конкретного выбора сглаживающей функции.

фиксированным начальным числом частиц  $\tilde{N}_i^*$ . Это достигается умножением решения вида (1.17) на множитель  $(\tilde{N}_i^*/\tilde{N}_i)^{1/2}$ . Для нахождения границы классически разрешённой области требуется найти классические решения, обеспечивающие наиболее сильное изменение числа частиц в результате рассеяния волновых пакетов при данной энергии  $\tilde{E}$ . В силу того, что мы решаем начальную задачу, мы фиксируем начальное число частиц  $\tilde{N}_i$  и ищем глобальный максимум или минимум конечного числа частиц  $\tilde{N}_f$ , варьируя коэффициенты  $f_n$  входящие в (1.15). Конечное число частиц  $\tilde{N}_f$  является сложной нелинейной функцией от переменных  $f_n$ , поэтому может иметь и, как будет показано далее, имеет не только глобальные, но и локальные экстремумы. Обычные градиентные методы поиска минимума в таком случае могут не дать желаемого результата, “застряв” в одном из локальных экстремумов. Для того, чтобы избежать подобной ситуации, мы используем стохастическую вариацию переменных  $f_n$  вместе с методом имитации отжига, см. [67–69]. А именно, строится ансамбль классических решений уравнения поля, имеющих фиксированное начальное число частиц, причём каждое решение входит в ансамбль с вероятностью

$$p \propto e^{-\mathcal{F}}, \quad (1.18)$$

где функционал в экспоненте выбирается в виде

$$\mathcal{F} = \beta \left( \tilde{N}_f + \xi(\tilde{E} - \tilde{E}_*)^2 \right). \quad (1.19)$$

Если взять достаточно большие положительные числа  $\beta$  и  $\xi$ , в ансамбле наиболее вероятными будут решения с наименьшим  $\mathcal{F}$ , то есть решения с наименьшим возможным  $\tilde{N}_f$  и с энергией, близкой к  $\tilde{E}_*$ . Для получения ансамбля решений с наибольшими значениями  $\tilde{N}_f$  и энергией, близкой к  $\tilde{E}_*$ , оба параметра  $\beta$ ,  $\xi$  должны быть выбраны отрицательными.

Для численного моделирования ансамбля (1.18) мы использовали алгоритм Метрополиса [68]. В качестве первого шага берётся начальная конфигурация (1.15) со случайным набором  $f_n$ , которая после сглаживания и нормировки

имеет фиксированное значение  $\tilde{N}_i$ . Соответствующее решение будет иметь некоторые значения энергии  $\tilde{E}$  и конечного числа частиц  $\tilde{N}_f$ , причём последнее находится после решения начальной задачи для уравнения поля, как было описано в Разделе 1.2. Далее случайным образом выбираются несколько переменных  $f_n$  и их значения изменяются на случайную малую величину  $f_n \rightarrow f'_n = f_n + \Delta f_n$ . После ряда тестов было обнаружено, что оптимальным с точки зрения скорости выполнения алгоритма является одновременное варьирование трёх амплитуд. Величины  $\Delta f_n$  были взяты нормально распределёнными со стандартным отклонением  $\alpha/\sqrt{\tilde{\omega}_n}$ , где  $\alpha$  — некоторое число. В наших вычислениях значение  $\alpha$  варьировалось от  $10^{-4}$  до  $10^{-1}$ . Изменённый набор амплитуд  $f'_n$  используется для построения нового решения с тем же фиксированным  $\tilde{N}_i$  и некоторой энергией  $\tilde{E}'$ . Для нового решения вычисляется конечное число частиц  $\tilde{N}'_f$ . Далее вычисляется величина  $\Delta\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}' - \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}'$  находятся согласно (1.19), используя параметры первоначального и изменённого решения. Новое решение принимается в ансамбль с вероятностью

$$p_{\text{принятия}} = \min(1, e^{-\Delta\mathcal{F}}) . \quad (1.20)$$

Если изменённое решение принимается, оно используется для следующей итерации уже как первоначальное, в противном случае операция варьирования повторяется с исходным решением. Для получения результатов мы фиксировали  $\tilde{E}_*$  и  $\tilde{N}_i$  и несколько раз запускали процедуру варьирования, стартуя с разных  $\beta$  и  $\xi$ . Каждый запуск включал в себя порядка  $10^3$ – $10^4$  итераций. Значение параметра  $\xi$  не изменялось во время выполнения алгоритма, значение же параметра  $\beta$ , который является аналогом обратной температуры в распределении (1.18), (1.19), постепенно увеличивалось относительно своего начального значения  $\beta_0$  согласно формуле

$$\beta_i = \beta_0 \log(1 + i) , \quad (1.21)$$

где  $i$  означает номер итерации. Такое изменение параметра  $\beta$  обеспечивает сходимость метода имитации отжига по мере приближения к глобальному мини-

муму [69]. Значения  $\beta_0$  и  $\xi$  брались в интервалах от 10 до  $10^6$  и от  $10^{-4}$  до 1 соответственно. Алгоритм завершался, когда относительное изменение  $\mathcal{F}$  за итерацию становилось меньше  $10^{-3}$  для одного и того же  $\xi$  и ситуация не менялась с изменением  $\alpha$  и  $\beta_0$ .

Стоит отметить, что метод стохастической вариации ранее использовался для изучения классически разрешённых сфалеронных переходов [38; 39] и классического рождения солитон-антисолитонных пар в столкновениях частиц для  $(1 + 1)$ -мерной скалярной теории поля [40], где эффективность такого способа нахождения классически разрешённой области была успешно продемонстрирована.

## 1.4. Классическое рассеяние: численные результаты

В результате применения алгоритма, описанного в предыдущем разделе, были найдены классически разрешённые области процессов многочастичного рассеяния в пространстве  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  для нескольких значений  $\tilde{N}_i = 0.1, 1, 10, 30$ . При этом использовались следующие значения  $\tilde{E}_*/\tilde{N}_i$

$$\frac{\tilde{E}_*}{\tilde{N}_i} = 1.5, 2, \dots, 9.5, 10, 11, \dots, 14, 15. \quad (1.22)$$

В результате был получен дискретный набор  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ , по которому восстанавливалась форма классически разрешённой области.

### 1.4.1. Случай $\tilde{N}_i = 1$

В этом разделе мы обсудим результаты, полученные при  $\tilde{N}_i = 1$ . Начальные решения для численного алгоритма находились случайным образом, как было описано выше, при выполнении двух требований: они находились в линейном режиме в начальный и конечный моменты времени и имели  $\tilde{N}_i = 1$ . Полученные таким образом решения обычно характеризовались малым изменением

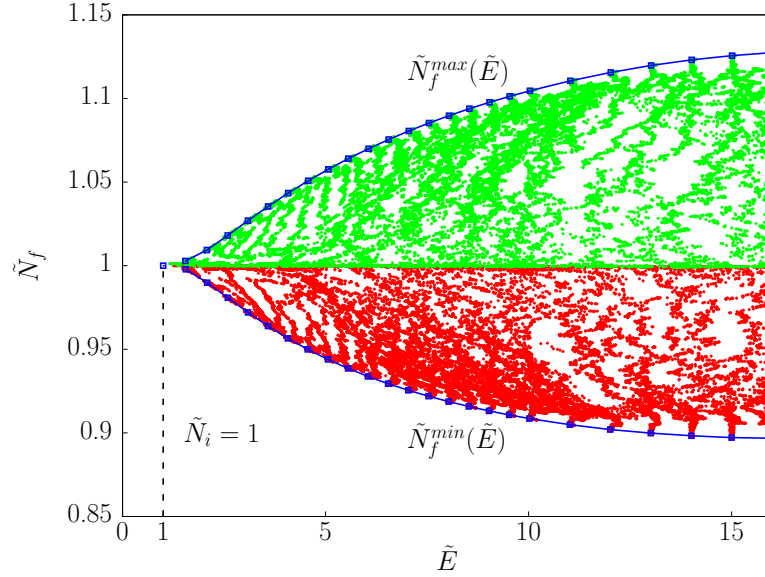


Рис. 1.1. Результат поиска классически достижимых  $\tilde{N}_f$  при фиксированном  $\tilde{N}_i = 1$  и параметрах решётки  $N_r = 400$ ,  $R = 20$ . Каждой точке на графике соответствует классическое решение, описывающее рассеяние при соответствующих  $\tilde{N}_f$  и  $\tilde{E}$ . Зелёным (светло-серым) точкам соответствуют решения, полученные при поиске максимума  $\tilde{N}_f$ , красным (тёмно-серым) — минимума. Граница (сплошная линия) построена по решениям с максимальным изменением числа частиц.

числа частиц при рассеянии и располагались вблизи линии  $\tilde{N}_f = 1$  на плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$ , см. Рис. 1.1. При первых итерациях вариационного метода мы выбирали относительно большую величину параметра варьирования  $\alpha = 0.1$  и относительно малую величину “обратной температуры”  $\beta_0$  около 10. Во время выполнения алгоритма, величина  $\beta$  изменялась в соответствии с (1.21), и происходило постепенное уменьшение конечного числа частиц. Через некоторое число итераций  $\tilde{N}_f$  практически переставало изменяться, и мы увеличивали значения  $\beta_0$  и  $\xi$  и уменьшали значение  $\alpha$ . В качестве первого решения при запуске процедуры с новыми параметрами бралось последнее решение из предыдущего набора. Процедура повторялась до достижения условия сходимости, описанного в Разделе 1.3. Полученные (принятые) решения классического уравнения поля заполняют своими параметрами область в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$ , см. Рис. 1.1. Приведённые на этом рисунке результаты получены для  $N_r = 400$  и  $R = 20$ .

Найденная область имеет гладкие границы  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ , которые соответствуют границам классически-разрешённой области в дискретизованной версии непрерывной теории. Видно, что максимальное изменение числа частиц при рассеянии  $|\tilde{N}_f - \tilde{N}_i|$  растёт с увеличением  $\tilde{E}$ , но не превосходит 12% для рассмотренного интервала по энергии.

Обсудим свойства решений, соответствующих границам  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ . Решения, с которых начинал работу метод, выбирались случайным образом. Однако решения, описывающие максимальное изменение числа частиц при фиксированных  $\tilde{N}_i$  и  $\tilde{E}$  обладают общими специфическими свойствами. На Рис. 1.2 приведены найденные численно начальные пространственные конфигурации  $\phi(r, t = 0)$  решений, соответствующих верхней границе  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  для значений энергии  $\tilde{E} = 3, 4.5, 8$  и  $11$ . Интервал задания начальной конфигурации  $[r_1, r_2]$  обозначен пунктирными линиями. Соответствующие конечные числа частиц можно оценить по Рис. 1.1. На Рис. 1.3 представлена временная эволюция решения с энергией  $\tilde{E} \approx 6.1$ , также принадлежащего верхней границе полученной области. Для наглядности на рисунке изображено поле  $\chi(t, r) = r\phi(t, r)$ . У всех граничных решений, полученных при  $\tilde{N}_i = 1$ , волновой пакет, соответствующий начальной конфигурации, имеет достаточно острый пик в его дальнейшей части, который несёт основную часть энергии волнового пакета. В дальнейшем эта часть решения будет называться “жесткой”. Эта часть решения становится всё более ярко выраженной при росте энергии, как можно заметить на Рис. 1.2. Начальный волновой пакет движется в сторону области взаимодействия, и пик увеличивается по мере приближения к области малых  $r$ , см. Рис. 1.3. Волновой пакет, соответствующий отражённой волне, имеет форму схожую с той, что была у начального волнового пакета. Жесткая часть решения последней достигает области взаимодействия и первой покидает её.

Благодаря использованной стохастической оптимизации были получены решения, обеспечивающие максимальное изменение числа частиц относительно начального  $\tilde{N}_i = 1$  при данной энергии  $\tilde{E}$ . Интересно проследить, каким обра-

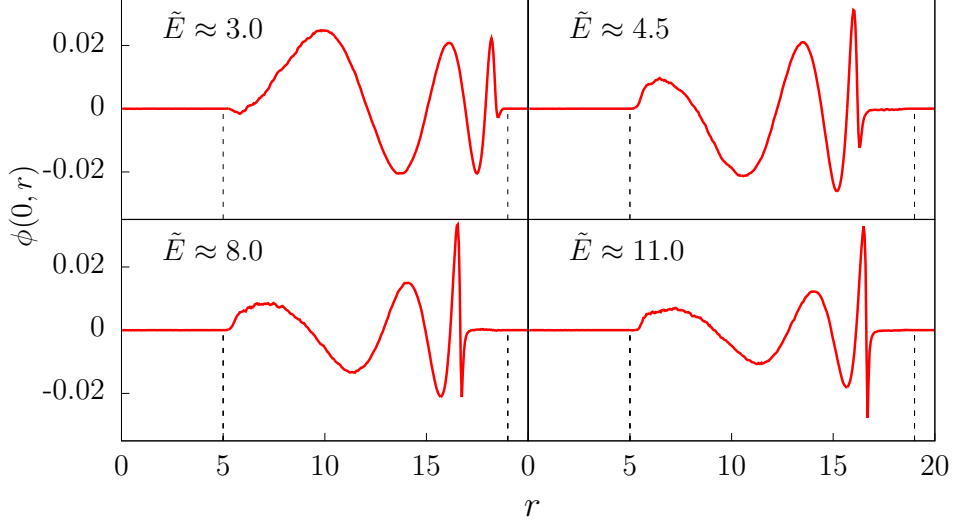


Рис. 1.2. Примеры начальных волновых пакетов  $\phi(t = 0, r)$  решений, соответствующих верхней границе  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  для набора энергий  $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$  и  $11$ . Параметры решётки:  $N_r = 400$ ,  $R = 20$ . Пунктирными линиями показаны границы пространственного интервала  $[r_1, r_2]$ .

зом происходит это изменение в решении. В предыдущем разделе были введены выражения для начального и конечного чисел частиц (1.13), которые не зависят от времени, пока поле находится в линейном режиме. Однако можно расширить это определение и ввести величину, которую мы будем называть мгновенным числом частиц  $\tilde{N}(t)$ , применяя формулы для положительных и отрицательных частотных частей для свободной теории, аналогичные (1.10) и (1.11), к полю в произвольный момент времени, и используя их в формуле, аналогичной (1.13). Полученное  $\tilde{N}(t)$  будет совпадать с  $\tilde{N}_i$  для начальной части решения и с  $\tilde{N}_f$  для конечной. Вне линейной области эта величина не может трактоваться как число частиц, однако она непрерывным образом интерполирует между двумя асимптотическими областями с учётом взаимодействия поля. На Рис. 1.4а изображено мгновенное число частиц  $\tilde{N}(t)$  для граничного решения, изображённого на Рис. 1.3. Сравнивая эволюцию поля с изменением мгновенного числа частиц, можно заметить, что основное изменение  $\tilde{N}(t)$  происходит в момент, когда жёсткая часть решения попадает в область взаимодействия. Например, отличие  $\tilde{N}(t)$

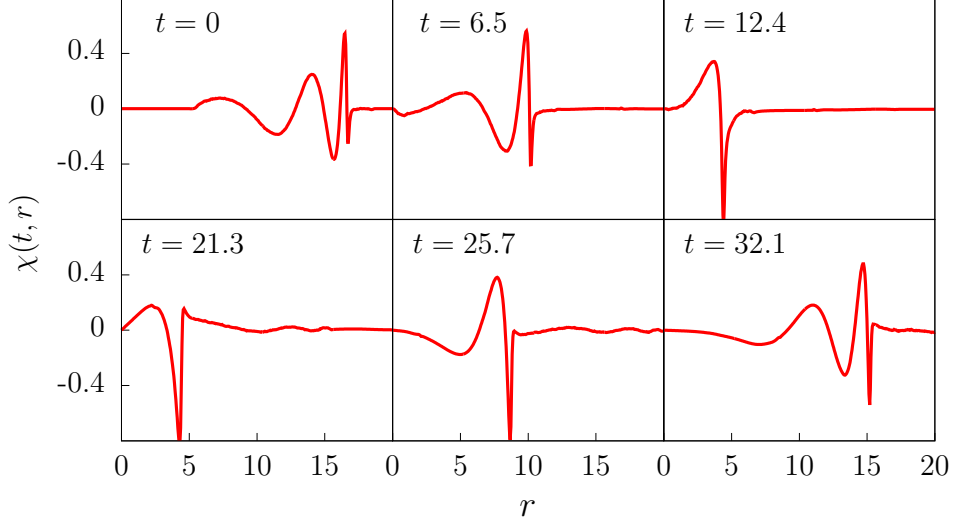


Рис. 1.3. Эволюция поля  $\chi(t, r) = r\phi(t, r)$ , соответствующего решению на верхней границе  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  при  $\tilde{E} \approx 6.1$ ;  $N_r = 400, R = 20$ .

в моменты времени  $t = 12.4$  и  $21.3$  от асимптотических значений  $\tilde{N}_i$  и  $\tilde{N}_f$  соответственно не превосходит  $5 \cdot 10^{-4}$ , что много меньше  $\tilde{N}_f - \tilde{N}_i \approx 0.072$ . Такое поведение мгновенного числа частиц указывает на слабую зависимость экстремумов функционала  $\mathcal{F}$  от того, на каком отрезке  $[r_1, r_2]$  задаётся начальная конфигурация, пока на нём уместается та часть решения, которая приводит к максимальному изменению числа частиц за рассеяние. Также численно было проверено, что неопределённость в изменении числа частиц, возникающая из-за различных способов сглаживания начальной конфигурации (см. (1.16)) не превосходит  $10^{-3}$ . По аналогии с мгновенным числом частиц  $\tilde{N}(t)$  можно ввести линейризованную энергию  $\tilde{E}_{\text{lin}}(t)$ , также полученную из выражений для частотных частей свободного поля и формулы (1.12). Её сравнение с дискретизованной точной энергией, определяемой выражением (1.9), даёт возможность количественно оценить насколько хорошо решение описывается линейным уравнением поля в момент времени  $t$ . Пример такого рода сравнения приведён на Рис. 1.4b. В этом случае полная энергия сохраняется на решении с относительной точностью  $10^{-3}$  и совпадает с линейризованной энергией в начале и в конце



рассеяния с относительной погрешностью порядка  $10^{-4}$ .

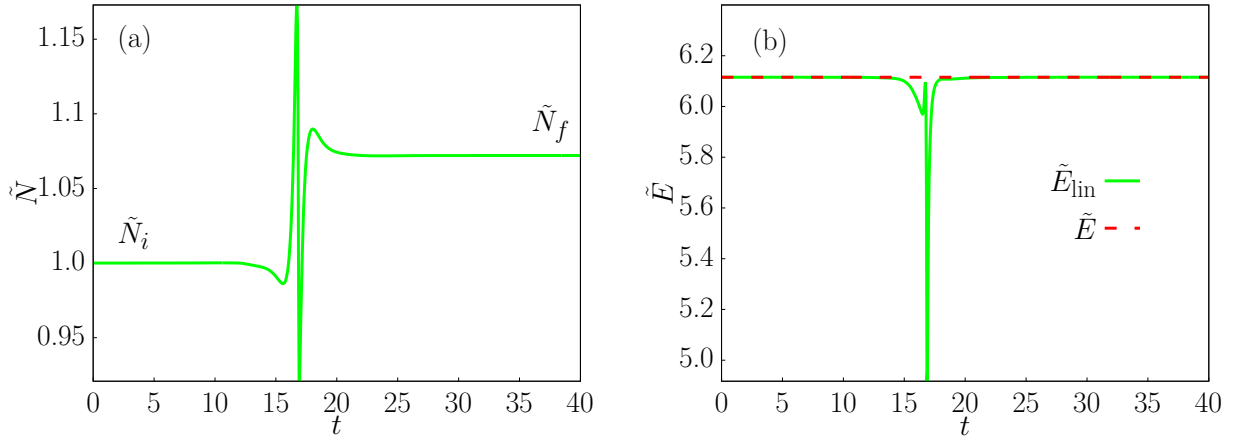


Рис. 1.4. Изменение во времени (а) мгновенного числа частиц  $\tilde{N}(t)$ , (б) линейризованной (сплошная линия) и полной (пунктирная линия) энергий для решения, изображённого на Рис. 1.3.

Нетривиальное изменение числа частиц во время рассеяния приводит к перераспределению чисел заполнения между модами различных частот. На Рис. 1.5 изображены дифференциальные распределения энергии  $\epsilon_k$  по модам в импульсном пространстве для волновых пакетов, соответствующих начальным и конечным конфигурациям решений на верхней части границы классически разрешённой области, которые были представлены выше на Рис. 1.2. Эти распределения определены следующим образом:

$$\epsilon_k = \begin{cases} \omega_n |a_n|^2 / \Delta k, & \text{для начального волнового пакета,} \\ \omega_n |b_n|^2 / \Delta k, & \text{для конечного волнового пакета,} \end{cases} \quad (1.23)$$

где  $\Delta k = \pi/R$ . На графиках наблюдается ожидаемый сдвиг распределения в сторону малых волновых векторов для конечного состояния по сравнению с начальным. Как видно, этот эффект оказывается относительно малым даже для решений, для которых изменение числа частиц максимально. Кроме того, при увеличении энергии сталкивающихся волновых пакетов, начинают заполняться моды со всё большими волновыми векторами  $k_n$ . При  $\tilde{E} \gtrsim 11$  хвост

распределения уже достигает максимально доступных на рассматриваемой решётке значений  $k_n$ . Это указывает на то, что для нахождения границы при больших энергиях уже потребуются дискретизация с меньшим шагом. С другой стороны, решения с энергией близкой к пороговой  $\tilde{E}_{\text{th}} = \tilde{N}_i$  состоят преимущественно из нерелятивистских мод и требуют больших значений  $R$  как для их пространственного разрешения, так и для того, чтобы решение успело выйти на линейный режим за время эволюции. По этой причине мы не рассматривали решения с энергией  $\tilde{E}$  меньше 1.5 на выбранной решётке ( $N_r = 400$  и  $R = 20$ ).

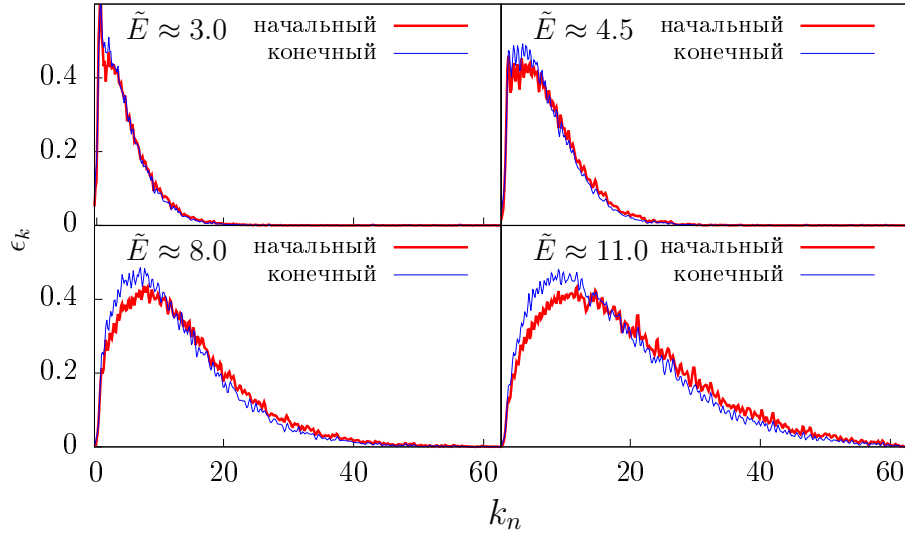


Рис. 1.5. Дифференциальные распределения энергии  $\epsilon_k$  по волновому числу для начального (толстая линия) и конечного (тонкая линия) волновых пакетов граничных решений, изображённых на Рис. 1.2.

Был проведён анализ численных неопределённостей в нахождении границы классически разрешённой области в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  для  $\tilde{N}_i = 1$  и решений на границе области. Для этого была изучена зависимость результатов от параметров решётки, то есть от пространственного обрезания  $R$  и количества узлов решётки  $N_r$ . Для сравнения с представленными выше результатами, полученными при  $R = 20$  и  $N_r = 400$ , мы повторили ту же самую численную процедуру определения границы классически разрешённой области для случая с тем же

значением  $R = 20$  и бóльшим значением  $N_r = 600$ , т.е. с меньшим шагом решётки, а также для случая бóльшего значения  $R = 30$  и  $N_r = 600$ , т.е. с тем же шагом решётки, но бóльшим размером пространственной области. Сравнение результатов представлено на Рис. 1.6, где изображены верхние и нижние части границы, полученные для трёх рассмотренных вариантов параметров решётки. Пространственный интервал, на котором задавались начальные полевые кон-

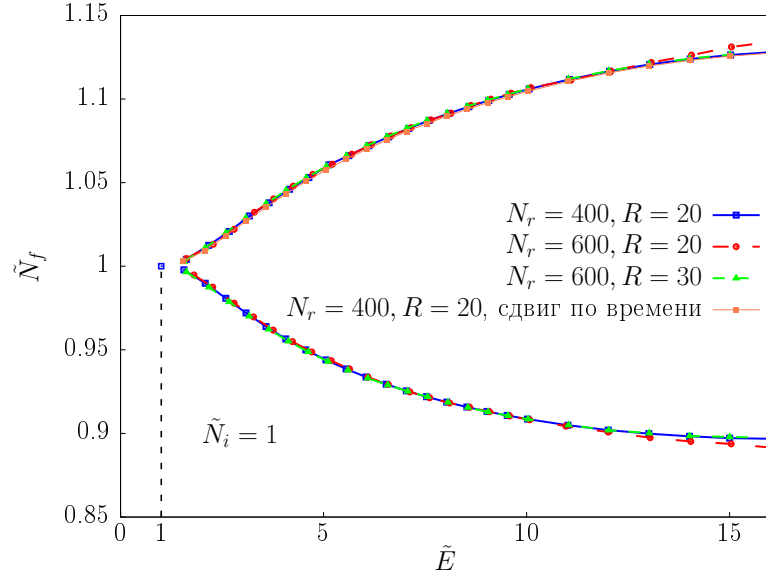


Рис. 1.6. Классически разрешённая область в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 1$ , найденная численно для трёх вариантов пространственной решётки: 1)  $N_r = 400, R = 20$  (квадраты, толстая сплошная линия); 2)  $N_r = 600, R = 20$  (круги, пунктирная линия); 3)  $N_r = 600, R = 30$  (треугольники, пунктирная линия); 4)  $N_r = 400, R = 20$ , но начальные конфигурации граничных решений сдвинуты по времени (квадраты, тонкая линия).

фигурации, был выбран  $[6.7 : 19.2]$  для случая  $R = 20, N_r = 600$  и  $[8.5 : 29.8]$  для случая  $R = 30, N_r = 600$ . Было обнаружено, что полученные границы совпадают с точностью лучше  $4 \cdot 10^{-3}$  в рассмотренном интервале энергий (1.22). Отличие становится заметным для случая  $N_r = 600, R = 30$  при больших энергиях  $\tilde{E} \gtrsim 11$ , что отражает бóльшее влияние высокочастотных мод на решение. Примеры начальных конфигураций решений, соответствующих верхней границе и аналогичных приведённым на Рис. 1.2, полученные для решётки с  $N_r = 600$  и  $R = 30$ , изображены на Рис. 1.7. При их сравнении с полевыми кон-

фигурациями, изображёнными на Рис. 1.2, видно, что различие заключается в увеличении длины мягкой осциллирующей части решения. Было обнаружено, что поведение мгновенного числа частиц  $\tilde{N}(t)$  для этих решений совпадает с представленным на Рис. 1.4а в пределах численной ошибки, связанной с дискретизацией уравнений и  $\tilde{N}(t)$ . Распределения энергии по Фурье модам для граничных решений с одинаковой энергией, полученных на различных решётках, также хорошо согласуются, как можно видеть на Рис. 1.8. Подобные проверки были проведены для всех представленных в данном исследовании областей классически разрешённых процессов рассеяния. Таким образом, полученные численные результаты демонстрируют существование классически разрешённой области конечного размера в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при фиксированном значении  $\tilde{N}_i$  в модели (1.1). Мы также предполагаем существование граничных решений в непрерывной версии модели.

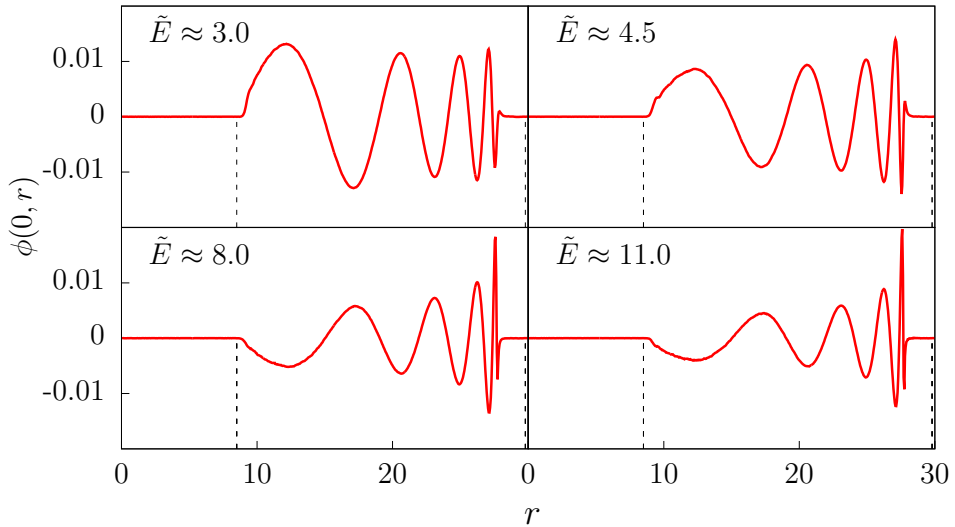


Рис. 1.7. То же, что и на Рис. 1.2, но при  $N_r = 600, R = 30$ . Начальные волновые пакеты  $\phi(t = 0, r)$  для решений на верхней границе с  $\tilde{N}_f = \tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  для набора энергий  $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$  и 11. Пунктирная линия демонстрирует пространственный интервал, на котором задаётся начальный волновой пакет.

Отметим, что симметрии теории (1.1) приводят к существованию нескольких экстремумов — решений, характеризующихся одинаковым изменением чис-

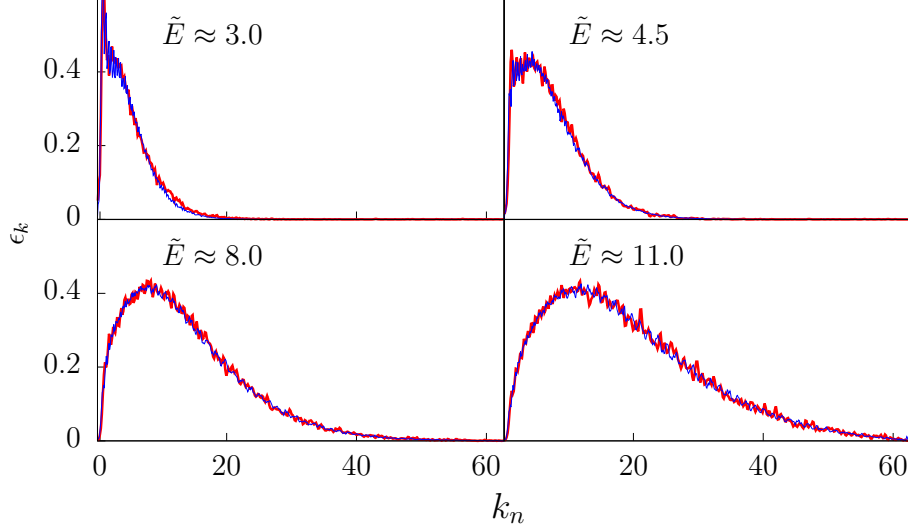


Рис. 1.8. Распределение  $\epsilon_k$  энергии по модам в импульсном пространстве для начальных конфигураций решений на верхней границе при  $N_r = 400, R = 20$  (толстая линия) и  $N_r = 600, R = 30$  (тонкая линия). Соответствующие конфигурации изображены на Рис. 1.2 и Рис. 1.7.

ла частиц. Так действие (1.1) инвариантно относительно замены  $\phi \rightarrow -\phi$ , поэтому, очевидно, у каждого граничного решения есть аналог, с противоположным знаком амплитуды поля. Другой симметрией является сдвиг по времени, относительно которого инвариантны классическое уравнение движения (1.4) и (1.7). Эта симметрия явным образом нарушается после дискретизации задачи из-за выбора начальных конфигураций (1.15) и (1.17) при  $t = t_i \equiv 0$ , что, в частности, подразумевает

$$\chi(t_i, r_1) = \chi(t_i, r_2) = 0. \quad (1.24)$$

Форма начальных волновых пакетов (см. Рис. 1.2 и Рис. 1.7) и изменение мгновенного числа частиц при эволюции поля указывают на то, что аналог симметрии относительно сдвигов по времени существует и в дискретизованной теории. А именно, эта симметрия связывает два решения, чьи начальные конфигурации отличаются некоторым сдвигом по времени и при этом удовлетворяют условиям (1.24). При этом важно, чтобы жёсткая часть конфигурации начального вол-

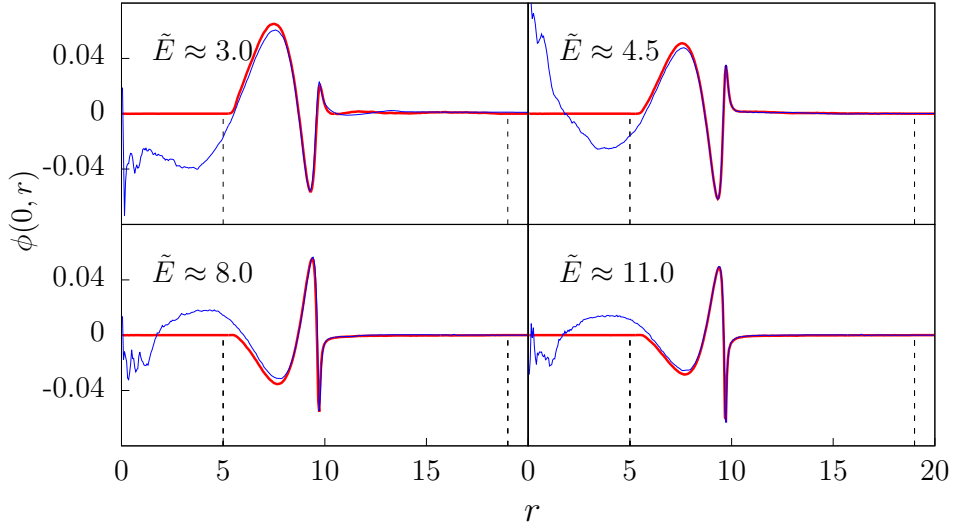


Рис. 1.9. Полевые конфигурации, соответствующие верхней границе классически разрешённой области, связанные друг с другом сдвигом по времени (толстая и тонкая линии) при  $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$  и  $11$ . Параметры пространственной решётки:  $N_r = 400, R = 20$ . Пунктирные линии демонстрируют пространственный интервал, на котором задавалась начальная конфигурация.

нового пакета находилась внутри интервала  $[r_1, r_2]$ , а значит в линейном режиме. В самом деле, при помощи того же численного алгоритма (сделав несколько запусков, начиная с разных стартовых конфигураций), было найдено несколько веток граничных решений, связанных друг с другом при помощи дискретных сдвигов по времени. При построении границ для Рис. 1.1 были выбраны решения, начальные волновые пакеты которых имели наиболее длинную мягкую осциллирующую часть, а их пики были расположены как можно дальше (для заданного  $R$  и  $[r_1, r_2]$ ) от точки  $r = 0$ . На Рис. 1.9 толстыми линиями изображены начальные полевые конфигурации, соответствующие другой ветке решений на верхней границе при тех же значениях энергии, что и у представленных на Рис. 1.2. Часть конфигурации, содержащая пик, у этих волновых пакетов находится ближе к началу координат, по сравнению с решениями, изображёнными на Рис. 1.2. Также на Рис. 1.9 тонкими линиями изображены полевые конфигурации решений, представленных на Рис. 1.2, полученные в результате

эволюции во времени, позволившей совместить жёсткие части обоих решений. Видно, что эти части решений с хорошей точностью совпадают друг с другом. Поскольку жёсткая часть волнового пакета ответственна за основное изменение числа частиц, можно ожидать, что решения, сдвинутые по времени будут давать близкие значения  $\tilde{N}_f$ . Это действительно так, и на Рис. 1.6 изображена верхняя граница  $\tilde{N}_f^{\max}$ , полученная при  $N_r = 400$  и  $R = 20$  для ветки решений, сдвинутых по времени. Она совпадает с верхней границей, полученной для решений с наиболее длинной мягкой осциллирующей частью с точностью лучше  $2 \cdot 10^{-3}$ .

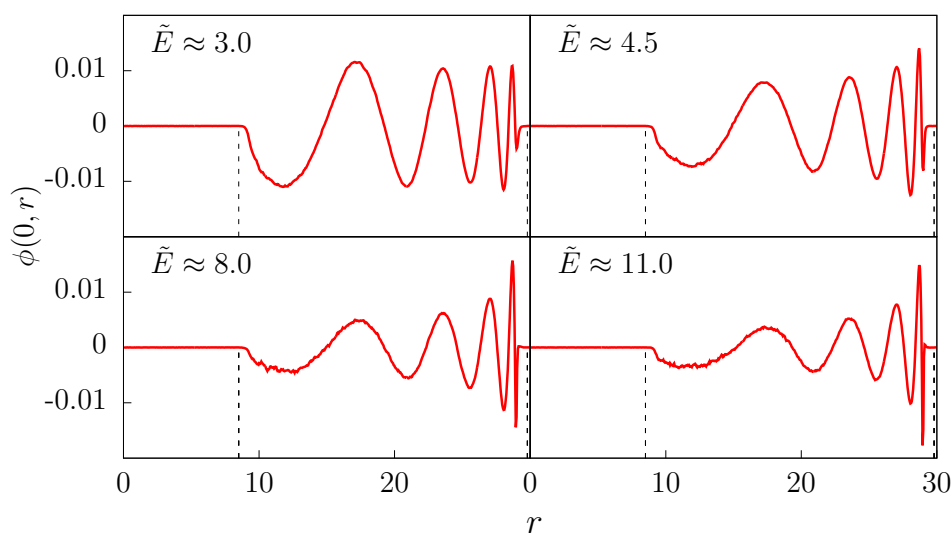


Рис. 1.10. То же, что на Рис. 1.2 но для решений на нижней части границы.

До сих пор мы описывали классические решения, соответствующие верхней части границы  $\tilde{N}_f = \tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ . Примеры начальных конфигураций решений, относящихся к нижней части границы  $\tilde{N}_f = \tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$ , изображены на Рис. 1.10 для параметров решётки  $N_r = 600$ ;  $R = 30$ . Как можно видеть, они имеют свойства качественно похожие на те, что были описаны ранее для начальных конфигураций решений вблизи верхней части границы. В этой связи стоит отметить, что в силу наличия симметрии относительно обращения времени, решение, относящееся к нижней границе с начальным  $\tilde{N}_i$  и конечным

$\tilde{N}_f$  числами частиц, связано с решением, обращённым во времени, у которого начальное и конечное числа частиц меняются местами.

#### 1.4.2. Случаи $\tilde{N}_i = 0.1, 10$ и $30$ .

Теперь мы перейдём к обсуждению зависимости полученных численных результатов от начального числа частиц  $\tilde{N}_i$ . На Рис. 1.11 изображены верхняя  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  и нижняя  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  части границы классически разрешённой области для  $\tilde{N}_i = 0.1$  и интервала по энергиям  $[1.5\tilde{N}_i, 15\tilde{N}_i]$ . Для построения этой области использовались значения  $\tilde{E}_*/\tilde{N}_i$ , приведённые в (1.22). Видно, что

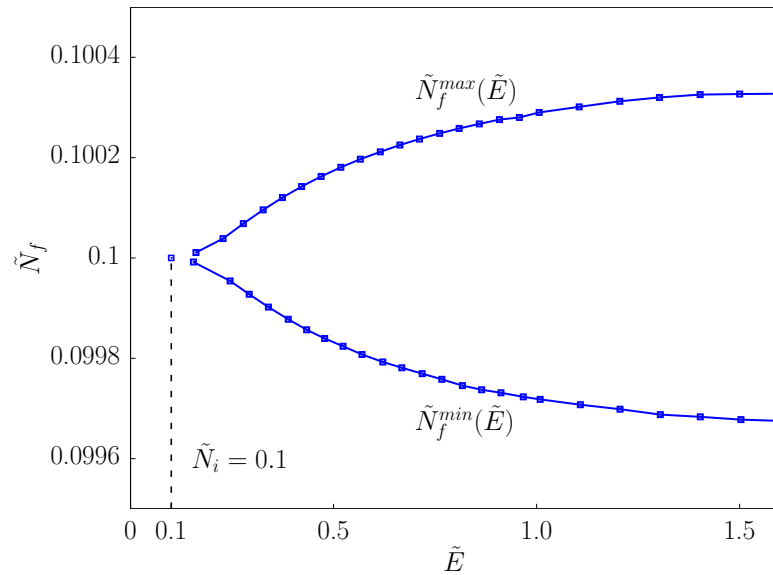


Рис. 1.11. Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 0.1$ ,  $N_r = 600$ ,  $R = 30$ .

максимальное относительное различие между начальным и конечным числами частиц  $|\tilde{N}_f - \tilde{N}_i|/\tilde{N}_i$  в этом случае оказывается на два порядка меньше, чем для  $\tilde{N}_i = 1$  при тех же значениях отношения  $\tilde{E}/\tilde{N}_i$ . Численно, число частиц изменяется не более чем на 0.33% в выбранном диапазоне энергий. На Рис. 1.12 изображены примеры начальных волновых пакетов и эволюция мгновенного числа частиц для процессов, соответствующих верхней и нижней части границы классически разрешённой области при энергии  $\tilde{E} \approx 0.6$ . Простран-



ственный интервал  $[r_1, r_2]$ , на котором задавалась начальная конфигурация, отмечен пунктирными линиями. Качественно свойства изображённых решений оказываются похожими на свойства граничных решений для  $\tilde{N}_i = 1$ . А именно, решения имеют жёсткую часть с острым пиком, который вызывает основное изменение числа частиц, оказываясь в области взаимодействия, и мягкую осциллирующую часть. Так же, как и в предыдущем случае  $\tilde{N}_i = 1$ , при поиске границы были обнаружены дополнительные ветки решений близких к границе, связанные между собой дискретным сдвигом по времени.

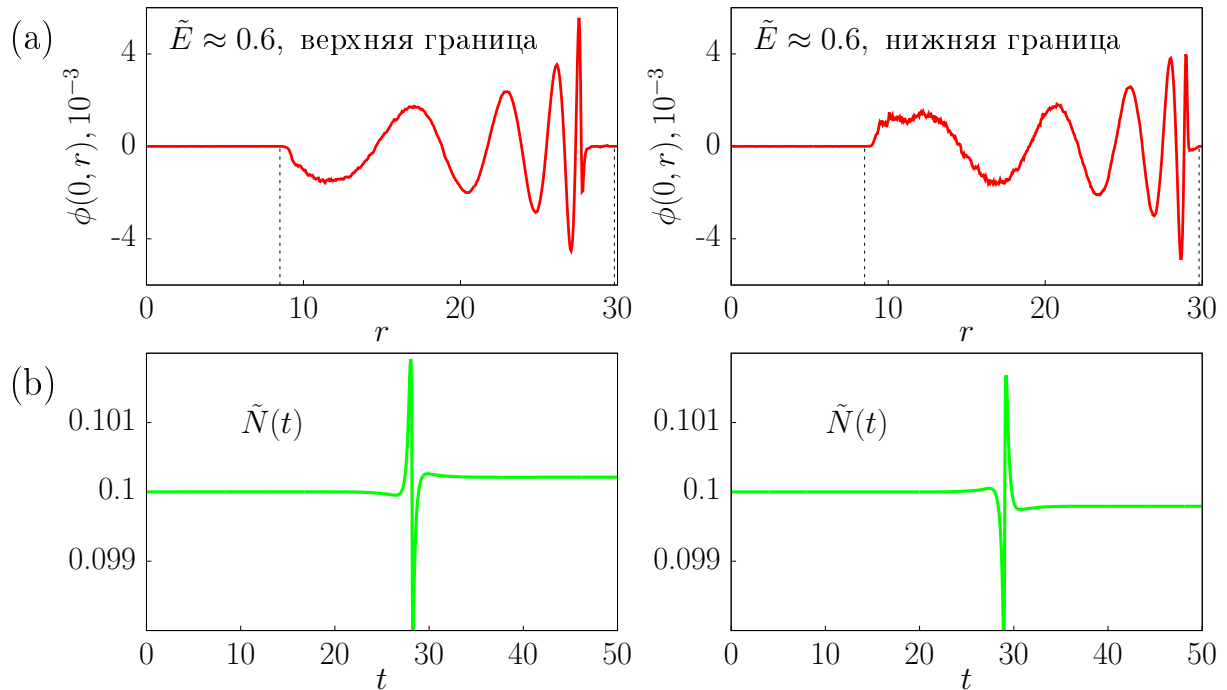


Рис. 1.12. Примеры (а) начальных волновых пакетов и (б) изменения мгновенного числа частиц для граничных решений с  $\tilde{N}_i = 0.1$  и  $\tilde{E} \approx 0.6$ . Графики слева соответствуют решению на верхней границе классически разрешённой области, а графики справа — на нижней.

Теперь перейдём к описанию результатов для случая  $\tilde{N}_i = 10$ , в котором, как мы увидим, решения на границе качественно отличаются от аналогичных решений для меньших значений  $\tilde{N}_i = 0.1$  и  $1$ . На Рис. 1.13 граница классически разрешённой области изображена при помощи толстой сплошной и толстой пунктирной линий для интервала энергий  $[1.5\tilde{N}_i, 15\tilde{N}_i]$ . Было обнаружено, что несмотря на то, что граница имеет форму похожую на те, что были получены для  $\tilde{N}_i = 0.1$  и  $1$ , обе её части, т.е.  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$ , определяются двумя ка-

чественно различными ветками классических решений. При энергиях меньше значений порядка 70, жёсткая часть граничных решений состоит из двух близких, но разнесённых в пространстве острых пиков. Пример начальной полевой

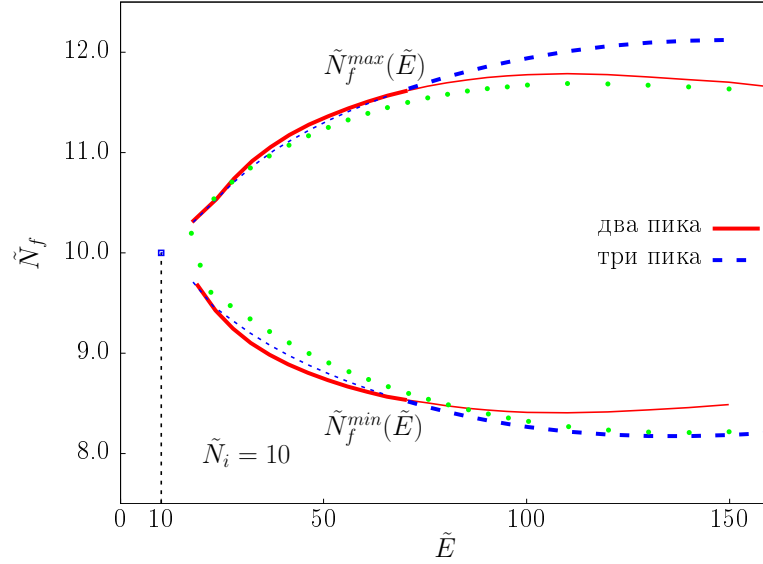


Рис. 1.13. Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  для  $\tilde{N}_i = 10.0$ ,  $N_r = 600$ ,  $R = 30$ . Части границы  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  составлены при помощи классических решений с двумя пиками (сплошная линия) и тремя пиками (пунктирная линия). Точками показаны ветки решений, которые дают локальные минимумы функционала  $\mathcal{F}$  (или экстремумы  $\tilde{N}_f$ ).

конфигурации  $\phi(t = 0, r)$ , соответствующей решению при  $\tilde{E} \approx 65$  на нижней части границы, показан на левой части Рис. 1.14а. Изменение мгновенного числа частиц  $\tilde{N}(t)$ , а также распределение энергии по модам  $\epsilon_k$  для начальной и конечной полевых конфигураций также показаны на левой стороне этого рисунка. Осциллирующее поведение  $\epsilon_k$  указывает на то, что начальный и конечный волновые пакеты представляют собой сумму двух разделённых в пространстве цугов волн, имеющих схожие гладкие Фурье-образы. В частности, расстояние  $\delta r$  между пиками в начальной конфигурации и период осцилляций  $\delta k$  в начальном распределении по энергии, связаны приблизительным соотношением  $\delta r \cdot \delta k \approx 2\pi$  для всех решений этой ветки. Например, решение с энергией  $\tilde{E} \approx 65$ , изображённое на левых графиках Рис. 1.14 имеют  $\delta r \approx 2.8$  и  $\delta k \approx 2.3$ . При

сравнении распределений по энергиям  $\epsilon_k$  для волновых пакетов в начальный и конечный моменты времени обнаруживается, что присутствует небольшой перенос энергии из низкоэнергичных в высокоэнергичные моды. При энергиях выше примерно 70 численные результаты показывают, что абсолютный минимум и максимум  $\tilde{N}_f$  даются другой веткой решений, чья начальная и конечная конфигурации содержат уже три пика. На правых частях Рис. 1.14 изображены начальные полевые конфигурации  $\phi(t = 0, r)$ , изменение  $\tilde{N}(t)$  во времени и распределения энергии по Фурье модам  $\epsilon_k$  для начальной и конечной полевых конфигураций граничного решения при энергии  $\tilde{E} \approx 80$ . У решений этой ветки, т.е. при энергиях больше 70, начальный и конечный волновые пакеты состоят из трёх разнесённых в пространстве цугов волн. Также как в случае меньших значений  $\tilde{N}_i$ , мгновенное число частиц  $\tilde{N}(t)$  претерпевает основные изменения в то время, когда часть решения, содержащая пики, попадает в область взаимодействия. Было обнаружено, что решения с двумя пиками при энергиях  $\tilde{E} \gtrsim 70$  и решения с тремя пиками при  $\tilde{E} \lesssim 70$  соответствуют локальным минимумам  $\tilde{N}_f$ . Для выяснения этого обстоятельства мы использовали решение с двумя пиками, соответствующее нижней границе при  $\tilde{E} \approx 65$  как начальное приближение в методе стохастической выборки с  $\tilde{E}_* > 70$ . Чтобы не позволить решению с двумя пиками перепрыгнуть на ветку решений с тремя пиками, которое доставляет глобальный минимум  $\tilde{N}_f$ , мы использовали относительно малую амплитуду  $\alpha$  варьирования Фурье амплитуд  $f_n$  начальной конфигурации. Таким образом, была получена ветвь решений с двумя пиками, изображённая тонкой сплошной линией на Рис. 1.13. Аналогично было получено продолжение ветки решений с тремя пиками в область  $\tilde{E} < 70$ , которое показано на Рис. 1.13 тонкой пунктирной линией. Решения для верхней границы обладают схожими свойствами. Отметим, что в рассмотренном интервале по энергии максимальное относительное изменение числа частиц достигает приблизительно 20%.

Также были обнаружены другие ветки решений, которые соответствуют локальным экстремумам  $\tilde{N}_f$  в выбранном интервале энергий. В линейном режи-

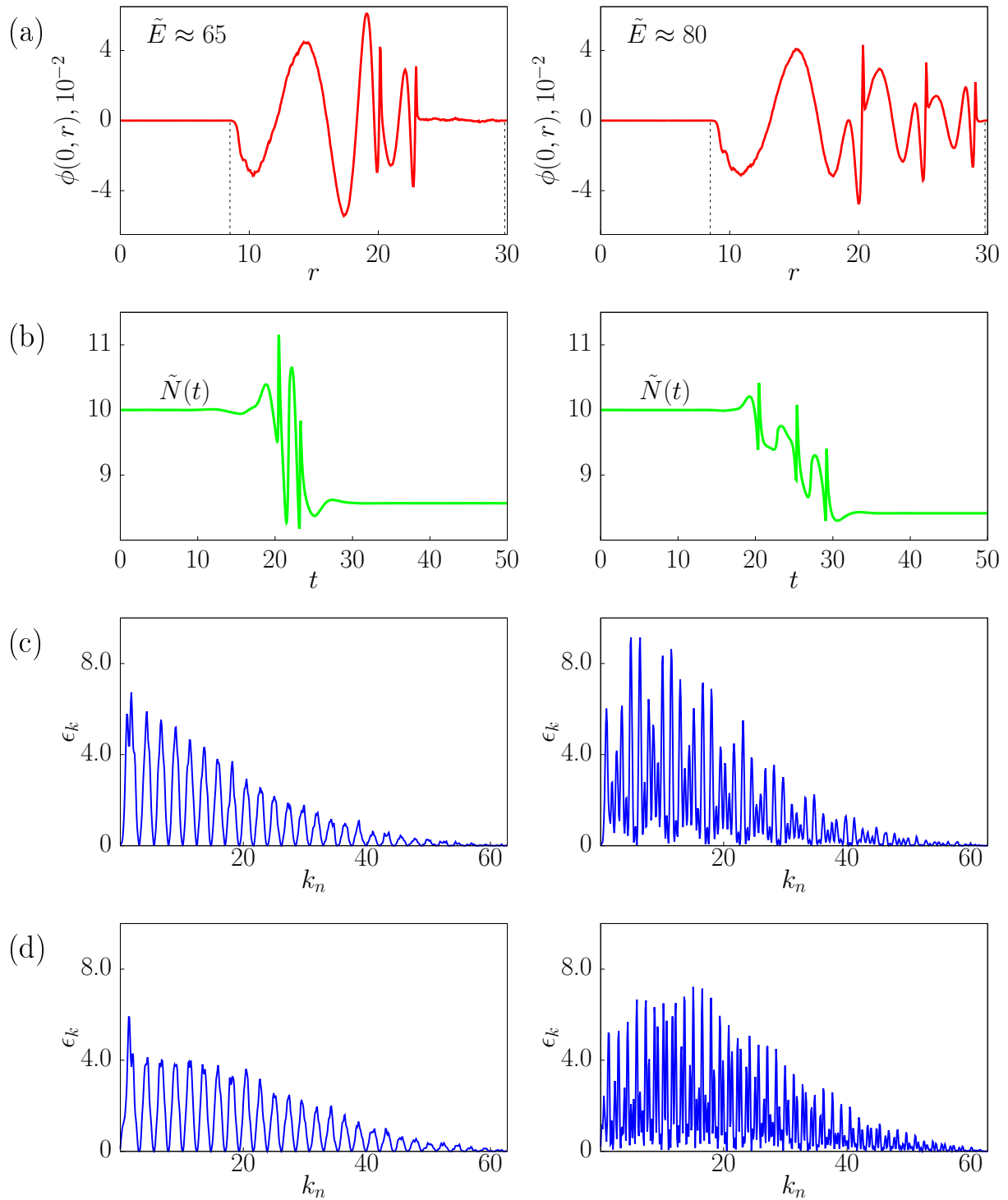


Рис. 1.14. Примеры граничных решений с  $\tilde{N}_i = 10$ . (а) Начальный волновой пакет; (б) эволюция мгновенного числа частиц  $\tilde{N}(t)$ ; (с) распределение энергии  $\epsilon_k$  по модам для начальной конфигурации; (д) то же, что и на рисунке (с), но для конечной конфигурации. Рисунки относятся к решениям на нижней части границы при  $\tilde{E} \approx 65$  в левом столбце, а в правом — при  $\tilde{E} \approx 80$ .

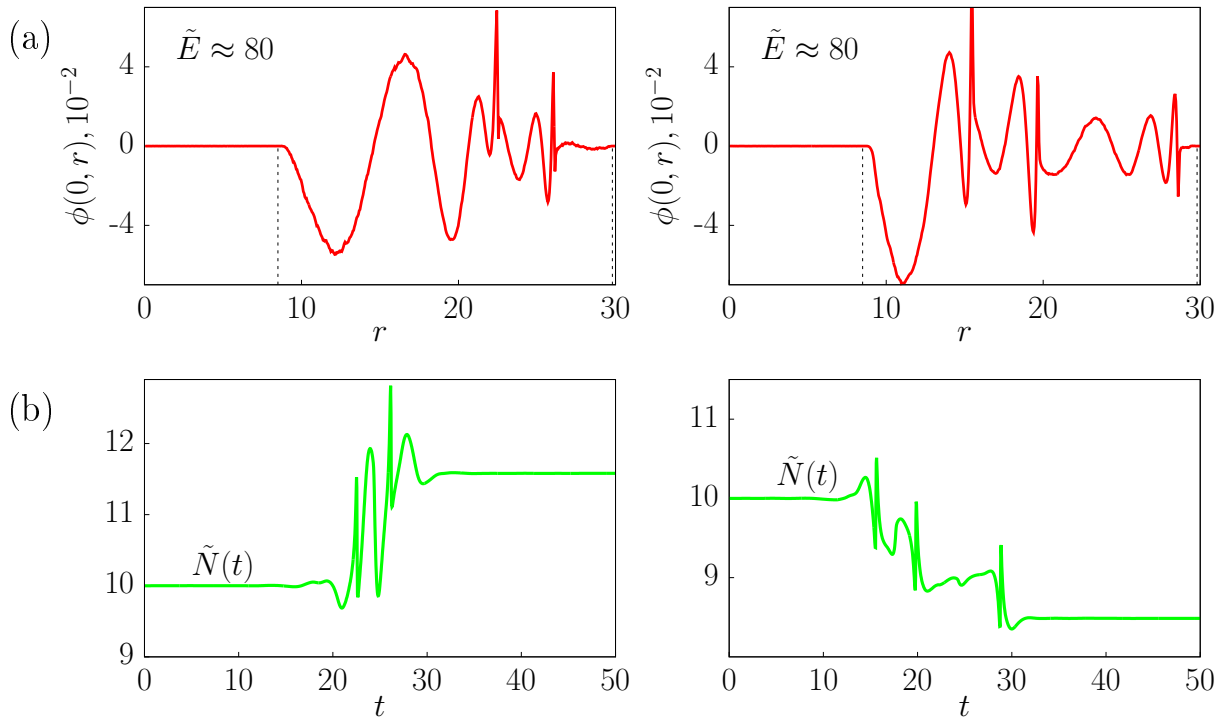


Рис. 1.15. (a) Начальные волновые пакеты и (b) эволюция мгновенного числа частиц для решений с  $\tilde{N}_i = 10$  и  $\tilde{E} \approx 80$  соответствующих локальным минимумам  $\tilde{N}_f$ . Левый столбец соответствует процессу с  $\tilde{N}_f > \tilde{N}_i$ , а правый — с  $\tilde{N}_f < \tilde{N}_i$ .

ме эти решения представляют из себя сумму двух или трёх цугов волн с одним пиком, которые отличаются от описанных ранее расстоянием между цугами. На Рис. 1.15 изображены два примера таких решений. Левые графики соответствуют решению такого типа с двумя пиками при  $\tilde{N}_f > \tilde{N}_i$ . Расстояние между цугами в начальной полевой конфигурации больше чем у соответствующего граничного решения с двумя пиками. Аналогично, правые графики соответствуют примеру решения при  $\tilde{N}_f < \tilde{N}_i$  с тремя пиками. Снова в этом решении расстояние между цугами несколько больше, чем у граничного, см. правый график на Рис. 1.14а. Эти две ветки решений изображены на Рис. 1.13 точками. Стоит отметить, что при  $\tilde{N}_i = 10$  мы не обнаружили решений, дающих даже локальный экстремум функционалу  $\tilde{N}_f(\tilde{E})$ , чьи начальный или конечный волновые пакеты содержали бы только один пик. Мы пытались найти их, взяв граничные решения при  $\tilde{N}_i = 1$  с одним пиком в качестве начального приближения и постепенно увеличивая  $\tilde{N}_i$  малыми шагами до  $\tilde{N}_i = 10$ . Было обнаружено, что при промежуточных значениях  $\tilde{N}_i$ , около 5–6, начальные конфигурации гра-

нических решений разделяются на несколько цугов, что приводит к большему изменению  $|\tilde{N}_f - \tilde{N}_i|$  по сравнению с решением с одним цугом.

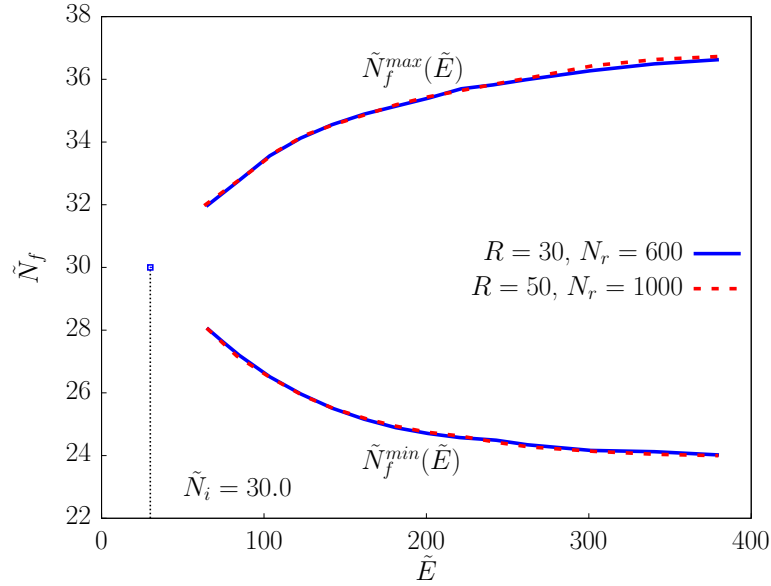


Рис. 1.16. Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 30$ . Использовались решётки с параметрами  $R = 30, N_r = 600$  (сплошная линия) и  $R = 50, N_r = 1000$  (пунктирная линия).

Ситуация ещё более усложняется при бóльших значениях  $\tilde{N}_i$ . На Рис. 1.16 показаны численные результаты для границы классически разрешённой области при  $\tilde{N}_i = 30$  и параметрах решётки  $R = 30, N_r = 600$  (сплошная линия). Было обнаружено, что разница  $|\tilde{N}_f - \tilde{N}_i|$  не превосходит 22% от начального числа частиц для рассмотренного интервала по энергии (1.22). Также мы обнаружили, что соответствующие граничные решения содержат уже 4–7 пиков в начальных и конечных волновых пакетах. Примеры начальных полевых конфигураций для граничных решений изображены на Рис. 1.17. В то же время было замечено, что с увеличением  $\tilde{N}_i$  число локальных экстремумов  $\tilde{N}_f$  также резко возрастает. Соответствующие решения имеют некоторое число цугов с расстоянием между ними, отличающимся от того, что имеет место в случае решения, соответствующего глобальному минимуму или максимуму  $\tilde{N}_f$ . Это значительно усложняет задачу нахождения границы классически разрешённой

области, потому что, с одной стороны, численная процедура часто “застревает” в таких локальных минимумах, а с другой, разница значений  $\tilde{N}_f$  при одном и том же  $\tilde{E}$  для разных ветвей граничных решений в некоторых случаях оказывается близкой к численной точности. По этой причине мы не можем так же детально классифицировать решения на границе в этом случае, как мы это сделали при меньших  $\tilde{N}_i$ . На Рис. 1.16 сплошной линией представлены огибающие  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  классически разрешённой области при параметрах решётки  $R = 30$ ,  $N_r = 600$ . Мы провели дополнительную проверку этих результатов путём нахождения  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  для других параметров решётки:  $R = 50$  и  $N_r = 1000$ . Соответствующая граница изображена на Рис. 1.16 при помощи пунктирной линии. Исходя из полученных численных результатов мы ожидаем, что число близко расположенных частей решений с пиками в начальных и конечных волновых пакетах на границе продолжит расти с ростом  $\tilde{N}_i$ .

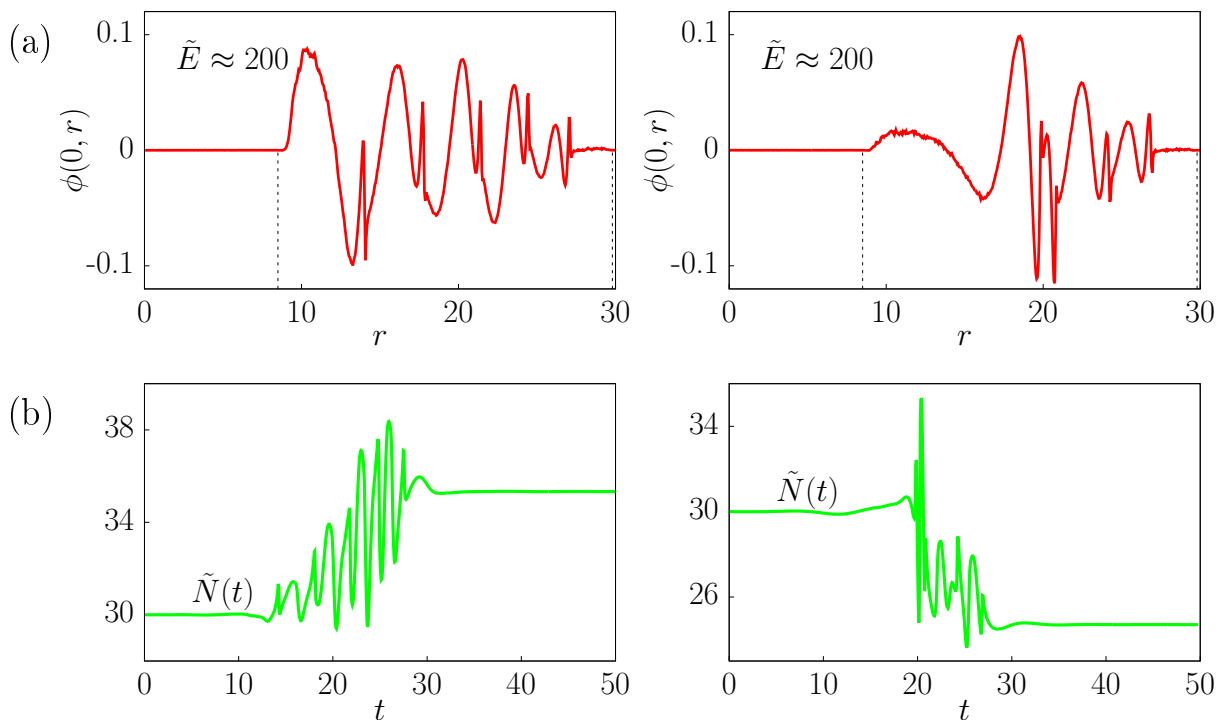


Рис. 1.17. (a) Начальные волновые пакеты и (b) изменение мгновенного числа частиц для граничных решений с  $\tilde{N}_i = 30$  и  $\tilde{E} \approx 200$ . Левый столбец соответствует  $\tilde{N}_f > \tilde{N}_i$ , а правый —  $\tilde{N}_f < \tilde{N}_i$ .

### 1.4.3. Анализ классически разрешённых областей

Интересно сравнить классически разрешённые области при разных фиксированных  $\tilde{N}_i$ . Для этого удобно построить их в плоскости  $(\tilde{E}/\tilde{N}_i, \tilde{N}_f/\tilde{N}_i)$ , см. Рис. 1.18а. Рассмотрим два решения, описывающих рассеяние волновых пакетов с разными наборами параметров, например  $\tilde{N}_i^{(1)}, \tilde{N}_f^{(1)}, \tilde{E}^{(1)}$  и  $\tilde{N}_i^{(2)}, \tilde{N}_f^{(2)}, \tilde{E}^{(2)}$ . Тогда должно существовать решение, энергия и числа частиц в котором равны следующим суммам

$$\tilde{N}_i = \tilde{N}_i^{(1)} + \tilde{N}_i^{(2)}, \quad \tilde{N}_f = \tilde{N}_f^{(1)} + \tilde{N}_f^{(2)}, \quad \tilde{E} = \tilde{E}^{(1)} + \tilde{E}^{(2)}. \quad (1.25)$$

Такое решение может быть построено явно путём объединения двух частных решений, достаточно далеко разнесённых в пространстве-времени. Это наблюдение, в частности, означает, что ширина классически разрешённой области, т.е.  $|\tilde{N}_f^{\max} - \tilde{N}_i|$  или  $|\tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i|$  при фиксированном отношении  $\tilde{E}/\tilde{N}_i$  должна расти не медленнее линейной функции при росте начального числа частиц  $\tilde{N}_i$ . На Рис. 1.18b изображена зависимость величины  $|\tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i|$  от  $\tilde{N}_i$  для двух значений фиксированного  $\tilde{E}/\tilde{N}_i$ . Для качественного сравнения на график добавлена линейная функция, изображённая тонкой сплошной линией. Видно, что зависимость  $|\tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i|$  от энергии замедляет свой рост и начинает приближаться к линейной функции при больших  $\tilde{N}_i$ . Численные результаты показывают, что величина  $|\tilde{N}_f^{\max} - \tilde{N}_i|$  ведёт себя таким же образом. Это наблюдение может свидетельствовать в пользу существования некоторой предельной границы классически разрешённой области в плоскости  $(\tilde{E}/\tilde{N}_i, \tilde{N}_f/\tilde{N}_i)$  при  $\tilde{N}_i \rightarrow \infty$  или же в области  $(\tilde{E}/\tilde{N}_f, \tilde{N}_i/\tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_f \rightarrow \infty$  из-за симметрии  $\tilde{N}_i \leftrightarrow \tilde{N}_f$  ( $t \rightarrow -t$ ).

## 1.5. Выводы к первой главе

Главным результатом первой главы являются классически разрешённые области многочастичного рассеяния (см. Рис. 1.1, 1.11, 1.13, 1.16 и Рис. 1.18а). Их форма позволяет судить об экспоненциальном подавлении вероятностей про-



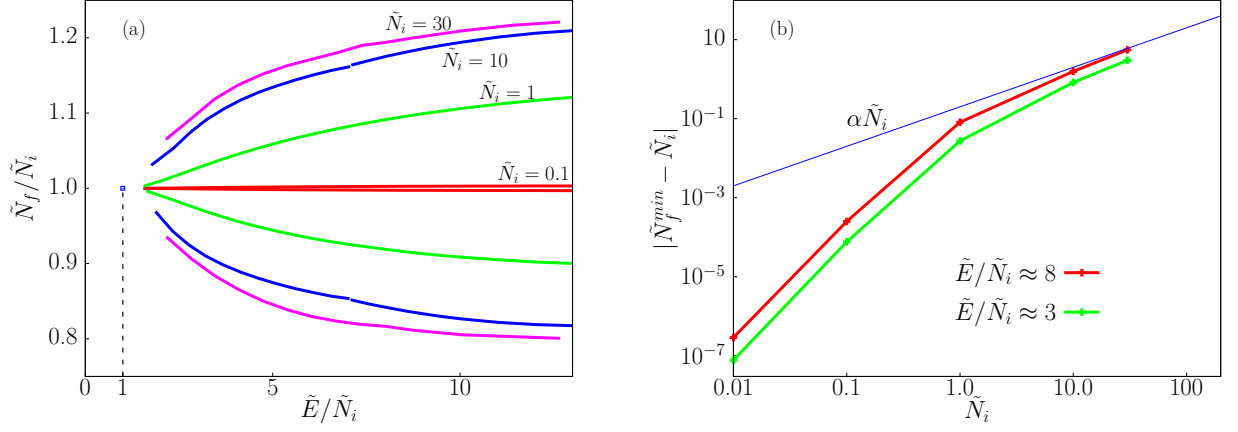


Рис. 1.18. (a) Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}/\tilde{N}_i, \tilde{N}_f/\tilde{N}_i)$  для различных  $\tilde{N}_i$ , (b) разница  $|\tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i|$  как функция от  $\tilde{N}_i$  при фиксированном  $\tilde{E}/\tilde{N}_i$ .

цессов с определёнными  $n_i$ ,  $n_f$  и  $E$  в квантовой теории. В частности, процессам многочастичного рождения на приведённых рисунках соответствуют области, которые получаются пределом  $\tilde{N}_i \rightarrow 0$  при фиксированном  $\tilde{N}_f$  или, если вспомнить про симметрию относительно отражения времени,  $\tilde{N}_f \rightarrow 0$  при фиксированном  $\tilde{N}_i$ . Видно, что эти процессы находятся глубоко в классически запрещённой области. Это указывает на экспоненциальное подавление вероятностей этих процессов, которое подтверждается явным вычислением в следующих главах диссертации.

Интересным результатом является указание на существование линейной асимптотики у границы классически разрешённой области  $|\tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i|$  (или  $|\tilde{N}_f^{\max} - \tilde{N}_i|$ ), как функции от  $\tilde{N}_i$ . Любопытно, что, как мы увидим в Главе 3, вероятность многочастичного рождения “мало”  $\rightarrow n$  при числе частиц в конечном состоянии  $n \gg \lambda^{-1}$  также оказывается линейной функцией  $n$ .

В заключение отметим, что разработанный метод сможет быть применён к другим бозонным теориям.

# Численная реализация метода сингулярных решений

### 2.1. Введение ко второй главе

Вторая глава посвящена численной реализации квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона [35], который позволяет вычислить вероятности многочастичного рождения, когда число частиц  $n$  в конечном состоянии велико. В настоящей работе этот метод применяется для теории действительного скалярного поля  $\lambda\phi^4$  (1). Вычисляемой величиной в этом методе является инклюзивная вероятность многочастичного рождения, то есть вероятность перехода из состояния с малым числом частиц в любое из состояний с числом частиц  $n \gg 1$  и энергией  $E$ . Эта вероятность определяется следующим выражением (англ. few — мало)

$$\mathcal{P}_{\text{few} \rightarrow n}(E) \equiv \sum_f |\langle f; E, n | \hat{S} \hat{O} | 0 \rangle|^2, \quad (2.1)$$

где  $\hat{O}$  — некоторый оператор, рождающий начальное состояние,  $\hat{S}$  — S-матрица, а суммирование производится по всем конечным состояниям с энергией  $E$  и множественностью  $n \gg 1$ .

Квазиклассический метод сингулярных решений Д.Т. Шона [35] является обобщением метода Л.Д. Ландау квазиклассического вычисления матричных элементов в квантовой механике [73] на случай вероятностей многочастичного рождения в квантовой теории поля, см. также [32–34]. Он позволяет вычислить инклюзивную вероятность (2.1) в режиме  $\lambda \ll 1$ ,  $n \gg 1$ . Для этого вероятность (2.1) записанная в форме интеграла по траекториям вычисляется методом перевала. В главном квазиклассическом приближении ответ записыва-

ется в экспоненциальном виде

$$\mathcal{P}_{\text{few} \rightarrow n}(E) \propto e^{F_{\hat{\mathcal{O}}}(\lambda n, \varepsilon)/\lambda}, \quad (2.2)$$

где  $F_{\hat{\mathcal{O}}}(\lambda n, \varepsilon)$  — экспонента подавления вероятности,  $\varepsilon = E/n - m$ , а несущественные для настоящего исследования предэкспоненциальные факторы опущены.

Важнейшим предположением для метода Д.Т. Шона является гипотеза об универсальности: если оператор  $\hat{\mathcal{O}}$  рождает при действии на вакуумное состояние в (2.1) квазиклассически малое число частиц  $\ll \lambda^{-1}$ , то  $F_{\hat{\mathcal{O}}}(\lambda n, \varepsilon) \equiv F(\lambda n, \varepsilon)$  не зависит от вида оператора  $\hat{\mathcal{O}}$ , т.е. фактически совпадает с экспонентой подавления (10). Квазиклассическое вычисление экспоненты подавления сводится [35] к нахождению некоторого комплекснозначного решения классического уравнения поля с граничными условиями, зависящими от  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . В интересующем нас пределе квазиклассически малого ( $\ll \lambda^{-1}$ ) числа частиц в начальном состоянии эти решения оказываются сингулярными.

Несмотря на то, что этот подход является достаточно общим, ранее он был успешно применён только в режиме  $\lambda n \ll 1$ , когда квазиклассические конфигурации могут быть получены аналитически при малых  $\varepsilon$  [35; 52], либо близость решений к более простым конфигурациям с дополнительными симметриями упрощает их численный поиск [53; 54]. В этой главе будет описан разработанный алгоритм численного нахождения экспоненты подавления многочастичного рождения для произвольных  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ .

## 2.2. Метод сингулярных решений

В силу предположения об универсальности экспоненты подавления, оператор  $\hat{\mathcal{O}}$  удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathcal{O}} = \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} \int d^3 \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{x}) \right\}, \quad (2.3)$$

который описывает классический источник  $J(\mathbf{x})$ , взаимодействующий с полем  $\hat{\phi}$  при  $t = 0$ . Экспоненту подавления в формуле (2.2), соответствующую такому оператору  $\hat{O}$ , будем обозначать как  $F_J(\lambda n, \varepsilon)$ . Легко проверить, что при действии на вакуум в свободной скалярной теории оператор (2.3) рождает  $n_i \propto J^2/\lambda$  частиц. Если  $n_i \gg 1$  и  $n \gg 1$ , то начальное и конечное состояния позволяют применить квазиклассический подход для вычисления  $F_J$ . Если при этом  $1 \ll n_i \ll \lambda^{-1}$ , чего можно достичь взяв достаточно малую амплитуду источника  $J$ , то можно использовать гипотезу об универсальности экспоненты подавления, а значит

$$F(\lambda n, \varepsilon) = \lim_{J \rightarrow 0} F_J(\lambda n, \varepsilon). \quad (2.4)$$

При этом универсальность гарантирует, что полученная в результате  $F$  не будет зависеть от выбора конкретного профиля источника. Таким образом задача сводится к двум шагам: квазиклассическому вычислению  $F_J$  при ненулевом источнике и затем взятию предела  $J \rightarrow 0$  (2.4), результат которого даёт значение экспоненты подавления вероятности процесса многочастичного рождения.

Вычисление  $F_J$  при ненулевом  $J$  сводится к нахождению решения классического уравнения поля с источником, подчиняющегося граничным условиям, связанным с фиксацией  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . Вывод соответствующей граничной задачи проведён в работе [35], см. также работы [40; 46–51]. Вероятность (2.1) записывается в виде интеграла по траекториям. При этом в исходном действии теории (1) удобно сделать переопределение поля  $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{\lambda}$  и проинтегрировать по частям кинетический член, что приводит к

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2\lambda} \int d^4x (\phi \square \phi + m^2 \phi^2 + \phi^4/2). \quad (2.5)$$

В такой записи константа связи  $\lambda$  играет роль параметра квазиклассического разложения подобно постоянной Планка  $\hbar$  в квантовой механике, а само действие обращается в нуль на решениях уравнения поля в линейном режиме. Функциональный интеграл для вероятности (2.1) с учётом вида оператора  $\hat{O}$  (2.3) имеет седловой вид и при  $\lambda \rightarrow 0$  может быть вычислен методом

перевала, что приводит к набору уравнений на седловую конфигурацию поля  $\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x})$ , которые зависят от  $J$ ,  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . Поле  $\phi_{\text{cl}}$  удовлетворяет классическому уравнению в присутствии внешнего источника  $J(\mathbf{x})$

$$\square\phi_{\text{cl}} + m^2\phi_{\text{cl}} + \phi_{\text{cl}}^3 = iJ(\mathbf{x})\delta(t). \quad (2.6)$$

Заметим, что уравнение (2.6) может быть получено путём экстремизации классического действия с источником

$$S_J = \tilde{S}[\phi] + \frac{i}{\lambda} \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(0, \mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Граничные условия для  $\phi_{\text{cl}}$  определяются начальным и конечным состояниями в амплитуде вероятности (2.1), а также граничными членами, возникшими после интегрирования действия (1) по частям. Предполагая, что седловое решение линейризуется при  $t \rightarrow \pm\infty$ , т.е. асимптотически представляет собой сумму плоских волн, граничные условия удобно наложить на положительно и отрицательно частотные компоненты такого представления. Вакуумное<sup>1</sup> начальное состояние в (2.1) приводит к вакуумному граничному условию для решения  $\phi_{\text{cl}}$  при  $t \rightarrow -\infty$ , и  $\phi_{\text{cl}}$  в этом случае имеет только положительно частотную компоненту. Это позволяет сделать частичный поворот Вика и аналитически продолжить  $\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x})$  на контур в комплексном времени А0В, изображённый на Рис. 2.1. В этом случае первое граничное условие заключается в том, что поле стремится к нулю в бесконечно удалённом прошлом вдоль оси евклидоваго времени:

$$\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +i\infty. \quad (2.8)$$

Модификация контура по времени и соответствующее изменение граничного условия упрощает численное решение задачи. В бесконечно удалённом будущем  $t \rightarrow +\infty$  квазиклассическое решение описывает состояние  $n$  свободных частиц. Оно представляет собой суперпозицию свободных волн:

$$\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + b_{-\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}] \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup> Оператор  $\hat{\mathcal{O}}$  входит в седловое уравнение (2.6) и не проявляется в начальном условии.

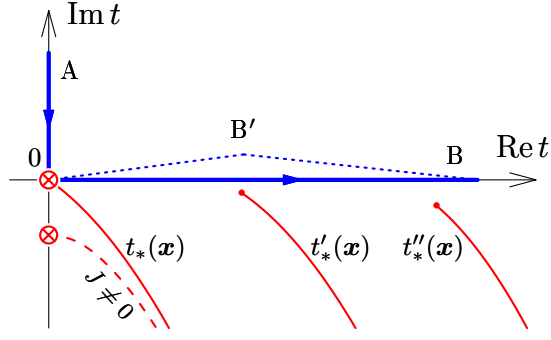


Рис. 2.1. Контур A0B в плоскости комплексного времени для квазиклассической граничной задачи (толстая сплошная линия со стрелками, иллюстрирующими направление эволюции) и сингулярности  $t_*(\mathbf{x})$ ,  $t'_*(\mathbf{x})$ ,  $t''_*(\mathbf{x})$  квазиклассических решений (тонкие линии, начинающиеся от закрашенных кругов или кругов с крестами). Изображение схематичное.

где  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  и  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$  — это отрицательная и положительная частотные части соответственно. Второе граничное условие связывает между собой  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$  следующим образом:

$$a_{\mathbf{k}} = e^{-\theta + 2\omega_{\mathbf{k}}T} b_{\mathbf{k}}. \quad (2.10)$$

Можно показать [51], что эта связь соответствует конечному состоянию с фиксированной энергией  $E$  и числом частиц  $n$  в (2.1). Параметры  $T$  и  $\theta$  в правой части уравнения — это множители Лагранжа, связанные с  $E$  и  $n$  при помощи стандартных выражений

$$\lambda E = \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*, \quad \lambda n = \int d^3\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*. \quad (2.11)$$

Стоит отметить, что полный поворот Вика в граничной задаче сделать нельзя. В самом деле,  $b_{\mathbf{k}}$  не равны нулю при всех  $\mathbf{k}$  в случае ненулевых  $E$  и  $n$  в силу уравнений (2.11). Поэтому положительно частотная часть решения (2.9) будет экспоненциально расти при  $t \rightarrow -i\infty$ , что нарушит линейризацию и делает задание граничного условия на свободные волны в этой области невозможным. С другой стороны, квазиклассические уравнения могут быть самосогласованно сформулированы на контуре A0B, с источником  $J(\mathbf{x})\delta(t)$ , поставленным в углу контура — точке  $t = 0$ . Последнее можно продемонстрировать явно, проинтегрировав уравнение (2.6) по малой окрестности, содержащей  $t = 0$ . В

этом случае оно переходит в выражения

$$\partial_t \phi_{\text{cl}}(+0, \mathbf{x}) - \partial_t \phi_{\text{cl}}(+i0, \mathbf{x}) = iJ(\mathbf{x}), \quad \phi_{\text{cl}}(+0, \mathbf{x}) = \phi_{\text{cl}}(+i0, \mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Таким образом, можно найти решения уравнения (2.6) с нулевой правой частью на частях  $A0$  и  $0B$  контура по времени, а затем сшить их при  $t = 0$ , используя уравнения (2.12). Уравнения (2.6)–(2.11) составляют полную граничную задачу для квазиклассических конфигураций  $\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x})$  и множителей Лагранжа  $T, \theta$ . После того, как уравнения решены, экспонента подавления при конечном  $J$  вычисляется следующим образом [35]

$$F_J = 2\lambda ET - \lambda n\theta - 2\lambda \text{Im} S_J[\phi_{\text{cl}}], \quad (2.13)$$

где первые два слагаемых отражают вклад конечного состояния, а классическое действие (2.7) вычисляется на  $\phi_{\text{cl}}$ . Отметим, что в соответствии с (2.11) квазиклассические уравнения содержат  $\lambda, n$ , и  $E$  только в виде комбинаций  $\lambda n$  и  $\lambda E$ . Поэтому квазиклассическая экспонента  $F_J$  является функцией двух параметров:  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ .

Также стоит отметить, что уравнение (2.13) является преобразованием Лежандра между  $2\lambda \text{Im} S_J$  и  $F_J$ , а множители Лагранжа  $T$  и  $\theta$  удовлетворяют соотношениям [35]:

$$2T = \frac{\partial F_J}{\partial(\lambda E)}, \quad \theta = -\frac{\partial F_J}{\partial(\lambda n)}. \quad (2.14)$$

Мы использовали уравнения (2.14) для проверки точности численной реализации метода, а также для уменьшения численных ошибок. Подробнее об этом будет рассказано в следующей главе.

Вторым этапом квазиклассического вычисления является взятие предела  $J \rightarrow 0$ . С этим пределом связаны определённые сложности, так как квазиклассические решения в нём становятся сингулярными, что отражено в названии метода. Чтобы убедиться в сингулярности седловых решений при  $J \rightarrow 0$ ,

рассмотрим вычисленный на них функционал энергии

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\lambda} \int d^3\mathbf{x} [(\partial_t\phi_{\text{cl}})^2 + (\partial_{\mathbf{x}}\phi_{\text{cl}})^2 + m^2\phi_{\text{cl}}^2 + \phi_{\text{cl}}^4/2] . \quad (2.15)$$

Эта энергия сохраняется отдельно на евклидовой (A0) и минковской (B0) частях контура по времени (Рис. 2.1). В частности,  $\mathcal{E} = 0$  на части A0 и  $\mathcal{E} = E$  на части 0B в силу граничных условий (2.8) и (2.11). Энергия испытывает скачок при  $t = 0$  из-за присутствия классического источника  $J$ . Таким образом мы получаем, что

$$\lambda E = \lambda\mathcal{E}(+0) - \lambda\mathcal{E}(+i0) = \frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) [\partial_t\phi_{\text{cl}}(+0, \mathbf{x}) + \partial_t\phi_{\text{cl}}(+i0, \mathbf{x})] , \quad (2.16)$$

где последнее равенство получено с учётом уравнений (2.12). Теперь становится ясно, что  $\partial_t\phi_{\text{cl}}$  должно стать сингулярным при  $t = 0$  в пределе  $J \rightarrow 0$ , иначе энергия  $E$  обратится в нуль.

Сингулярная структура седловых решений  $\phi_{\text{cl}}$  важна при аналитическом и численном нахождении экспоненты  $F$  вероятности многочастичного рождения, поэтому остановимся на ней подробнее. Полезным источником информации об аналитических свойствах  $\phi_{\text{cl}}$  является решение при  $\lambda n = \lambda E = 0$  и  $J = 0$ , которое может быть найдено аналитически [6; 35]. Оно является пространственно однородным:

$$\phi_{\text{cl}}(t, \mathbf{x}) = -im\sqrt{2}/\sin(mte^{i\epsilon'}) . \quad (2.17)$$

Здесь  $\epsilon' \rightarrow +0$  играет роль регулятора. Можно убедиться, что конфигурация (2.17) является решением уравнения поля с нулевым источником, имеет  $a_{\mathbf{k}} = 0$ , и удовлетворяет граничным условиям (2.8), (2.9) и (2.10) при  $\theta = +\infty$ . Выражения (2.11) дают в этом случае нулевые квантовые числа для конечного состояния. Видно, что решение  $\phi_{\text{cl}}$  имеет сингулярность при  $t = 0$ , которая в данном случае является трёхмерной сингулярной гиперплоскостью в четырёхмерном пространстве-времени. Однако конфигурация (2.17) также сингулярна на последовательности точек  $t = \pi k e^{-i\epsilon'}/m$  при целых  $k$ , которая при  $k > 0$  расположена немного ниже действительной оси времени. В следующем разделе



мы продемонстрируем на численных данных, что, хотя при конечных  $E$  и  $n$  пространственная однородность решений нарушается, качественная структура сингулярных седловых решений оказывается такой же. А именно, эти сингулярности формируют [35; 62] последовательность гиперповерхностей  $t = t_*(\mathbf{x})$ ,  $t'_*(\mathbf{x})$ , и т.д., которые схематически изображены на Рис. 2.1. Первая — “основная” гиперповерхность  $t_*(\mathbf{x})$  проходит через точку  $t_* = \mathbf{x} = 0$  при  $J = 0$  и сдвигается в полуплоскость  $\text{Im } t_* < 0$  при ненулевом источнике. Это соответствует сингулярным ( $J = 0$ ) и регулярным ( $J \neq 0$ ) решениям на контуре A0B. Мы изобразили “основную” сингулярность на Рис. 2.1 при помощи сплошной ( $J = 0$ ) и пунктирной ( $J \neq 0$ ) линий, начинающихся от кругов с крестами.

В итоге описанный квазиклассический метод сводится к решению граничной задачи (2.6)–(2.11) и вычислению экспоненты (2.13). Последним шагом является экстраполяция результатов в  $J \rightarrow 0$  в соответствии с уравнением (2.4), что также было проделано численно. Стоит упомянуть, что в оригинальной статье [35] была предпринята попытка переписать граничную задачу (2.6)–(2.11) для непосредственно сингулярных решений, т.е. при  $J = 0$ , однако такой подход неудобен для построения численного метода и не используется в настоящей работе.

### 2.3. Сингулярная структура седловых решений

Знание поведения квазиклассических решений вблизи их сингулярностей  $t = t_*(\mathbf{x})$  важно для аккуратной численной экстраполяции  $J \rightarrow 0$ . Оно позволяет установить зависимость экспоненты  $F_J$  (2.13) при конечном, но малом источнике  $J(\mathbf{x})$ , от его параметров и построить экстраполирующую функцию. В то же время, это знание оказывается полезным при анализе свойств сингулярных решений в комплексном времени и позволяет пролить свет на их свойства при аналитическом продолжении.

Рассмотрим седловое решение  $\phi_{cl}$  вблизи одной из его поверхностей сингу-

лярности  $t_*(\mathbf{x})$ . Для этого введём евклидов временной интервал до сингулярности

$$\tau = i [t - t_*(\mathbf{x})], \quad (2.18)$$

и заменим координаты в уравнении поля на  $\tau$  и  $\mathbf{x}$ . В результате этого преобразования уравнение (2.6) заменится на

$$- [1 - (\partial_k t_*)^2] \partial_\tau^2 \phi_{\text{cl}} + 2i \partial_k t_* \partial_k \partial_\tau \phi_{\text{cl}} + i \Delta t_* \partial_\tau \phi_{\text{cl}} - \Delta \phi_{\text{cl}} + m^2 \phi_{\text{cl}} + \phi_{\text{cl}}^3 = 0, \quad (2.19)$$

где  $k = 1, 2, 3$  нумерует пространственные координаты<sup>2</sup>, а  $\Delta$  — оператор Лапласа. В этом разделе мы будем игнорировать источник в правой части уравнения (2.6), то есть рассматривать решение до и после точки  $t = 0$  на контуре A0B (Рис. 2.1). Для поиска решения в непосредственной близости от сингулярности можно ввести формальный степенной ряд по  $\tau$ :

$$\phi_{\text{cl}}(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{n=-1}^{+\infty} C_n(\tau, \mathbf{x}) \tau^n, \quad (2.20)$$

где первый сингулярный член порядка  $\tau^{-1}$  мотивирован решением (2.17). Далее мы продемонстрируем, что коэффициенты  $C_n$  не зависят от  $\tau$  или зависят от него медленно (логарифмически).

Подставляя выражение (2.20) в уравнение поля (2.19) мы получаем систему уравнений на коэффициенты  $C_n$ , которую можно решить разрешая её относительно  $C_n$  порядок за порядком по  $\tau$ . В главном порядке мы получаем значение коэффициента  $C_{-1} = \sqrt{2 - 2(\partial_k t_*)^2}$ . Уравнения для остальных коэффициентов  $C_n$  можно представить в общем виде

$$(-\partial_\tau^2 + 6\tau^{-2}) (\tau^n C_n) = \tau^{n-2} R_n. \quad (2.21)$$

Здесь правые части  $R_n$  зависят от  $t_*(\mathbf{x})$ , а также от коэффициентов  $C_m$  с индексом  $m \leq n - 1$ . Они могут быть получены явно из уравнения (2.19). Ясно, что уравнение (2.21) последовательно определяет  $C_n$ . В частности,

$$C_n = -\frac{R_n[t_*, C_{n-1}, C_{n-2}, \dots]}{(n+2)(n-3)}, \quad n = 0, 1, \text{ или } 2 \quad (2.22)$$

---

<sup>2</sup> По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

не зависят от  $\tau$ , а зависят только от  $t_*(\mathbf{x})$  и его производных.

Более детальное рассмотрение анзаца (2.20) обнаруживает два важных свойства. Во-первых, оператор в левой части уравнения (2.21) обращает в нуль функцию

$$\delta\phi_{\text{cl}} = \frac{iC_{-1}}{\tau^2} \delta t_*(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) \tau^3 \quad (2.23)$$

для произвольных  $\delta t_*(\mathbf{x})$  и  $B(\mathbf{x})$ . Это определяет произвол, которым обладают решения уравнений (2.21): мы можем изменить поверхность сингулярности  $t_* \rightarrow t_*(\mathbf{x}) + \delta t_*(\mathbf{x})$  и добавить независящую от  $\tau$  функцию  $B(\mathbf{x})$  к  $C_3$ . Количество этих произвольных функций в точности совпадает с количеством граничных или начальных условий, необходимых для решения дифференциального уравнения второго порядка. Во-вторых, коэффициент  $C_3$  должен зависеть от  $\tau$ , иначе уравнение (2.21) не будет удовлетворено при  $n = 3$ . В самом деле, левая часть уравнения обращается в нуль при  $C_3 = B(\mathbf{x})$ , что находится в противоречии с явным выражением

$$R_3(\mathbf{x}) = \frac{2}{C_{-1}^3} \partial_k (-4iC_{-1}C_2 \partial_k t_* + C_{-1} \partial_k C_1 - C_1 \partial_k C_{-1}) \neq 0. \quad (2.24)$$

В частности,  $R_3(0) = 2\sqrt{2} [m\Delta t_*(0)/3]^2 \neq 0$  при  $\mathbf{x} = 0$  в сферически-симметричном случае. При решении уравнения (2.21) в случае  $n = 3$  получаются следующее выражение

$$C_3(\tau, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) - \frac{1}{5} R_3(\mathbf{x}) \ln(m\tau). \quad (2.25)$$

Логарифмический вклад важен для установления аналитической структуры решения, так как теперь ясно, что сингулярность  $t = t_*(\mathbf{x})$  является точкой ветвления.

Можно продемонстрировать, что при более высоких порядках  $n \geq 4$  коэффициенты  $C_n(\tau, \mathbf{x})$  включают степени  $\ln(m\tau)$ , полученные из нелинейных членов в правых частях  $R_n$ . Это говорит о том, что  $t = t_*(\mathbf{x})$  является существенной особенностью с разрезом. Стоит напомнить, что существование таких особенностей в общем решении является свойством неинтегрируемых моделей [74], к которым относится рассмотренная нами скалярная теория  $\lambda\phi^4$ .

Резюмируя, рекуррентные соотношения (2.21) выражают все  $C_n(\tau, \mathbf{x})$  в терминах двух произвольных функций:  $t_*(\mathbf{x})$  и  $B(\mathbf{x})$ . Это именно тот набор данных Коши, который требуется для решения уравнения поля второго порядка; следовательно, общее решение последнего действительно имеет вид (2.20) вблизи каждой особенности. Представление (2.20) с логарифмически зависимыми коэффициентами известно в литературе как логарифмический  $\Psi$  ряд [74].

## 2.4. Предел $J \rightarrow 0$

Зная поведение седловых решений вблизи произвольной сингулярности, можно перейти к рассмотрению “главной” сингулярности вблизи  $t = 0$  и влиянию расположенного в этой точке источника на решение. Поэтому теперь мы восстанавливаем источник  $J(\mathbf{x})$  в правой части уравнения поля (2.19). Соответствующее этому случаю решение состоит из двух аналитических функций  $\phi_{\text{cl}}^-(t, \mathbf{x})$  и  $\phi_{\text{cl}}^+(t, \mathbf{x})$ , определённых на частях A0 и 0B комплексного временного контура на Рис. 2.1, соответственно. Функции  $\phi_{\text{cl}}^\pm$  сшиваются в  $t = 0$  в соответствии с уравнениями (2.12). А именно, эти функции совпадают в точке  $t = 0$ , но их производная по времени испытывает скачок. Предполагая, что  $\phi_{\text{cl}}^\pm$  имеют сингулярности вблизи  $t = \mathbf{x} = 0$ , мы можем записать их в виде ряда (2.20) в окрестности этой точки. Таким образом, мы параметризуем две части решения  $\phi_{\text{cl}}^\pm$  с помощью функций  $t_*^\pm(\mathbf{x})$  и  $B^\pm(\mathbf{x})$ . Условия сшивки приводят к следующим выражениям в главном порядке по  $t_*$ :

$$t_*^+ - t_*^- \approx -\frac{J(\mathbf{x})t_*^3(\mathbf{x})}{5\sqrt{2}}, \quad B^+ - B^- \approx -\frac{J(\mathbf{x})}{5t_*^2(\mathbf{x})}. \quad (2.26)$$

Видно, что разница между двумя поверхностями сингулярности  $t_*^\pm \approx t_*$  параметрически подавлена и по  $t_*^3(\mathbf{x})$  и по  $J(\mathbf{x})$ , тогда как скачок параметра  $B$  может быть большим [35].

Теперь, зная условия (2.26), можно вывести зависимость решения от конкретного вида источника. В силу универсальности экспоненты подавления ве-

роятности  $F$ , ответ, получаемый в пределе  $J \rightarrow 0$ , не зависит от конкретной формы источника, поэтому его выбор диктуется соображениями удобства. В нашем исследовании в качестве  $J$  мы выбрали источник в виде гауссового распределения

$$J(\mathbf{x}) = j_0 e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma^2} \quad (2.27)$$

с амплитудой  $j_0$  и шириной  $\sigma$ . В пределе  $\sigma \rightarrow 0$  функция (2.27) стремится к точечному источнику  $\propto \delta^{(4)}(x)$ , который использовался в оригинальной работе Д.Т. Шона [35]. Конечная ширина источника по пространству несколько облегчает численную реализацию метода. В качестве предела  $J \rightarrow 0$  используется предел, при котором амплитуда  $j_0$  стремится к нулю, а отношение  $j_0/\sigma$  держится постоянным. Это соответствует пределу малого узкого источника. Получим теперь явную зависимость решения от параметра  $j_0$ , используя выражение для энергии (2.16). Поскольку ширина источника мала, интеграл в этом выражении насыщается в небольшой окрестности  $t = \mathbf{x} = 0$ , где мы можем использовать приближение

$$\phi_{\text{cl}} \approx \frac{-i\sqrt{2}}{t - t_*(r)}, \quad t_*(r) = t_{*,0} + t_{*,2}r^2 + O(r^4), \quad (2.28)$$

при малых  $|t - t_*|$ ,  $r$  и малом  $j_0$ , используя ведущий сингулярный член  $\phi_{\text{cl}}^\pm \approx \sqrt{2}/\tau$  решения и игнорируя разницу между двумя поверхностями сингулярности

$$t_*^\pm(\mathbf{x}) \approx t_{*,0} + t_{*,2} \mathbf{x}^2. \quad (2.29)$$

Здесь комплексные параметры  $t_{*,0}$  и  $t_{*,2} \equiv \Delta t_*(0)/6$  характеризуют сдвиг и кривизну поверхности сингулярности при  $\mathbf{x} = 0$ . Выражение (2.16) принимает вид,

$$\begin{aligned} \lambda E &\approx - \int \frac{J(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \sqrt{2}}{(t_{*,0} + t_{*,2} \mathbf{x}^2)^2} = \\ &= \frac{4\pi j_0 \sqrt{2}}{(it_{*,0})^{1/2} (it_{*,2})^{3/2}} \left[ \frac{\pi}{4} e^\zeta (1 + 2\zeta) \operatorname{erfc} \sqrt{\zeta} - \frac{\sqrt{\pi\zeta}}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

где во втором равенстве мы вычислили интеграл для гауссового источника (2.27) амплитуды  $j_0$  и ширины  $\sigma$ . Мы также ввели комбинацию  $\zeta = t_{*,0}/(2t_{*,2}\sigma^2)$  и использовали дополнительную функцию ошибок  $\operatorname{erfc}(z)$ . Предположим, что поверхность сингулярности остается гладкой в пределе  $j_0 \rightarrow 0$  и  $j_0/\sigma = \text{const}$ , т.е.  $t_{*,2}$  конечна. Тогда конечность энергии  $E$  в этом пределе подразумевает, что  $t_{*,0} \rightarrow O(j_0^2)$  и  $\zeta$  стремится к константе. Этот результат используется в методе и подтверждается численно<sup>3</sup>. Это подразумевает, в частности, что поверхность сингулярности касается точки  $t = \mathbf{x} = 0$ , а квазиклассические решения действительно становятся сингулярными при  $j_0 = 0$ . Кроме того, вместе с уравнениями (2.26) это соотношение устанавливает условие сшивки между двумя частями решений при нулевом источнике [35]: их поверхности сингулярности должны совпадать ( $t_*^+ = t_*^-$ ), и скачок  $B(\mathbf{x})$  должен быть пропорционален  $\delta$ -функции:  $B^+ - B^- = \lambda E \delta^3(\mathbf{x})/5\sqrt{2}$ . Обращаем внимание, что к последнему условию следует относиться осторожно, поскольку степени  $B$  присутствуют в членах  $\Psi$ -ряда более высоких порядков.

Таким образом, мы можем заключить, что квазиклассическое решение и все его параметры  $F_J$ ,  $\theta$  и  $T$  могут быть выражены в виде степенных рядов по  $j_0^2$  при достаточно малых  $j_0$  и  $j_0/\sigma = \text{const}$ . Действительно, хотя отношение (2.30) было выведено в главном порядке, поправки к нему идут в степенях  $t_*(\mathbf{x}) \propto j_0^2$ . Таким образом, решение  $t_{*,0}$  этого уравнения при фиксированной энергии может быть выражено в виде ряда по  $j_0^2$ . Стоит отметить, что разложение в ряд по  $j_0$  может быть справедливым и в том случае, когда сам  $j_0$  не мал по сравнению с единицей. Это может произойти, если отношение  $\sigma/j_0$  будет достаточно мало (узкий источник) и сможет обеспечить дополнительное параметрическое подавления членов ряда. После разложения коэффициентов в уравнении (2.20) — нелинейных функций  $t_*(\mathbf{x})$  — и вычисления поправок, всё решение превра-

---

<sup>3</sup> Вдобавок к этому, мы провели более сильную проверку. Мы вычислили поверхности сингулярностей численных решений при различных  $j_0/\sigma$  и малых  $j_0$ . Найденные комбинации  $j_0/(t_{*,0}^2 t_{*,2}^3)$  и  $\zeta$  действительно оказывались связанными между собой уравнением (2.30).

щается в ряд по  $j_0^2$ . Этот факт используется в дальнейшем при экстраполяции результатов в  $j_0 = 0$ .

## 2.5. Численная реализация метода сингулярных решений

Квазиклассическая граничная задача, описанная в Разделе 2.2, в настоящей работе решалась численно. В этом разделе мы приведём её формулировку на дискретной пространственно-временной решётке и алгоритм поиска численных решений. Первым делом мы переходим к безразмерным величинам с  $m = 1$ . Мы предполагаем наличие сферической симметрии у седловых конфигураций:  $\phi_{\text{cl}} = \phi_{\text{cl}}(t, r)$ , где  $r \equiv |\mathbf{x}|$ . Этот анзац проходит через седловые уравнения (2.6)–(2.11) и согласуется со всеми остальными известными ранее решениями данной граничной задачи [35; 54; 62]. Сферическая симметрия также согласуется с отсутствием чувствительности квазиклассической экспоненты по отношению к малочастичному начальному состоянию: взяв последнее изотропным можно сделать весь процесс инвариантным относительно пространственных вращений. С другой стороны, сферически симметричный анзац оставляет в седловых уравнениях только координаты  $t$  и  $r$ , что ощутимо упрощает вычисления.

Мы вводим временную и пространственную решётки при помощи узлов  $t_j$  и  $r_i$ , покрывающих комплексный контур<sup>4</sup> времени A0B на Рис. 2.1 и конечную сферическую область  $0 \leq r_i \leq R$ , где  $-1 \leq j \leq N_t + 1$  и  $0 \leq i \leq N_r - 1$ . Комплексное поле  $\phi_{j,i} \equiv \phi_{\text{cl}}(t_j, r_i)$  определено в узлах полученной решётки. При вычислениях нам приходилось работать с решениями близкими к сингулярным, поэтому для уменьшения численных ошибок использовалась неоднородная решётка по времени: значительно уменьшались шаги по времени  $|t_{j+1} - t_j|$  около начала координат  $t = 0$ , то есть в окрестности “основной” сингулярности. Решёт-

---

<sup>4</sup> При больших  $\lambda n$  последовательность сингулярностей решения приближается к действительной оси времени и резко увеличивает численные ошибки. В этом случае мы деформируем “минковскую” часть контура в линию 0B’B, показанную на Рис. 2.1.

ка же по пространству была выбрана однородной. Такой подход показал себя с наилучшей стороны с точки зрения достижения разумной численной точности и задействования ограниченных вычислительных ресурсов.

Мы дискретизируем граничную задачу методом конечных разностей, используя схемы второго порядка. Дискретизуя функционал  $S_J$  (2.7), мы получаем нелинейную функцию  $S_J$  от  $\phi_{j,i}$  и решёточное уравнение поля

$$G_{j,i} \equiv \frac{\partial S_J}{\partial \phi_{j,i}} = 0. \quad (2.31)$$

Граничное условие Дирихле в асимптотическом прошлом (2.8) может быть задано на самом первом узле по времени  $t = t_{-1}$  — точка A на контуре:  $\phi_{-1,i} = 0$ . Численная реализация дискретизованного граничного условия в асимптотическом будущем (2.10) гораздо менее тривиальна. Как показано в Приложении A это граничное условие связывает значения поля на двух последних узлах по времени  $t = t_{N_t}$  и  $t_{N_t+1}$ . Последние два уравнения на множители Лагранжа  $T$  и  $\theta$  получаются после подстановки решёточных версий  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}^*$  в уравнения (2.11). Наконец, значение  $F_J$  даётся уравнением (2.13) с дискретизованным действием. Более детальная информация о разностной схеме для граничной задачи (2.6)–(2.11) приведена в Приложении A.

В итоге, решёточная формулировка квазиклассической граничной задачи включает в себя  $2N_r(N_t + 3) + 2$  действительных нелинейных уравнений для такого же числа неизвестных  $y_\alpha \equiv \{\text{Re } \phi_{j,i}, \text{Im } \phi_{j,i}, T, \theta\}$ . Мы решаем их, используя численный метод Ньютона-Рафсона [67]. А именно, предположим, что мы располагаем начальным приближением  $y_\alpha^{(0)}$  к решению, дающим небольшую невязку. Тогда поправку  $\delta y_\alpha = y_\alpha - y_\alpha^{(0)}$  можно искать при помощи следующей системы линейных по  $\delta y_\alpha$  уравнений

$$G_\alpha(y^{(0)}) + \sum_\beta \delta y_\beta \left. \frac{\partial G_\alpha}{\partial y_\beta} \right|_{y^{(0)}} = 0, \quad (2.32)$$

где через  $G_\alpha$  обозначена левая часть всех решёточных уравнений: уравнения (2.31), граничных условий и уравнений на  $T$  и  $\theta$ . После решения уравнений (2.32)



мы улучшаем приближение к решению  $y_\alpha^{(0)} \rightarrow y_\alpha^{(0)} + \delta y_\alpha$  и далее повторяем эту процедуру пока метод не сойдётся. Отметим, что метод Ньютона-Рафсона очень чувствителен к выбору самого первого приближения  $y_\alpha^{(0)}$ , но, если оно достаточно близко к решению, метод сходится квадратично [67].

## 2.6. Численный поиск сингулярных решений

Численный метод, описанный в предыдущем разделе, позволяет получить целый набор седловых конфигураций, имея на руках всего одно репрезентативное решение. В самом деле, пусть  $y_\alpha^{(0)} = \{\phi_{\text{cl}}^{(0)}(t, \mathbf{x}), T^{(0)}, \theta^{(0)}\}$  — решение с параметрами  $\lambda n^{(0)}$ ,  $\varepsilon^{(0)}$ ,  $j_0^{(0)}$ , и  $\sigma^{(0)}$ , где последние две величины параметризуют гауссов источник  $J(\mathbf{x})$  (2.27). Небольшими изменениями одного или нескольких параметров, например  $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \delta\varepsilon$ , мы численно находим новое решение  $y_\alpha$ , используя  $y_\alpha^{(0)}$  в качестве первого приближения. Если изменение параметров достаточно мало, невязка первого приближения будет достаточно мала для того, чтобы метод сошёлся. После этого мы используем полученное решение в качестве  $y^{(0)}$  для новых параметров и повторяем процедуру, сделав таким образом ещё один шаг в пространстве параметров и найдя новое решение, и так далее. В итоге удаётся покрыть решениями всю достижимую область параметров.

При таком подходе важный вопрос заключается в том, как получить самую первую конфигурацию  $y^{(0)}$ . Она должна быть физической и давать доминирующий вклад в интеграл по траекториям для вероятности многочастичного рождения. Очевидно, при некоторых значениях параметров процесса и источника членом взаимодействия четвёртой степени по полю в действии можно пренебречь, тогда частицы в конечном состоянии будут рождаться за счёт классического источника  $J(\mathbf{x})$ . Заметим, что этот режим противоположен искомому, в котором мы переходим к пределу  $J \rightarrow 0$ , когда все частицы рождаются за счёт самодействия поля, а результат не чувствителен к профилю источника. Опустив вклад  $\phi_{\text{cl}}^3$  в уравнении поля (2.6), легко найти квазиклассическое решение

граничной задачи (2.6)–(2.11) в линейной теории

$$\phi_{\text{cl}}^{(\text{lin})}(t, \mathbf{x}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{J^*(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x} + \theta - 2\omega_{\mathbf{k}}T} - i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{J(-\mathbf{k}) e^{ikx}}{k^2 - m^2 + i0}, \quad (2.33)$$

где первое слагаемое удовлетворяет однородному уравнению, второе равно свёртке фейнмановской функции Грина с источником, а  $J(\mathbf{k})$  — это Фурье-образ источника. Взяв интеграл по  $k^0$  во втором слагаемом из (2.33), мы приводим решение к виду

$$\phi_{\text{cl}}^{(\text{lin})} = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} [J(-\mathbf{k}) + J^*(\mathbf{k}) e^{\theta - 2\omega_{\mathbf{k}}T}] \quad \text{при } t < 0, \quad (2.34)$$

$$\phi_{\text{cl}}^{(\text{lin})} = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} [J(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + J^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t + \theta - 2\omega_{\mathbf{k}}T}] \quad \text{при } t > 0. \quad (2.35)$$

Аналитически продолжая эту функцию при  $t < 0$  на верхнюю половину мнимой оси  $t = i|t|$ , мы видим, что она спадает при  $t \rightarrow +i\infty$  в соответствии с граничным условием (2.8). При  $t > 0$  конфигурация (2.35) удовлетворяет граничному условию (2.10) в асимптотическом будущем, с  $a_{\mathbf{k}} = -J(\mathbf{k})/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}$  и  $b_{\mathbf{k}} = -J(\mathbf{k})e^{\theta - 2\omega_{\mathbf{k}}T}/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}$ .

При данных  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$  можно получить параметры конечного состояния, используя (2.11)

$$\lambda E = e^{\theta} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2(2\pi)^3} |J(\mathbf{k})|^2 e^{-2\omega_{\mathbf{k}}T} \quad \lambda n = e^{\theta} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} |J(\mathbf{k})|^2 e^{-2\omega_{\mathbf{k}}T}. \quad (2.36)$$

Значение параметра  $\theta$  можно вычислить при помощи второго уравнения. Тогда первое будет связывать  $T$  с  $\varepsilon = E/n - m$ . Наконец, экспонента подавления

$$F_J = 2\lambda ET - \lambda n\theta + \text{Re} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{J(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}} [J(-\mathbf{k}) + J^*(\mathbf{k}) e^{\theta - 2\omega_{\mathbf{k}}T}] \quad (2.37)$$

получается при подстановке решения (2.33) в уравнение (2.13) без учёта члена самодействия порядка  $\propto \phi^3$ .

Мы используем полученные выше выражения следующим образом. Для данных  $\lambda n$  и  $\varepsilon$  мы выражаем  $\theta$  и получаем нелинейное уравнение на  $T = T(\varepsilon)$ , используя (2.36). Это уравнение решается с помощью метода дихотомии [67]

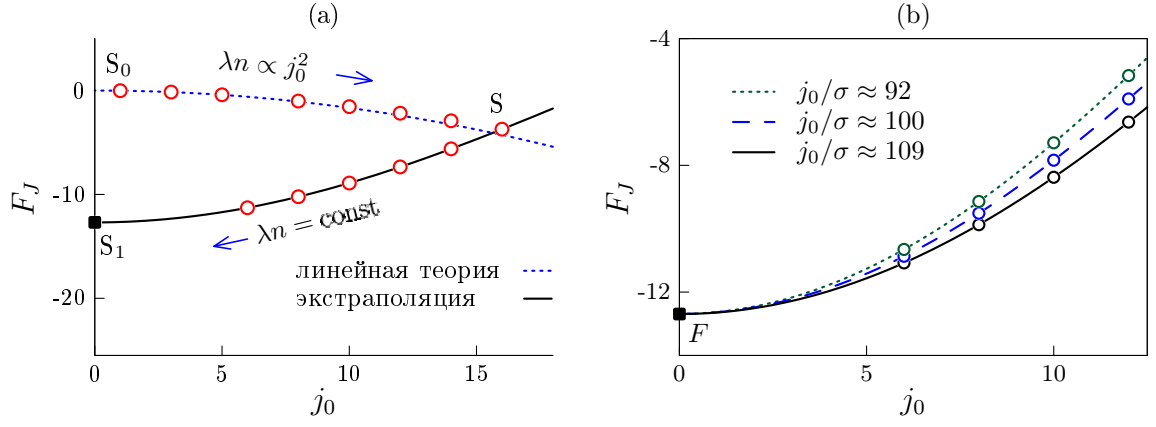


Рис. 2.2. (а) Экспонента  $F_J$  в зависимости от амплитуды источника  $j_0$  при  $\varepsilon = 3$ . Цепочка решений  $S_0S$  (круги) получена при помощи увеличения  $j_0$  при фиксированных  $\lambda n/j_0^2 \approx 10^{-2}$  и  $\sigma \approx 0.13$ , в то время как решения с нижней цепочки  $SS_1$  (также круги) имеют фиксированное  $\lambda n \approx 2.51$  и  $j_0/\sigma \approx 120$ . Пунктирная и сплошная линия показывают экспоненту подавления (2.37) в линейной теории и полиномиальную экстраполяцию (2.41) в  $j_0 = 0$  соответственно. (б) Экстраполяции  $j_0 \rightarrow 0$  при различных значениях  $j_0/\sigma$  для  $\varepsilon = 3$  и  $\lambda n = 2.51$  (линии, проходящие через круги). Мы положили  $m = 1$ .

и численных квадратурных формул для интегралов по  $\mathbf{k}$ . Напомним, что мы всегда используем гауссов источник (2.27). Его Фурье-образ равен

$$J(\mathbf{k}) \equiv \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = j_0 (2\pi\sigma^2)^{3/2} e^{-\mathbf{k}^2\sigma^2/2}. \quad (2.38)$$

Таким образом, первая конфигурация для численного метода решения седловых уравнений получается после вычисления интегралов в уравнениях (2.34), (2.35) в каждом узле решётки ( $t_j, r_i = |\mathbf{x}|_i$ ). Экспонента подавления в линейной теории даётся выражением (2.37). Этот результат изображён при помощи пунктирной линии на Рис. 2.2а.

Ясно, что вышеописанное решение линейного уравнения пропорционально амплитуде источника  $j_0$ , в то время как  $\lambda n$  и  $\lambda E$  квадратичны по полю и поэтому пропорциональны  $j_0^2$ . Член взаимодействия  $\phi_{cl}^3 \propto j_0^3$  в уравнении будет пренебрежимо мал в следующем пределе

$$j_0 \rightarrow 0, \quad \lambda n \propto j_0^2 \quad \text{при фиксированных } \varepsilon \text{ и } \sigma. \quad (2.39)$$

Таким образом, мы ожидаем, что при малых  $j_0$  и  $\lambda n$  конфигурация (2.33) при-

ближённо удовлетворяет полной нелинейной граничной задаче, и невязка в этом случае определяется третьей степенью этого решения.

Важно отметить, что решение в свободной теории единственно и определено является физическим<sup>5</sup>, так как интеграл по траекториям в этом случае гауссов. Поэтому конфигурация (2.33) используется в качестве самого первого приближения для численной процедуры, описанной выше. А именно, задав  $y_\alpha^{(0)} = \{\phi_{\text{cl}}^{(\text{lin})}, T^{(\text{lin})}, \theta^{(\text{lin})}\}$  при достаточно малых  $j_0$ ,  $\lambda n \sim O(j_0^2)$ , и конечных  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , мы обнаруживаем, что итерации быстро сходятся к нелинейному решению с теми же параметрами. Вычисленная для него экспонента подавления  $F_J$ , изображена при помощи круга  $S_0$  на Рис. 2.2а. Поле этого мы начинаем увеличивать  $j_0$  и  $\lambda n \propto j_0^2$  малыми шагами и находим численные решения на каждом шаге, пока не получим конфигурации с  $\lambda n \sim O(1)$ ; см. цепочку кругов  $S_0S$  ведущую к решению  $S$  на рисунке. Конфигурации с большим  $j_0$  и  $\lambda n$  уже визуальнo отличаются от полученных в свободной теории. На Рис. 2.2а приведено сравнение экспонент подавления с предсказаниями линейной теории (пунктирная линия). Как и ожидается, два графика близки при малых  $j_0$ , но начинают различаться при больших значениях этого параметра. Изменяя параметры  $\lambda n$ ,  $\varepsilon$ ,  $j_0$ , и  $\sigma$  малыми шагами, мы воспроизводим всю непрерывную ветку численных решений и вычисляем экспоненту  $F_J$ .

Последняя, но достаточно нетривиальная часть нашей процедуры состоит в вычислении предела малого числа частиц  $J \rightarrow 0$ , или, точнее,

$$j_0 \rightarrow 0, \quad \sigma \propto j_0 \quad \text{при фиксированных } \varepsilon \text{ и } \lambda n. \quad (2.40)$$

Мы уже ранее обсуждали, что квазиклассические конфигурации становятся сингулярными в этом пределе. По этой причине они не могут быть получены численно напрямую. Нижняя ветвь численных решений  $SS_1$ , изображённая на

---

<sup>5</sup> Мы проверили это явно, вычислив матричные элементы  $\langle f; E, n | \exp\{-\int d^3x J\hat{\phi}/\lambda\} | 0 \rangle$  используя алгебру операторов рождения и уничтожения в линейной теории, а затем просуммировав по конечным состояниям в уравнении (2.1) при помощи метода перевала. Полученное значение  $F_J$  совпало с тем, что было получено с использованием решения (2.33).

Рис. 2.2а (круги), получена стартуя с  $S$  уменьшением  $j_0$  в соответствии с режимом (2.40). Последний представитель  $S_1$  этой ветви уже имеет небольшую точность, а решения при еще меньшем  $j_0$  не могут быть получены с приемлемой численной ошибкой<sup>6</sup>. Выход из положения состоит в том, чтобы экстраполировать результаты в точку  $j_0 = 0$  используя поведение квазиклассических решений при малом ненулевом источнике. В Разделе 2.4 было продемонстрировано, что седловая конфигурация, её множители Лагранжа  $T$ ,  $\theta$ , и экспонента  $F_J$  могут быть записаны, как степенной ряд по  $j_0^2$ . Например,

$$F_J(\lambda n, \varepsilon) = F + F_1 j_0^2 + F_2 j_0^4 + F_3 j_0^6 + \dots, \quad (2.41)$$

где коэффициенты  $F_i(\lambda n, \varepsilon)$  не зависят от  $j_0$ . На практике, для каждого выбранного  $\lambda n$  и  $\varepsilon$  мы вычисляли решения при нескольких малых значениях  $j_0$  но одинаковых  $j_0/\sigma$ . Далее мы фитировали их экспоненты  $F_J$  и параметры  $T$ ,  $\theta$  кубическими полиномами по  $j_0^2$ , то есть использовали четыре первых слагаемых в выражении (2.41). Эта процедура проиллюстрирована на Рис. 2.2а, где видно, что выражение (2.41) (сплошная линия) корректно описывает численные данные  $SS_1$  (круги). Экспонента  $F$  при малом числе частиц в начальном состоянии и значения  $T$  и  $\theta$  определяются первыми коэффициентами<sup>7</sup> соответствующих полиномов (закрашенный квадрат  $F$  на рисунке).

Зависимость источника от двух параметров  $j_0$  и  $\sigma$  позволяет явно проверить универсальность экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения, изучая предел  $J \rightarrow 0$  при различных  $j_0/\sigma$ . Напомним, что предположение об универсальности [24; 51] утверждает, что  $F$  не чувствительна к малочастичному начальному состоянию, в частности, к профилю малого по амплитуде источника  $J(\mathbf{x})$  и его относительной ширине  $\sigma/j_0$ . На Рис. 2.2b мы подтверждаем, что это действительно так. А именно, выполнив три независимых полиномиальных фита (линии) данных, полученных для разных  $j_0/\sigma$  (кру-

<sup>6</sup> Аналитическая структура решений с учётом полученных численных данных будет обсуждаться в Главе 3.

<sup>7</sup> В дальнейшем подпись  $j_0 = 0$  будет означать, что была проведена экстраполяция.

ги), мы приходим к одному тому же результату для  $F$  (закрашенный квадрат). Стоит подчеркнуть, что предположение об универсальности лежит в основе используемого квазиклассического метода [35].

Следует подчеркнуть, что численная экстраполяция  $J \rightarrow 0$  является основным источником ошибок в разработанном численном методе. Мы оцениваем их, изменяя количество точек данных и интервалы по параметру  $j_0$  в экстраполяционных фитах. Соответствующий разброс результатов экстраполяции существенно зависит от  $\varepsilon$  и  $\lambda n$ , а также очень чувствителен к ошибкам дискретизации, добавляющим псевдослучайную составляющую к данным. Как правило, финальный результат для  $F$  устойчив в пределах интервала точности 0.7%, который, однако, увеличивается до 6% при самых больших и самых малых значениях  $\varepsilon$  и наибольших множественностях конечного состояния. Точность экстраполированных  $T$  и  $\theta$  лучше, чем 8% в центре нашей области параметров, но ухудшается до 13 – 20% для наименьшего<sup>8</sup>  $\varepsilon$  и  $\lambda n$ . В следующей главе, где обсуждаются численные результаты, мы изображаем ошибки экстраполяции с помощью вертикального интервала погрешности всякий раз, когда они больше размера точки на графике.

## 2.7. Выводы ко второй главе

Разработанный в данной главе численный метод позволяет получать вероятности многочастичного рождения при произвольных  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . Он основан на численном решении нелинейной граничной задачи для седловых уравнений в присутствии источника  $J$  методом Ньютона-Рафсона. Экспонента подавления вероятности многочастичного рождения получается путём экстраполяции численных результатов при конечном источнике в точку  $J = 0$ . В силу того, что используемый в наших вычислениях источник  $J(\mathbf{x})$  описывается двумя параметрами — амплитудой  $j_0$  и шириной  $\sigma$ , нам удалось явно проверить универ-

---

<sup>8</sup> Формально относительная погрешность  $T$  превышает 100% при большом  $\varepsilon$ , когда этот параметр мал.

сальность экспоненты, взяв пределы исчезающего источника при разных  $j_0/\sigma$ .

В следующей главе разработанный метод применяется для нахождения вероятностей многочастичного рождения в теории с действием (1). Однако следует отметить, что разработанная численная реализация квазиклассического метода сингулярных решений Д.Т. Шона является весьма общей и может быть применена к другим бозонным теориям.

# Вероятность многочастичного рождения в скалярной теории с потенциалом $\lambda\phi^4$

### 3.1. Введение к третьей главе

Третья глава посвящена верификации численного метода получения вероятности многочастичного рождения, который был описан в Главе 2, а также полученным при помощи него новым физическим результатам. Численный метод верифицировался путём сравнения полученной при помощи него экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения в теории  $\lambda\phi^4$  при  $\lambda n \ll 1$  с известными из литературы аналитическими ( $\varepsilon \ll m$ ) и численными ( $\varepsilon \gtrsim m$ ) результатами. Режим малых  $\lambda n$  может быть описан пертурбативно. В этом режиме при малых  $\varepsilon/m$ , т.е. вблизи порога, экспонента может быть вычислена путём суммирования диаграмм [6; 13; 20; 24]. Петлевые поправки к экспоненте в этом пределе равны  $O(\lambda n)^2$ . Пертурбативный ответ в однопетлевом приближении успешно воспроизводится методом сингулярных решений [35], что в своё время выступило сильным аргументом в пользу правильности квазиклассического описания многочастичного рождения. Как будет продемонстрировано в этой главе, разработанный численный метод воспроизводит этот ответ. Также было проведено сравнение с результатами, полученными в других работах на основе метода Д.Т. Шона [35]: с поправкой к экспоненте подавления порядка  $O(\varepsilon^2)$  [52] и численными данными при  $\varepsilon \gtrsim m$  [53; 54]. В работе [53] использовался анзац  $O(4)$  симметричной поверхности сингулярности седлового решения  $\phi_{cl}$ , аналитически продолженного в евклидово время. В работе [54] были учтены поправки, связанные с отклонением от  $O(4)$  симметрии. Полученные нами численные результаты согласуются со всеми перечисленными выше. Описанию этого сравнения посвящён Раздел 3.2.



Далее в Разделе 3.3 обсуждаются новые результаты для экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения в теории скалярного поля с потенциалом  $\lambda\phi^4$ . Они соответствуют ранее не исследованному режиму квазиклассически большого конечного числа частиц  $n \gtrsim \lambda^{-1}$  и произвольного  $\varepsilon$ . Отдельно проанализированы квазиклассические решения, а также предельные случаи  $\lambda n \rightarrow +\infty$  и  $\varepsilon \gg t$ . Изучение режима  $\varepsilon \ll t$  позволило получить пороговые амплитуды при  $\lambda n \gtrsim 1$ . Раздел 3.4 посвящён обсуждению полученных результатов.

## 3.2. Сравнение при малых $\lambda n$

Для проверки разработанного в данной работе численного метода мы сравнили вероятности, полученные с его помощью, с известными древесными результатами, что соответствует режиму  $\lambda n \ll 1$ . В этом случае квазиклассическая экспонента  $F$  имеет следующий вид [35],

$$F = \lambda n \ln \left( \frac{\lambda n}{16} \right) - \lambda n + \lambda n f(\varepsilon) + O(\lambda n)^2, \quad (3.1)$$

где  $f(\varepsilon)$  — некоторая функция. При малых  $\lambda n$  вклады в выражение (3.1), не входящие в  $O(\lambda n)^2$ , могут быть получены только из древесных диаграмм. Действительно, петлевые поправки пропорциональны более высоким степеням  $\lambda$ , рассматривая же предел малых  $\lambda n$  при  $\lambda n = \text{const}$  мы игнорируем старшие степени  $\lambda n$  в экспоненте, начиная с  $(\lambda n)^2$ . В силу того, что часть экспоненты  $O(\lambda n)^2$  определяется суммой  $L$ -петлевых поправок к амплитуде  $\propto (\lambda n^2)^L$ , их игнорирование сохранит только древесный вклад в амплитуды, а значит и в вероятности. Отметим, что такой аргумент работает в силу того, что при  $1 \ll n \ll \lambda^{-1}$  применим и квазиклассический подход, и теория возмущений. Вблизи порога  $\varepsilon \ll t$  выражение для  $f(\varepsilon)$  получается напрямую из явного выражения для древесной амплитуды и фазового объёма частиц в конечном состоянии, а при больших  $\varepsilon$  эту функцию можно получить численно [54]. Сто-

ит отметить, что полученная в работе [54]  $f(\varepsilon)$  почти в точности совпадает с более простой численной оценкой, предполагающей  $O(4)$ -симметрию седлового решения из [53] при  $\varepsilon \leq 10m$ . Мы будем использовать эти результаты для сравнения с полученными в настоящей работе численными данными, которые лежат именно в этой области значений  $\varepsilon$ .

Численные результаты, полученные для  $f(\varepsilon)$  с помощью разработанного метода, изображены на Рис. 3.1 кругами с погрешностями, которые соответствуют численным ошибкам, возникающим при экстраполяции  $j_0 \rightarrow 0$ . Полученные

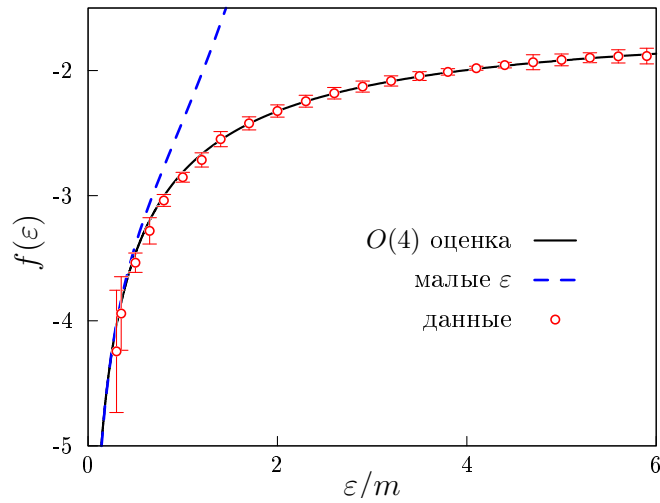


Рис. 3.1. Численные значения для функции  $f(\varepsilon)$  (круги с интервалами погрешностей) в сравнении с древесными результатами:  $O(4)$ -симметричной оценкой из работ [53; 54] (сплошная линия) и разложением при малых  $\varepsilon$  (3.2) (пунктирная линия).

результаты покрывают конечный интервал по энергии  $0.3m \leq \varepsilon \leq 6m$ . Такой интервал был выбран по следующим причинам: при меньших  $\varepsilon$  седловое решение становится сильно нерелятивистским и уже не помещается в пространственно-временной объём, доступный для вычислений, а при  $\varepsilon \geq 6m$  решение содержит высокочастотные моды, которые не могут быть разрешены на используемой решётке. Сведения о параметрах использованной решётки приведены в Приложении А.

Наши численные данные, представленные на Рис. 3.1, согласуются с древесными результатами, полученными из литературы. Они отлично совпадают с результатами, полученными в [53] с использованием  $O(4)$ -симметричных ре-

шений (сплошная линия). Кроме того, обе численные кривые приближаются к пертурбативному ответу при малых  $\varepsilon$  [52],

$$f = \frac{3}{2} \ln \frac{\varepsilon}{3\pi} + \frac{3}{2} - \frac{17}{12} \varepsilon + \frac{1327 - 96\pi^2}{432} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.2)$$

Результаты этого сравнения показывают, что разработанный численный алгоритм действительно является численной реализацией метода сингулярных решений Д.Т. Шопа [35].

### 3.3. Результаты при больших $\lambda n$

#### 3.3.1. Седловые решения граничной задачи

Прежде чем перейти к рассмотрению новых результатов для экспоненты подавления, интересно обсудить свойства седловых решений, полученных численно при  $\lambda n \gtrsim 1$ . На Рис. 3.2 изображен пример решения граничной задачи с относительно небольшим числом частиц в конечном состоянии  $\lambda n \approx 0.63$  и малой кинетической энергией  $\varepsilon = 0.5m$ . Поверхность на этом рисунке показывает

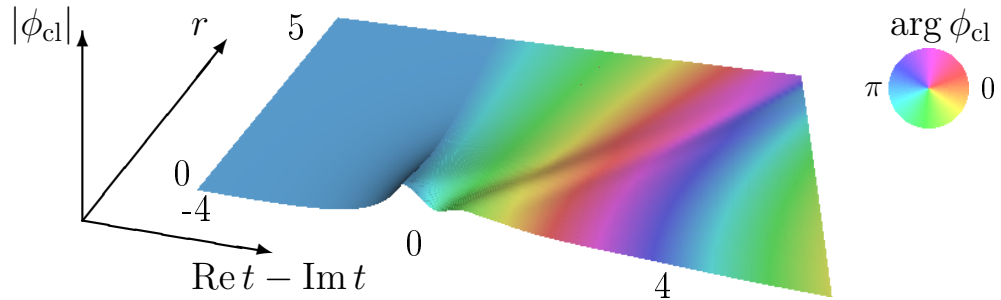


Рис. 3.2. Седловое решение  $\phi_{cl}(t, r)$  с параметрами  $\lambda n \approx 0.63$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $j_0 = 0.6$ , и  $\sigma \approx 0.18$  при  $m = 1$ . Цвет обозначает комплексную фазу решения.

модуль конфигурации  $\phi_{cl}$  как функцию радиальной координаты  $r$  и параметра  $\text{Re } t - \text{Im } t$ , рост которого соответствует продвижению вдоль комплексного контура  $A_0B^1$ , изображённого на Рис. 2.1, в то время как цвет изображает комплексную фазу  $\phi_{cl}$ . Видно, что решение экспоненциально спадает в направлении

<sup>1</sup> Как упоминалось в Разделе 2.5, некоторые решения были получены на деформированном контуре  $A_0B^1$ . В настоящем разделе мы всегда демонстрируем решения на прямоугольном контуре  $A_0B$ .

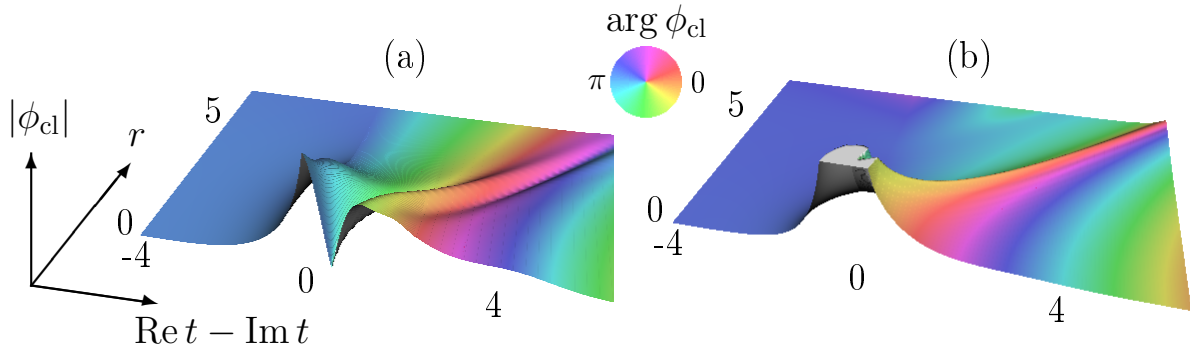


Рис. 3.3. Два квазиклассических решения, полученных из решения с Рис. 3.2 при помощи увеличения (а) числа частиц в конечном состоянии  $\lambda n$  и после этого — (б) средней кинетической энергии  $\varepsilon$  рождённых частиц. Пик решения (б) при  $t, r \approx 0$  обрезан для удобства визуализации. Параметры решений: (а)  $\lambda n \approx 18.8$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $j_0 = 7.8$ ,  $\sigma \approx 0.41$  и (б)  $\lambda n \approx 18.8$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 12$ ,  $\sigma \approx 0.2$ . Цвет соответствует фазе комплексного  $\phi_{cl}(t, r)$ . Параметр  $m$  положен равным 1.

левой части графика, то есть при  $t \rightarrow +i\infty$ , как того требует начальное условие. Также оно имеет резкий пик около начала координат  $t = r = 0$ , где находится источник  $J(\mathbf{x})$ . Обратим внимание, что последний отличен от нуля для всех построенных для визуализации решений. При  $t > 0$  решение на Рис. 3.2 описывает комплекснозначный волновой пакет, который движется внутри светового конуса. На Рис. 3.3 показаны примеры двух других решений с разными значениями  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ .

Решения на Рис. 3.2 и 3.3 имеют относительно большое значение  $j_0$  и всё ещё далеки от сингулярного предела. Однако, части этих решений, расположенные близко к началу координат  $t = r = 0$ , сильно зависят от амплитуды источника и превращаются в высокий и резкий пик, когда значение  $j_0$  уменьшается. В самом деле, в Главе 2 был выведен общий вид решения (2.28) вблизи сингулярности  $t = t_*(r)$ :  $\phi_{cl} \approx -i\sqrt{2}/(t - t_*)$  при малых  $|t - t_*|$ ,  $r$  и малом  $j_0$ , а  $t_*(r) = t_{*,0} + t_{*,2}r^2 + O(r^4)$ , где  $t_{*,k}$  — коэффициенты разложения по Тейлору общего вида. Эта форма решения подтверждается численными данными, представленными на Рис. 3.4а, где численное решение (круги) хорошо совпадает с (2.28) при  $t = \pm 0$  и малых  $r$ . Также фит численных данных (круги)

подтверждает выведенную в Главе 2 зависимость<sup>2</sup>  $t_*(0)$  от  $j_0^2$  (сплошная линия) на Рис. 3.4b.

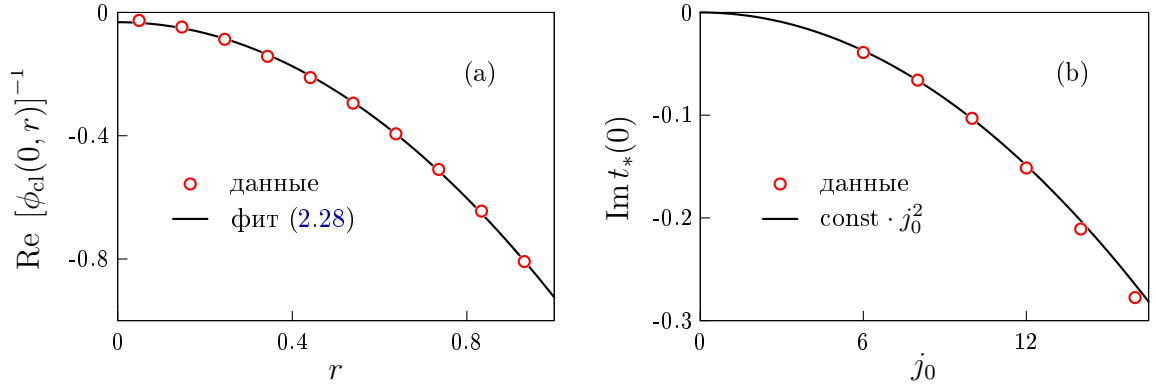


Рис. 3.4. (a) Действительная часть обратного поля  $\text{Re} [\phi_{\text{cl}}(0, r)]^{-1}$  при  $t = +0$  и малых  $r$ . Численные результаты (кружки) интерполируются полиномом второй степени из уравнения (2.28) (сплошная линия). Параметры изображённого решения  $\lambda n \approx 2.51$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 6$  и  $\sigma = 0.05$ . (b) Положение вершины  $t_*(0)$  “главной” поверхности сингулярности в зависимости от  $j_0$  (кружки). Этот график соответствует  $j_0/\sigma = 120$  и тем же параметрам конечного состояния, как на рисунке (a). Сплошная линия соответствует фиту параболы  $t_*(0) \propto j_0^2$ . Параметр  $m$  положен равным 1.

На Рис. 3.3b продемонстрировано решение с большой средней кинетической энергией  $\varepsilon$  внешних частиц. Эта конфигурация имеет существенно более резкий профиль и узкий разлетающийся волновой пакет, локализованный на световом конусе  $r \sim t$ . Можно предположить, что такие решения с  $\varepsilon \gg m$  могут быть получены в безмассовой теории, а параметр  $m^2$  приводит к их небольшой деформации. Мы дополнительно обосновываем это наблюдение в Разделе 3.3.3.

С ростом  $\lambda n$  решения становятся заметно больше по амплитуде и более нелинейными при промежуточных значениях  $|t|$  и  $r$ , см. Рис. 3.3a. Кроме того, у них проявляются дополнительные пики вблизи второй поверхности сингулярности  $t'_*(r)$  из цепочки, изображённой на Рис. 2.1. Это наблюдение свидетельствует в пользу существования последовательности поверхностей сингулярностей у седловых решений при произвольных значениях  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ , аналогично тем,

<sup>2</sup> Значение  $t_*(0)$  находилось посредством аналитического продолжения численного  $\phi_{\text{cl}}$  в полуплоскость  $\text{Im } t < 0$  при помощи уравнения поля.

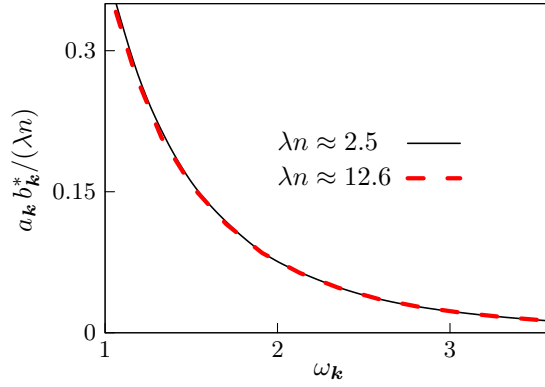


Рис. 3.5. Отмасштабированные распределения чисел заполнения  $a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*/(\lambda n)$  в конечном состоянии как функции от энергии частиц  $\omega_{\mathbf{k}}$ . Два графика соответствуют  $\lambda n \approx 2.51$  и  $\lambda n \approx 12.57$  при  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 0$ . Мы положили параметр  $m$  равным 1.

которые имеются у решения (2.17) при  $\varepsilon = 0$  и  $\lambda n = 0$ . При этом эти дополнительные особенности решения приближаются к оси действительного времени при увеличении  $\lambda n$  и начинают влиять на эволюцию поля. Также численно был обнаружен следующий скейлинг (от англ. to scale — масштабировать) в линейной области решения:

$$\phi_{\text{cl}}(t, r) \approx \sqrt{\lambda n} \cdot \tilde{\phi}(t, r) \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad \lambda n \gg 1, \quad (3.3)$$

где  $\tilde{\phi}$  не зависит от числа частиц. В самом деле, если посмотреть на отмасштабированные распределения чисел заполнения конечного состояния в импульсном пространстве  $a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*/(\lambda n)$ , изображённые на Рис. 3.5, то видно, что их зависимость от энергии частиц  $\omega_{\mathbf{k}}$  имеет одинаковую форму при существенно различающихся значениях  $\lambda n$  в соответствии с (3.3). Мы предполагаем, что асимптотическое свойство (3.3) может быть справедливо не только в рассмотренной теории  $\lambda\phi^4$ , но в широком классе моделей. Кроме того, не зависящая от  $n$  форма распределения испускаемых частиц, представленная на Рис. 3.5, может служить полезной контрольной сигнатурой для многочастичного рождения, если последнее когда-либо будет рассматриваться в экспериментальном контексте.

Вышеупомянутый скейлинг не справедлив в области взаимодействия, где нельзя пренебречь членом  $\phi^3$  в уравнении поля (2.6). Действительно, подста-

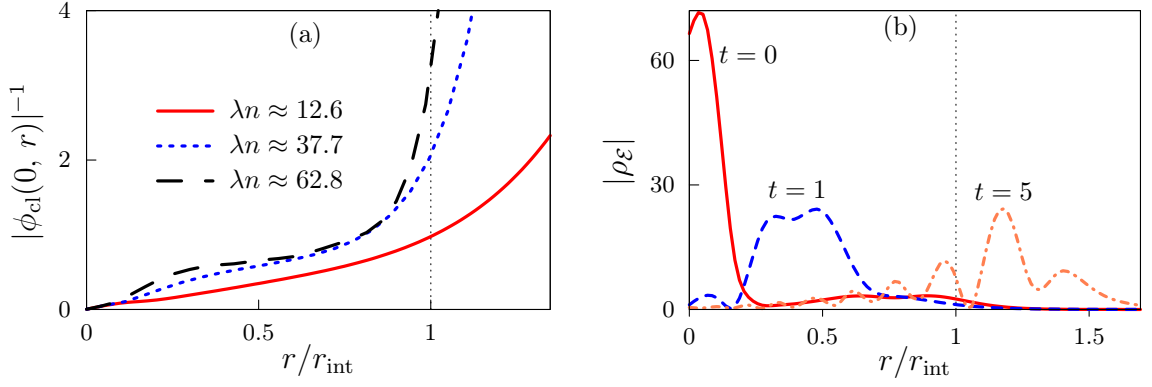


Рис. 3.6. (a) Обратное значение модуля поля  $|\phi_{\text{cl}}(0, r)|^{-1}$  как функция от масштабированной радиальной координаты  $r/r_{\text{int}}$  при  $t = 0$ . Все графики соответствуют  $\varepsilon = 1$ ,  $j_0 = 12$ , и  $\sigma \approx 0.19$ . (b) Плотность энергии  $|\rho_\varepsilon|$  в зависимости от  $r/r_{\text{int}}$  для решения с  $\lambda n \approx 37.7$ . Остальные параметры взяты теми же, что на рисунке (a). Параметр  $m$  положен равным 1.

новка (3.3) в это уравнение сделала бы этот нелинейный вклад доминирующим и нескомпенсированным в пределе  $\lambda n \rightarrow +\infty$ . Мы можем оценить размер  $r_{\text{int}}$  нелинейной области, заметив, что при  $\varepsilon \gtrsim O(m)$  расходящиеся волны распространяются с уменьшающимися амплитудами  $\phi_{\text{cl}} \propto \sqrt{\lambda n}/r$  примерно вдоль светового конуса  $r \sim t$ . Тогда член  $\phi^3$  в уравнении важен в области взаимодействия, чей размер можно оценить как

$$r \lesssim r_{\text{int}} \sim \frac{\sqrt{\lambda n}}{(\varepsilon^2 + 2m\varepsilon)^{1/2}} \quad \text{и} \quad t \lesssim r_{\text{int}}. \quad (3.4)$$

Это предположение подтверждается нашими численными результатами. В частности, на Рис. 3.6а показан обратный модуль поля  $|\phi_{\text{cl}}(0, r)|^{-1}$  при  $t = 0$ , как функция от  $r/r_{\text{int}}$  для трех больших значений  $\lambda n$ . Видно, что с ростом множественности графики при  $r < r_{\text{int}}$  приближаются к определенному, почти плоскому профилю, имеющему высоту  $\phi_{\text{cl}}^{-1} \lesssim m^{-1}$ . Напомним, что  $\phi_{\text{cl}}^{-1}(0, r)$  при малых  $r$  связано с положением поверхности сингулярности  $t_*(r)$ , которая, следовательно, также является плоской при больших  $\lambda n$  и  $r \lesssim O(\lambda n)^{1/2}$ ; см. уравнения (2.28). Как видно из Рис. 3.6а при  $r \gtrsim r_{\text{int}}$  значения  $|\phi_{\text{cl}}|^{-1}$  резко возрастают, указывая на уменьшение амплитуды поля и его вход в линейный режим.

Нелинейную стадию эволюции можно выявить анализируя плотность энер-

гии  $|\rho_{\mathcal{E}}|$  решения — подынтегральное выражение в уравнении (2.15). Эта величина для нескольких моментов времени  $t$  изображена на Рис. 3.6b. Видно, что источник и ближайшая сингулярность создают огромный локализованный пик в плотности энергии поля  $\rho_{\mathcal{E}}$  при  $t = 0$ , который эволюционирует до больших значений  $r$ , оставаясь узким и взаимодействующим, пока не пересечёт границу  $r_{\text{int}} \propto \sqrt{\lambda n}$  нелинейной области (пунктирная вертикальная линия). При  $r \sim r_{\text{int}}$  пик быстро линеаризуется и начинает удовлетворять уравнению (3.3), см. график с  $t = 5m^{-1}$  на Рис. 3.6b. Такая нелинейная эволюция узкой ударной волны согласуется с “тонкостенным” анзацем, предложенным в работе [33] и используемый в статьях о “Хиггсовском взрыве” [44; 58].

С другой стороны, мы наблюдаем, что аналитическая структура полученных квазиклассических решений отличается от той, которая предполагалась в работах [44; 57; 58]. В них использовалась деформация контура по времени в нижнюю полуплоскость, см. пунктирную линию (англ. Higgspllosion) на Рис. 3.7a. Такой поворот контура был бы допустим, если решение не имеет особенностей на пути деформации, или если бы эти особенности были полюсами, и их вклады можно было отдельно учесть при вычислении экспоненты  $F$ . Все полученные нами седловые конфигурации имеют бесконечные цепочки особенностей  $t_*(\mathbf{x})$ ,  $t'_*(\mathbf{x})$  и т.д., ниже оси действительного времени (при  $\text{Re } t > 0$ ). На Рис. 3.7b мы визуализировали аналитическую структуру конкретной числовой конфигурации. А именно, мы аналитически продолжили решение с действительной оси на всю плоскость комплексного времени используя уравнение поля. На Рис. 3.7b цветом изображена комплексная фаза  $\phi_{\text{cl}}(t, 0)$  и чёрными сплошными линиями отмечены сингулярности — значения  $t$ , соответствующие большим  $|\phi_{\text{cl}}(t, r)|$  при некотором  $r$ . Три из них хорошо видны на Рис. 3.7b. Однако эти сингулярности не являются полюсами. В Главе 2 мы продемонстрировали, что общее решение уравнения поля (2.6) имеет следующую структуру вблизи любой



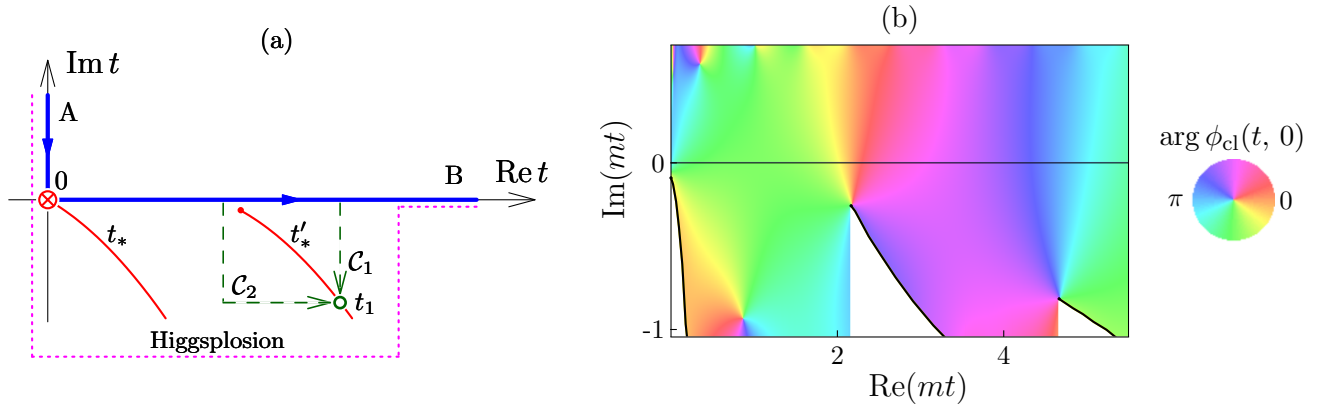


Рис. 3.7. (а) Контуры и поверхности сингулярности в плоскости комплексного времени (качественно). (b) Комплексная фаза  $\arg \phi_{cl}(t, 0)$  седловой конфигурации, как функция комплексного времени при  $r = 0$  (цвет). Сплошные чёрные линии отображают сингулярности  $\phi_{cl}$ . Мы не вычисляем решение в белых областях под ними. Решение имеет параметры  $\lambda n = 2.51$ ,  $\varepsilon = m/2$ ,  $j_0 = 0.053 m^2$ , и  $\sigma = 0.29 m^{-1}$ .

сингулярности:

$$\phi_{cl} = \frac{C_{-1}(\mathbf{x})}{\tau} + C_0(\mathbf{x}) + C_1(\mathbf{x}) \tau + C_2(\mathbf{x}) \tau^2 + \left[ B(\mathbf{x}) - \frac{1}{5} R_3(\mathbf{x}) \ln(m\tau) \right] \tau^3 + \dots \quad (3.5)$$

Здесь  $\tau = i [t - t'_*(\mathbf{x})]$  — евклидов интервал времени до, например, второй поверхности сингулярности  $t'_*(\mathbf{x})$ , функции  $t'_*(\mathbf{x})$  и  $B(\mathbf{x})$  — это произвольные данные Коши, а все остальные коэффициенты  $C_i$  и  $R_3$  выражаются через них при помощи уравнения поля (2.19). Важно отметить, что последний член с  $R_3 \neq 0$  включает логарифм  $\ln(m\tau)$  с разрезом в комплексной плоскости. Более того, можно показать, что более высокие степени  $\ln(m\tau)$  появляются в старших порядках разложения (3.5). Это означает, что поверхности  $t_*$ ,  $t'_*$  и т.д. являются существенными особенностями, и при переходе через соответствующие разрезы решение будет испытывать скачок. Мы проверили это, численно продолжив одно из решений в области с двух сторон от разреза ветви в точке особенности  $t = t_1$ , где  $t'_*(r_1) = t_1$ ; см. контуры  $C_1$  и  $C_2$  на Рис. 3.7а. Комплексные фазы двух полученных конфигураций  $\phi_{cl}(t_1, r)$  показаны линией из точек на Рис. 3.8, в то время как серая вертикальная полоса отмечает область вблизи сингулярно-

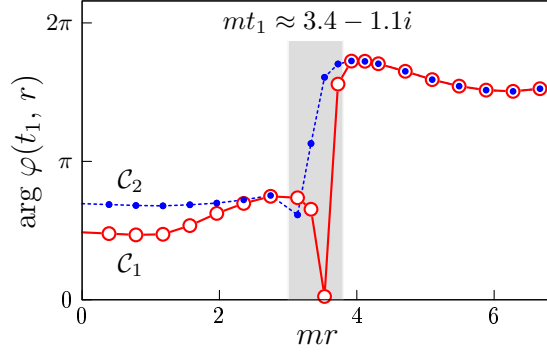


Рис. 3.8. Комплексная фаза численного решения  $\phi_{cl}(t_1, r)$  как функция от  $r$  в точке  $t = t_1$  на второй цепочке сингулярностей  $t'_*(r_1) = t_1$ , изображённой на Рис. 3.7а. Окрестность  $r_1$  изображена вертикальной полупрозрачной серой полосой. Два графика (точки и круги) получены при помощи аналитического продолжения вдоль контуров  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$ , изображённых на Рис. 3.7а. Решение имеет следующие параметры:  $\lambda n = 2.51$ ,  $\varepsilon = m/2$ ,  $j_0 = 0.053 m^2$  и  $\sigma = 0.29 m^{-1}$ .

сти  $r \approx r_1$ . Мы видим, что, хотя два графика совпадают при больших  $r$ , они различаются при  $r < r_1$  в соответствии с существующим разрезом.

### 3.3.2. Экспонента подавления как функция $\lambda n$ и $\varepsilon$

Теперь мы переходим к обсуждению поведения полученной экспоненты подавления  $F$  как функции от  $\lambda n$  и  $\varepsilon$ . На Рис. 3.9а в качестве примера приведены данные для экспоненты  $F(\lambda n, \varepsilon)$  (круги) при  $\varepsilon = 3m$ . Мы видим, что  $F$  монотонно убывает с увеличением  $\lambda n$ . При  $\lambda n \ll 1$  результат совпадает с древесным ответом (3.1) [53] (пунктирная линия). В противоположном пределе  $\lambda n \gg 1$  наши численные данные хорошо аппроксимируются линейной функцией (сплошная линия на рисунке):

$$F \rightarrow \lambda n f_\infty(\varepsilon) + g_\infty(\varepsilon) \quad \text{или} \quad \mathcal{P}_n \rightarrow e^{n f_\infty(\varepsilon) + g_\infty(\varepsilon)/\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda n \rightarrow +\infty, \quad (3.6)$$

где  $f_\infty(\varepsilon)$  и  $g_\infty(\varepsilon)$  отрицательны. На Рис. 3.9b изображены экспоненты подавления  $F$  для набора фиксированных значений  $\varepsilon$ , включая  $\varepsilon = 3m$ . Видно, что качественное поведение экспонент не отличается от того, что изображено на Рис. 3.9а. Различие заключается в наклоне графиков при  $\lambda n \gg 1$ , который

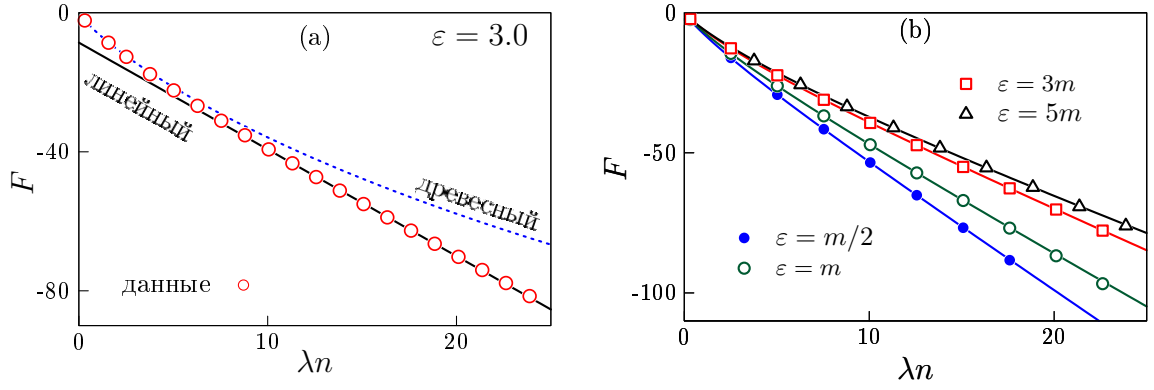


Рис. 3.9. (а) Экспонента  $F(\lambda n, \varepsilon)$  вероятности многочастичного рождения в модели (1) при  $\varepsilon = 3m$ . Численные данные (круги) интерполируют между древесным результатом при  $\lambda n \ll 1$  (пунктирная линия и уравнение (3.1)) и линейной асимптотикой (3.6) при  $\lambda n \gg 1$  (сплошная линия). (б) Экспонента подавления  $F$  как функция от  $\lambda n$  при фиксированном  $\varepsilon$ . Точки соответствуют численным данным, линии соответствуют интерполяциям функцией (3.7).

всегда остаётся отрицательным, но уменьшается по модулю с ростом  $\varepsilon$ .

Была найдена удобная интерполирующая формула для описания численных результатов для экспоненты подавления при произвольных  $\lambda n$

$$F \approx \lambda n f_{\infty}(\varepsilon) - \frac{\lambda n}{2} \ln \left[ \left( \frac{16}{\lambda n} \right)^2 e^{2-2f(\varepsilon)+2f_{\infty}(\varepsilon)} - \frac{2g_{\infty}(\varepsilon)}{\lambda n} + 1 \right]. \quad (3.7)$$

Это выражение воспроизводит древесный ответ (3.1) при  $\lambda n \ll 1$ , а, с другой стороны, при  $\lambda n \gg 1$  переходит в (3.6). На Рис. 3.9b сплошными линиями показаны фитирующие функции (3.7) для разных значений  $\varepsilon$  в сравнении с численными данными (точки). Полученные  $f_{\infty}(\varepsilon)$ ,  $g_{\infty}(\varepsilon)$  для этих значений  $\varepsilon$  приведены в таблице на Рис. 3.10b вместе с соответствующими значениями  $f(\varepsilon)$ . Мы проверили, что приведённые  $f_{\infty}(\varepsilon)$  и  $g_{\infty}(\varepsilon)$  согласуются с результатами простого линейного фита<sup>3</sup> формулой (3.6) в области  $\lambda n \gg 1$ . Также стоит обратить внимание, что  $f(\varepsilon)$  фиксируется независимым вычислением на древесном

<sup>3</sup> Мы провели ещё одну проверку уравнения (3.7). Соотношения (2.14) дают значение седловой точки классического действия в терминах показателя экспоненты и его производной  $\lambda n$  при  $\varepsilon = \text{const}$ :  $2\lambda \text{Im} S[\phi_{\text{cl}}] = F - \partial F / \partial \ln(\lambda n)$ , при  $J = 0$ . Это выражение превращает уравнение (3.7) в интерполирующую формулу для  $2\lambda \text{Im} S$ . Аппроксимируя числовые данные при  $J = 0$  с помощью последнего, мы извлекли  $g_{\infty}(\varepsilon)$  и  $f_{\infty}(\varepsilon)$ , которые согласуются со значениями из таблицы на Рис. 3.9b.

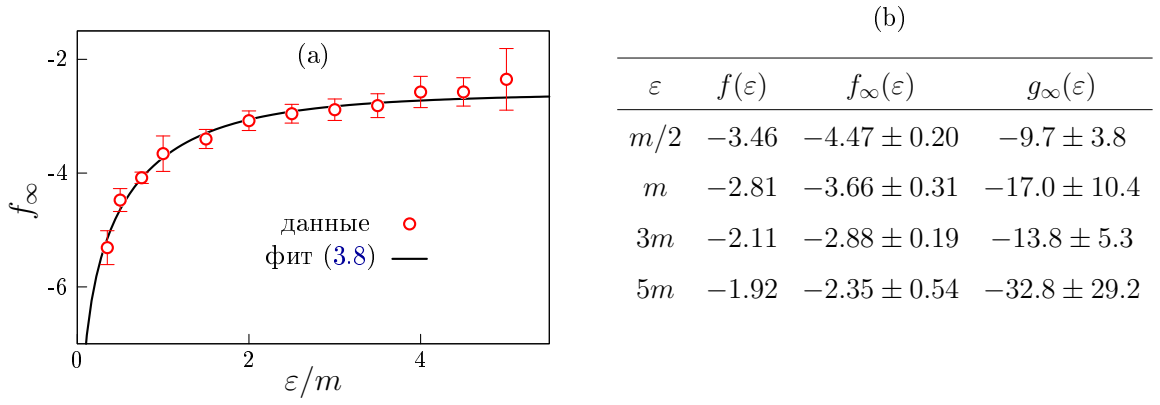


Рис. 3.10. (а) Наклон  $f_\infty(\varepsilon)$  (см. (3.6)) экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения при больших  $\lambda n$  (круги) как функция от  $\varepsilon$  и интерполяция (3.8) (сплошная линия). (б) Параметры из выражения (3.7) при разных значениях  $\varepsilon$ .

уровне и остается постоянным при фитах. В итоге, фит функцией (3.7) имеет то же число параметров, что и фит линейной функцией, но может использовать гораздо больше точек.

Наклоны  $f_\infty(\varepsilon)$ , полученные в результате работы разработанного численного метода изображены на Рис. 3.10а. Эти данные также были проанализированы и интерполированы функцией со следующими асимптотиками: она логарифмически расходится при  $\varepsilon \ll m$  из-за вклада  $\propto \varepsilon^{3/2}$  в нерелятивистском фазовом объёме (формула (3.10) из следующего раздела), а при  $\varepsilon \gg m$  стремится к константе в соответствии с численными данными. В итоге мы выбрали следующее двухпараметрическое фитирующее выражение

$$f_\infty(\varepsilon) \approx -\frac{3}{4} \ln [(d_1 m/\varepsilon)^2 + d_2], \quad d_i \approx \{10.7, 30.7\} \quad (3.8)$$

Минимальный наклон достигается в ультрарелятивистском пределе и равен  $f_\infty \rightarrow -2.57 \pm 0.06$ .

### 3.3.3. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы

Инклюзивная вероятность (2.1) может быть использована для вычисления амплитуды  $\mathcal{A}_n$  образования  $n$  частиц на пороге. Действительно, в пределе  $\varepsilon \rightarrow$

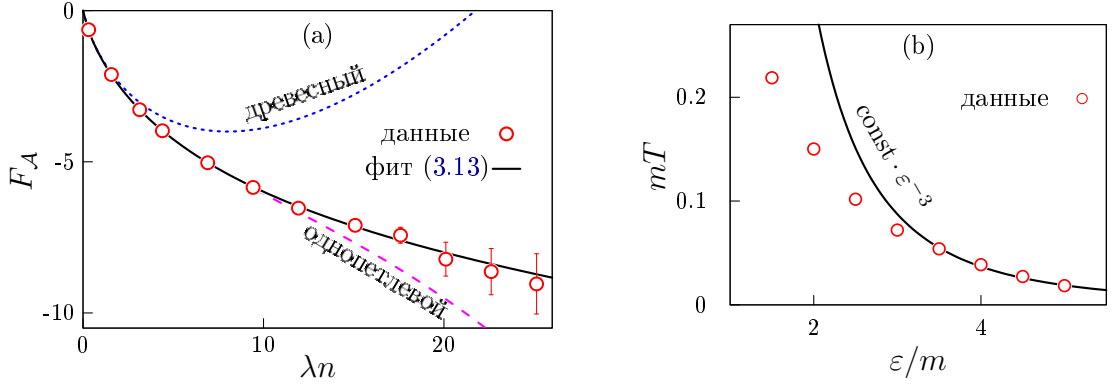


Рис. 3.11. (а) Экспонента подавления  $F_A(\lambda n)$  (3.9) для амплитуды рождения  $n$  частиц на массовом пороге (круги с интервалами погрешности), интерполяция численных данных (сплошная линия), древесный результат (линия из точек), древесный результат с однопетлевой поправкой (пунктирная линия). (б) Множитель Лагранжа  $T$  как функция от  $\varepsilon$  при  $\lambda n \approx 18.8$  и  $j_0 = 0$  (круги). Сплошная линия соответствует асимптотике  $T \propto \varepsilon^{-3}$  при больших  $\varepsilon$ .

0 остается единственное доступное конечное состояние: состояние с нулевыми пространственными импульсами всех конечных частиц. Амплитуда перехода в это состояние определяется [6; 8–11] отношением вероятности к  $n$ -частичному фазовому объему конечных частиц  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)/n!$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [35]:

$$|\mathcal{A}_n|^2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n!}{\mathcal{V}_n} e^{F/\lambda} \sim n! m^{4-2n} e^{2F_A(\lambda n)/\lambda}, \quad (3.9)$$

где коэффициент  $n!$  явно учитывает тождественность частиц. При  $\varepsilon \ll m$  значение  $\mathcal{V}_n$  описывается выражением

$$\frac{\mathcal{V}_n}{n!} \approx \frac{m^{2n-4}}{n!} \exp \left\{ \frac{3n}{2} \ln \left( \frac{\varepsilon}{3\pi m} \right) + \frac{3n}{2} - n \ln 2 + \frac{n\varepsilon}{4m} \right\}, \quad (3.10)$$

а последняя связь в (3.9) фиксирует ожидаемую параметрическую форму амплитуды при  $n \sim \lambda^{-1}$ .

Экстраполируя численные результаты в точку  $\varepsilon = 0$ , мы получили значения экспоненты  $F_A(\lambda n)$ , которые показаны на Рис. 3.11а кругами с интервалами погрешностей. При  $\lambda n \lesssim 10$  эти данные близки к пертурбативному выражению при  $\varepsilon = 0$

$$F_A = \frac{\lambda n}{2} [\ln(\lambda n/8) - 1] - \frac{(\lambda n)^2 3^{3/2}}{32\pi^2} \ln(2 + \sqrt{3}) + O(\lambda n)^3, \quad (3.11)$$

которое включает древесный результат [6] (линия из точек) и однопетлевую поправку [20; 62] (пунктирная линия) в первом и втором слагаемых соответственно. В противоположном случае большого  $\lambda n$  мы, по аналогии с поведением экспоненты вероятности, ожидаем линейной асимптотики

$$|\mathcal{A}_n| \sim m^{2-n} \sqrt{n!} e^{nf'_\infty + g'_\infty/\lambda}. \quad (3.12)$$

Удобно объединить поведение при малых и больших  $\lambda n$  в одной интерполирующей формуле похожей на выражение (3.7)

$$F_{\mathcal{A}} \approx \lambda n f'_\infty - \frac{\lambda n}{4} \ln \left[ \left( \frac{8}{\lambda n} \right)^2 e^{2+4f'_\infty} - \frac{4g'_\infty}{\lambda n} + 1 \right], \quad (3.13)$$

которая корректно описывает все численные результаты (сплошная линия на Рис. 3.11а). Имея данные с пренебрежимо малыми численными ошибками, можно было бы взять предел  $\varepsilon \rightarrow 0$  напрямую, фитируя  $F$  полиномами по  $\varepsilon$  и извлекая постоянные члены. Однако это трудно сделать на практике, поскольку полученные значения  $F$  уже имеют существенные численные ошибки из-за экстраполяции  $j_0 \rightarrow 0$ . Можно улучшить точность, вспомнив, что квазиклассическая процедура предоставляет удобное выражение для производной по  $\varepsilon$  от экспоненты  $\partial F/\partial \varepsilon = 2\lambda n T$  как следствие седловых уравнений, см. (2.14). Напомним, что мы получаем значения  $T$  вместе с нахождением седловых решений и можем экстраполировать полученные данные для  $T$  в  $j_0 = 0$  аналогично экспоненте  $F$ . Легко видеть, что член  $O(\varepsilon)$  сокращается в разложении следующей комбинации в ряд Тейлора

$$F - \lambda \ln(\mathcal{V}_n m^{4-2n}) - 2\lambda n \varepsilon T + \lambda n (3/2 + \varepsilon/4m) = 2F_{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 F_{\mathcal{A},2} + \varepsilon^3 F_{\mathcal{A},3} + O(\varepsilon^4) \quad (3.14)$$

так как  $\lambda \varepsilon \partial_\varepsilon \ln \mathcal{V}_n \approx \lambda n (3/2 + \varepsilon/4m)$  в соответствии с уравнением (3.10). Отметим, что  $F_{\mathcal{A}}$  в правой части уравнения (3.14) является искомой экспонентой подавления пороговой амплитуды, и мы обозначили другие коэффициенты разложения через  $F_{\mathcal{A},i}$ . На практике трехпараметрический фит величины в левой

части уравнения (3.14) с разрежённым полиномом в правой части намного более устойчив и приводит к меньшим ошибкам, чем прямая экстраполяция выражения  $F - \lambda \ln(\mathcal{V}_n m^{4-2n})$ . Результаты фита для параметров  $f'_\infty$  и  $g'_\infty$  равны

$$f'_\infty = -0.062 \pm 0.026, \quad g'_\infty = -9.7 \pm 1.2. \quad (3.15)$$

В следующем разделе мы обсудим, что несмотря на факториальную зависимость от  $n$ , уравнение (3.12) не противоречит унитарности квантовой теории.

Теперь рассмотрим предел ультрарелятивистских частиц в конечном состоянии  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ . Соответствующие численные решения изменяются более резко, а их производные по времени и пространству заметно растут с увеличением  $\varepsilon$ , см. Рис. 3.3b. В этом режиме естественно рассматривать параметр  $m^2$  в уравнении поля по теории возмущений. Из размерного анализа можно получить,

$$T = \frac{T_{-1}}{\varepsilon} + T_3 \frac{m^2}{\varepsilon^3} + O(\varepsilon^{-5}),$$

что даёт  $F = F_0 + 2\lambda n T_{-1} \ln \frac{\varepsilon}{m} - \lambda n T_3 \frac{m^2}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^{-4}), \quad (3.16)$

где безразмерные коэффициенты ряда  $T_i$  могут зависеть от  $\lambda n$ , и мы использовали соотношение Лежандра  $\partial F / \partial \varepsilon = 2\lambda n T$  для получения (3.16) (см. уравнение (2.14)). Как мы докажем позже,  $F$  не может уменьшаться с увеличением энергии, т.е.  $T \geq 0$  и  $T_{-1} \geq 0$ . Это совместно с экспоненциальным подавлением вероятности только в том случае, если  $T_{-1} = 0$  — в противном случае экспонента подавления была бы положительной и нарушала унитарность при достаточно высоких энергиях. Мы приходим к выводу, что при  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  экспонента является  $\varepsilon$  независимой и  $T \propto \varepsilon^{-3}$ . Последняя зависимость подтверждена на Рис. 3.11b при помощи фита численных данных при больших  $\varepsilon$  степенной функцией  $\propto \varepsilon^{-3}$ .

### 3.4. Обсуждение и выводы к третьей главе

Полученные нами результаты свидетельствуют о том, что вероятность рождения  $n \gg 1$  частиц из нескольких сталкивающихся квантов экспоненциально подавлена в теории  $\lambda\phi^4$  без спонтанного нарушения  $\mathbb{Z}_2$  симметрии. Наш численный метод прошёл проверку: с его помощью были восстановлены результаты при малых  $\lambda n$ , известные из литературы. Была найдена экспонента подавления вероятности многочастичного рождения при больших  $\lambda n$ . Вероятности этих процессов оказались экспоненциально подавлены при всех энергиях и числах частиц конечного состояния. Также, используя численные данные, нам удалось получить модули амплитуд многочастичного рождения на пороге и увидеть указание на то, что ультрарелятивистский предел описывается уравнениями для безмассовой теории. Разработанный численный метод может быть использован и в других задачах, безусловный интерес представляет проверка “Хиггсовского взрыва” в скалярной теории со спонтанным нарушением  $\mathbb{Z}_2$  симметрии.

Теперь обсудим полученные результаты подробнее. Во-первых, вероятность (2.1) не может превышать единицы:

$$\mathcal{P}_n \sim e^{F/\lambda} \leq 1, \quad \text{следовательно} \quad F(\lambda n, \varepsilon) \leq 0. \quad (3.17)$$

Обращаем внимание, что нарушение условия (3.17) в любой области значений параметров подорвало бы доверие ко всему методу. Однако оно удовлетворяется для всех полученных численных данных. В частности, асимптотика экспоненты вероятности при всех  $\lambda n$  отрицательна и  $F \rightarrow \lambda n f_\infty(\varepsilon) + g_\infty(\varepsilon) < 0$  при  $\lambda n \rightarrow +\infty$ , см. Рис. 3.9b и таблицу на Рис. 3.10b. Также, наш квазиклассический метод основан на гипотезе универсальности [13; 24; 27; 28; 47–51] для экспоненты в уравнении (3.17). А именно, значение  $F(\lambda n, \varepsilon)$  не зависит от деталей начального состояния до тех пор, пока последнее включает в себя квазиклассически мало ( $\ll \lambda^{-1}$ ) частиц. Мы явно проверили и подтвердили это предположение, см. Рис. 2.2b. Его следствием является то, что сечение



$\sigma_n \propto \exp(F/\lambda)$  рассеяния  $2 \rightarrow n$  является экспоненциально подавленным той же универсальной функцией  $F$ , что и вероятность  $\mathcal{P}_n$ . Действительно, рассмотрим столкновение двух частиц в состоянии, описываемом волновыми пакетами с большой пространственной протяжённостью  $L \gg n/E$ . Это столкновение создаёт  $n$  квантов с вероятностью<sup>4</sup>  $\mathcal{P}_n \sim \sigma_n/(\pi L^2)$ , что даёт то же экспоненциальное подавление. Неравенство (3.17) тогда означает, что физическое сечение  $\sigma_n$  не может быть экспоненциально большим.

Во-вторых, подобно тому, что мы проделывали в Главе 1, рассмотрим составной процесс двух независимых малочастичных столкновений, создающих  $n_1$  и  $n_2$  частиц в двух пространственно разделенных областях. Общая вероятность того, что это произойдет, равна  $\mathcal{P}_{n_1}(E_1)\mathcal{P}_{n_2}(E_2)$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — соответствующие энергии. Фактически, такое событие с двумя столкновениями можно рассматривать как подпроцесс, вносящий вклад в инклюзивную вероятность (2.1) при  $E = E_1 + E_2$  и  $n = n_1 + n_2$ . Действительно, его начальное состояние не имеет значения в соответствии с гипотезой универсальности, а конечное состояние, включающее два далеко разнесённых в пространстве набора частиц, является эксклюзивным. Поскольку  $\mathcal{P}_n(E)$  должна быть не меньше, чем вероятность подпроцесса, мы получаем [42],

$$F(\lambda n_1 + \lambda n_2, \lambda E_1 + \lambda E_2) \geq F(\lambda n_1, \lambda E_1) + F(\lambda n_2, \lambda E_2), \quad (3.18)$$

где экспоненты теперь записаны, как функции от  $\lambda E$  вместо  $\varepsilon$ .

Используя (3.18), легко показать, что  $F$  растёт с увеличением энергии. Действительно, возьмем  $\lambda n_2 \ll 1$ . Тогда вероятность второго столкновения не является экспоненциально подавленной ни при каком  $E_2$ :  $F(\lambda n_2, \lambda E_2) \sim O(\lambda n_2)$  согласно уравнению (3.1). Неравенство (3.18) преобразуется в  $F(\lambda n_1, \lambda E_1 + \lambda E_2) \geq F(\lambda n_1, \lambda E_1)$ , подразумевая, что  $\partial_E F \propto T$  является положительным. Наши чис-

---

<sup>4</sup> Этот аргумент более грубый, чем знаменитая граница Фруассара [75], поскольку он предполагает, что амплитуда перехода нечувствительна к импульсам рассеяния в масштабах ниже  $L^{-1}$ . Но это применимо к нашим процессам при заданном  $n$  и достаточно большом  $L$ , потому что неравенство  $|L^{-1} \partial_E \ln \mathcal{A}_n| \lesssim 1$  приводит к  $LE \gtrsim |d \ln \mathcal{A}_n / d \ln E| \sim (E \partial_E F) / \lambda \sim O(n)$ .

ленные результаты действительно удовлетворяют этому критерию. В частности,  $f_\infty(\varepsilon)$  на Рис. 3.10а растет с  $\varepsilon$  и приближается к максимальному значению  $f_\infty \rightarrow -2.57$  при  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ .

Другой частный случай уравнения (3.18) соответствует фиксированной средней энергии конечных частиц  $E_1/n_1 = E_2/n_2 = \varepsilon + m$  при произвольных множественностях. Мы получаем неравенство

$$F(\lambda n_1 + \lambda n_2, \varepsilon) \geq F(\lambda n_1, \varepsilon) + F(\lambda n_2, \varepsilon), \quad (3.19)$$

это означает, что отрицательная экспонента не может убывать при больших множественностях быстрее, чем линейная функция. Действительно, степенное поведение  $F \propto -(\lambda n)^\gamma$  согласуется с уравнением (3.19) при  $\lambda n \rightarrow +\infty$  только если  $\gamma \leq 1$ . Наши численные данные убедительно свидетельствуют о линейной асимптотике  $F \rightarrow \lambda n f_\infty + g_\infty$ , которая удовлетворяет последнему условию. Тогда уравнение (3.19) сокращается до  $g_\infty(\varepsilon) \leq 0$ , что также верно для наших данных, см. таблицу на Рис. 3.10b.

В-третьих, может показаться удивительным тот факт, что амплитуда (3.12) рождения  $n$  частиц на массовом пороге всё ещё растёт факториально с  $n$  при  $\lambda n \gtrsim 1$ . Этот эффект является чисто кинематическим и согласуется с унитарностью: напомним, что амплитуда была извлечена из экспоненциально малой вероятности. Действительно, коэффициент  $n!$  возникает из фазового объема  $\mathcal{V}_n/n!$ , который имеет неясную физическую интерпретацию в пределе  $n \rightarrow +\infty$ . Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим конечный пространственный объем  $V$ . Число нерелятивистских  $n$ -частичных состояний в нём задается показателем термодинамической энтропии  $\exp\{\Sigma_V(n, E)\}$  (сплошная линия на Рис. 3.12). Последняя, в свою очередь, пропорциональна фазовому объему  $\exp(\Sigma_V) = c\mathcal{V}_n/n!$  с коэффициентом  $c \sim (2mV)^n/m^4$  (пунктирная линия на рисунке), но только при достаточно малых  $n$ . При больших  $n \gtrsim n_{\text{ВЕС}}$  (англ. ВЕС — конденсация Бозе-Эйнштейна) волновые функции частиц газа начинают перекрываться, происходит конденсация Бозе-Эйнштейна, и энтропия вообще перестает

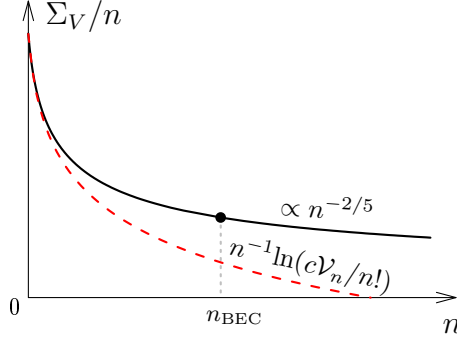


Рис. 3.12. Энтропия  $\Sigma_V(n, E)$  для  $n$  свободных нерелятивистских частиц с полной энергией  $E \approx nm$  в конечном объёме  $V$  (сплошная линия, схематично). Пунктирная линия соответствует логарифму фазового объёма.

быть связанной с  $\mathcal{V}_n/n!$ . Напротив, она растёт с  $n$  медленнее [73], как  $\Sigma_V \propto n^{3/5}$ , потому что новые состояния с трудом появляются в переполненном бозе-газе. В такой ситуации вероятность  $\mathcal{P}_n \cdot \exp(-\Sigma_V)$  перехода в заданное состояние конечного объёма имеет почти такое же подавление  $F \sim \lambda n f_\infty < 0$ , что и инклюзивная вероятность. Мы приходим к выводу, что пороговую амплитуду (3.12) следует интерпретировать с осторожностью при больших  $n$  из-за того, что пределы большого объёма и большой множественности не коммутируют.

Приведенный выше случай конечного объёма напоминает известный результат в квантовой механике. А именно, рассмотрим частицу в одномерном потенциале  $V_{QM}(x) = m_{QM}^2 x^2/2 + \lambda_{QM} x^4/4$ . Её переход из основного состояния на  $n$ -й энергетический уровень при  $n \gg O(\lambda_{QM}^{-1})$  происходит с “вероятностью” [30; 31]

$$\mathcal{P}_n^{(QM)} = |\langle n | \hat{O} | 0 \rangle|^2 \sim \exp\left(-\pi n + O(n^{1/3} \lambda_{QM}^{-2/3})\right), \quad (3.20)$$

где опущен префактор, и предполагается, что оператор  $\hat{O}$  не зависит от  $n$ . Любопытно, что асимптотическая формула (3.20) не зависит от параметров потенциала  $\lambda_{QM}$  и  $m_{QM}$ . В этом отношении она напоминает полученный в настоящей работе результат для вероятности многочастичного рождения при  $\lambda n \gg 1$ :  $\mathcal{P}_n \sim \exp(n f_\infty + g_\infty/\lambda)$ , в котором доминирует  $\lambda$ -независимый фактор  $\exp(n f_\infty)$ . Более того, как мы упоминали выше,  $\mathcal{P}_n$  при больших  $n$  можно интерпрети-

ровать как вероятность перехода в одно из немногих доступных  $n$ -частичных состояний в большом конечном ящике. Это делает аналогию еще более убедительной. Однако есть и существенные различия по сравнению с квантовомеханическим пределом (3.20). В теории поля наклон  $f_\infty = f_\infty(\varepsilon)$  экспоненты зависит от энергии и субдоминантный член  $g_\infty(\varepsilon)/\lambda \sim O(n^0/\lambda)$  — другой.

И, наконец, в-четвёртых, важное применение наших результатов заключается в исследовании самих седловых решений. При аккуратном анализе численных данных можно надёжно установить их свойства и сформировать основу для будущих аналитических исследований. В частности, в работах [44; 57; 58] была выведена спорная формула (11) в рамках сценария “Хиггсовского взрыва”. Этот вывод использовал ряд предположений о свойствах квазиклассических конфигураций при  $\lambda n \gg 1$ . Одно из использованных предположений мы можем подтвердить: при больших множественностях плотности энергии у найденных нами седловых решений образуют относительно узкие сферические оболочки шириной  $\Delta r \propto (\lambda n)^0$ , которые распространяются внутри параметрически больших “областей взаимодействия”  $r \lesssim O(\lambda n)^{1/2}$ , см. Рис. 3.6. В линейной области  $t \rightarrow +\infty$  полученные решения удовлетворяют еще более простому скейлингу  $\phi_{cl} \propto \sqrt{\lambda n}$  (3.3). Это подтверждает “тонкостенный” подход, использовавшийся в работах [33; 58]. С другой стороны, мы убедились, что аналитическая структура седловых решений отличается от той, которая предполагалась в работах [44; 57; 58]. А именно, наличие разрывов в плоскости комплексного времени, связанное с логарифмическими сингулярностями, обнаруженными и при аналитическом исследовании решений вблизи сингулярности, и на полученных численных данных, ставит под вопрос корректность результатов, полученных в этих работах с использованием деформации контура комплексного времени. Стоит отметить, что неправильный выбор ветви на разрыве решения может привести к нефизическим результатам для вероятности. Таким образом, для получения надёжного результата для вероятности многочастичного рождения бозонов Хиггса следует применить разработанный в текущей работе численный метод. Это обеспечит

прямую проверку уравнения (11) и даст ценную информацию о структуре соответствующих квазиклассических решений.

Также отметим, что найденные квазиклассические решения с  $\varepsilon \gg m$  не чувствительны к оператору  $m^2\phi^2$  в лагранжиане. Это говорит о том, что наши результаты в ультрарелятивистском режиме могут быть верны и в скалярной теории со спонтанно нарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией. Если это действительно так, то многочастичная вероятность в нарушенной теории  $\lambda\phi^4$  при больших  $\varepsilon$  и  $\lambda n$  даётся найденным нами выражением  $\mathcal{P}_n(\varepsilon \rightarrow +\infty) \sim \exp(f_{\infty, \max} n) \sim \exp(-2.57 \times n)$ . Поскольку вероятность растёт с увеличением энергии, мы получаем верхнюю границу  $\mathcal{P}_n(\varepsilon) \leq \mathcal{P}_n(\infty)$  при произвольном  $\varepsilon$  в теории с нарушенной симметрией.

## Заключение

В настоящей работе были изучены процессы многочастичного рождения при помощи методов классической и квантовой теории поля. Полученные результаты согласуются друг с другом, с уже известными данными из литературы, а также с гипотезой об экспоненциальном подавлении вероятности многочастичного рождения. В частности, все наши результаты демонстрируют экспоненциальное подавление этих процессов в теории действительного скалярного поля  $\lambda\phi^4$  (1).

Было проведено численное моделирование классического рассеяния волновых пакетов в теории (1). Классические решения характеризуются энергией  $E$ , начальным  $n_i$  и конечным  $n_f$  числами частиц и соответствуют процессу перехода между двумя когерентными состояниями с той же средней энергией и множественностями. Была получена область параметров  $E$ ,  $n_i$  и  $n_f$ , которая определяет классически разрешённые процессы рассеяния. Процессы, соответствующие многочастичному рождению (“мало”  $\rightarrow$  “много”), лежат глубоко в классически запрещённой области. Это указывает на экспоненциальное подавление процессов многочастичного рождения в двухчастичных столкновениях. Также были исследованы свойства решений, соответствующих границе классически разрешённой области.

Численно был реализован квазиклассический метод сингулярных решений Д.Т. Шона, который позволяет находить вероятности многочастичного рождения при произвольных значениях энергии и числа частиц конечного состояния. Полученные с его помощью численные результаты согласуются с известными в литературе ответами, найденными в режиме  $\lambda n \ll 1$ . Кроме того, они согласуются с предположением о независимости экспоненты подавления многочастичных процессов от вида начального состояния с квазиклассически малым ( $\ll \lambda^{-1}$ ) числом частиц. Разработанный метод был использован для нахождения вероятностей многочастичного рождения в широкой области значений чис-

ла частиц и энергии конечного состояния. Было показано, что процессы многочастичного рождения в теории (1) остаются экспоненциально подавленными при произвольно больших конечном числе частиц  $n$  и фиксированной средней кинетической энергии на частицу. Была найдена асимптотика экспоненты подавления вероятности при  $\lambda n \rightarrow +\infty$ , которая оказалась убывающей линейной функцией числа частиц. На основе численных данных были получены результаты для модулей пороговых амплитуд при  $\lambda n \gtrsim 1$ . Также наши численные данные указывают на то, что при  $E/n \gg t$  вероятность можно получить, рассматривая многочастичное рождение в безмассовой теории.

Разработанные численные методы могут быть использованы в других моделях. Метод, описанный в Главе 1, может быть использован в теориях, в которых по тем или иным причинам осложнено применение метода сингулярных решений, но возможно численное изучение рассеяния классических волновых пакетов. Численный алгоритм, описанный в Главе 2, может быть с минимальными изменениями переделан под теорию действительного скалярного поля  $\lambda\phi^4$  с нарушенной  $\mathbb{Z}_2$  симметрией. Это позволит напрямую проверить гипотезу о “Хиггсовском взрыве”, не делая дополнительных предположений о структуре седловых решений. Разработанный численный является достаточно общим и может быть использован для описания многочастичных процессов в других теориях бозонных полей. Он может быть также полезен в других ситуациях, таких как квазиклассические вычисления при большом  $U(1)$  заряде [76; 77].

Автор глубоко признателен своим соавторам С.В. Демидову и Д.Г. Левкову за плодотворную работу и то, что своим примером они позволили сформироваться ему как исследователю. Также автор благодарит своих родителей за поддержку.

## Список литературы

1. *Ringwald A.* High-Energy Breakdown of Perturbation Theory in the Electroweak Instanton Sector // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 330. — С. 1—18. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90300-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90300-3).
2. *Espinosa O.* High-Energy Behavior of Baryon and Lepton Number Violating Scattering Amplitudes and Breakdown of Unitarity in the Standard Model // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 343. — С. 310—340. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90473-Q](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90473-Q).
3. *Mattis M. P.* The Riddle of high-energy baryon number violation // Phys. Rept. / под ред. Е. Gava [и др.]. — 1992. — Т. 214. — С. 159—221. — DOI: [10.1016/0370-1573\(92\)90033-V](https://doi.org/10.1016/0370-1573(92)90033-V).
4. *Tinyakov P. G.* Instanton like transitions in high-energy collisions // Int. J. Mod. Phys. A. — 1993. — Т. 8. — С. 1823—1886. — DOI: [10.1142/S0217751X93000771](https://doi.org/10.1142/S0217751X93000771).
5. *Papadopoulos C. G., Kleiss R. H. P., Argyres E. N.* Multiscalar amplitudes in perturbation theory // 28th Rencontres de Moriond: Electroweak Interactions and Unified Theories. — 1993. — С. 427—431.
6. *Brown L. S.* Summing tree graphs at threshold // Phys. Rev. D. — 1992. — Т. 46. — R4125—R4127. — DOI: [10.1103/PhysRevD.46.R4125](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.R4125). — arXiv: [hep-ph/9209203](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9209203).
7. *Voloshin M. B.* Multiparticle amplitudes at zero energy and momentum in scalar theory // Nucl. Phys. B. — 1992. — Т. 383. — С. 233—248. — DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90678-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90678-5).
8. *Argyres E. N., Kleiss R. H. P., Papadopoulos C. G.* Amplitude estimates for multi - Higgs production at high-energies // Nucl. Phys. B. — 1993. — Т. 391. — С. 42. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90140-K](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90140-K).



9. *Smith B. H.* Properties of perturbative multiparticle amplitudes in  $\phi^{**k}$  and  $O(N)$  theories // *Phys. Rev. D.* — 1993. — T. 47. — C. 3521. — DOI: [10.1103/PhysRevD.47.3521](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.3521). — arXiv: [hep-ph/9211238](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9211238).
10. *Libanov M. V., Rubakov V. A., Troitsky S. V.* Tree amplitudes at multiparticle threshold in a model with softly broken  $O(2)$  symmetry // *Nucl. Phys. B.* — 1994. — T. 412. — C. 607. — DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)90394-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90394-8). — arXiv: [hep-ph/9307213](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9307213).
11. *Khoze V. V.* Multiparticle Higgs and Vector Boson Amplitudes at Threshold // *JHEP.* — 2014. — T. 07. — C. 008. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2014\)008](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2014)008). — arXiv: [1404.4876 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1404.4876).
12. *Argyres E. N., Papadopoulos C. G., Kleiss R. H. P.* Multiscalar production amplitudes beyond threshold // *Nucl. Phys. B.* — 1993. — T. 395. — C. 3. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90205-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90205-4). — arXiv: [hep-ph/9211237](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9211237).
13. Exponentiation of multiparticle amplitudes in scalar theories / M. V. Libanov [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 1994. — T. 50. — C. 7553—7569. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.7553](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.7553). — arXiv: [hep-ph/9407381](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9407381).
14. *Khoze V. V.* Perturbative growth of high-multiplicity W, Z and Higgs production processes at high energies // *JHEP.* — 2015. — T. 03. — C. 038. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2015\)038](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2015)038). — arXiv: [1411.2925 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1411.2925).
15. *Cornwall J. M.* On the High-energy Behavior of Weakly Coupled Gauge Theories // *Phys. Lett. B.* — 1990. — T. 243. — C. 271—278. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90850-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90850-6).
16. *Goldberg H.* Breakdown of perturbation theory at tree level in theories with scalars // *Phys. Lett. B.* — 1990. — T. 246. — C. 445—450. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90628-J](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90628-J).

17. *Zakharov V. I.* High-energy production of scalar bosons in weak coupling theories // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — T. 67. — C. 3650. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.67.3650](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.3650).
18. *Veneziano G.* Bound on reliable one-instanton cross-sections // *Mod. Phys. Lett. A.* — 1992. — T. 7. — C. 1661. — DOI: [10.1142/S021773239200135X](https://doi.org/10.1142/S021773239200135X).
19. *Maggiore M., Shifman M. A.* Nonperturbative processes at high energies in weakly coupled theories: Multi-instantons set an early limit // *Nucl. Phys. B.* — 1992. — T. 371. — C. 177. — DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90234-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90234-3).
20. *Voloshin M. B.* Summing one loop graphs at multiparticle threshold // *Phys. Rev. D.* — 1993. — T. 47. — R357—R361. — DOI: [10.1103/PhysRevD.47.R357](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.R357). — arXiv: [hep-ph/9209240](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9209240).
21. *Smith B. H.* Summing one loop graphs in a theory with broken symmetry // *Phys. Rev. D.* — 1993. — T. 47. — C. 3518. — DOI: [10.1103/PhysRevD.47.3518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.3518). — arXiv: [hep-ph/9209287](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9209287).
22. *Schenk S.* The breakdown of resummed perturbation theory at high energies // *JHEP.* — 2022. — T. 03. — C. 100. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2022\)100](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2022)100). — arXiv: [2109.00549](https://arxiv.org/abs/2109.00549) [[hep-ph](https://arxiv.org/abs/hep-ph)].
23. *Khoze V. V., Schenk S.* Multiparticle amplitudes in a scalar EFT // *JHEP.* — 2022. — T. 05. — C. 134. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2022\)134](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2022)134). — arXiv: [2203.03654](https://arxiv.org/abs/2203.03654) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
24. *Libanov M. V., Son D. T., Troitsky S. V.* Exponentiation of multiparticle amplitudes in scalar theories. 2. Universality of the exponent // *Phys. Rev. D.* — 1995. — T. 52. — C. 3679—3687. — DOI: [10.1103/PhysRevD.52.3679](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.3679). — arXiv: [hep-ph/9503412](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9503412).
25. *Argyres E. N., Kleiss R. H. P., Papadopoulos C. G.* Multiscalar amplitudes to all orders in perturbation theory // *Phys. Lett. B.* — 1993. — T. 308. — C. 292—

296. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)91287-W](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91287-W). — arXiv: [hep-ph/9303321](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9303321). — [Addendum: Phys.Lett.B 319, 544 (1993)].
26. *Argyres E. N., Kleiss R. H. P., Papadopoulos C. G.* Perturbative unitarity constraints on scalar selfinteractions // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 296. — C. 139–142. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90815-L](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90815-L).
27. *Jaeckel J., Schenk S.* Exploring High Multiplicity Amplitudes in Quantum Mechanics // Phys. Rev. D. — 2018. — T. 98, № 9. — C. 096007. — DOI: [10.1103/PhysRevD.98.096007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.096007). — arXiv: [1806.01857](https://arxiv.org/abs/1806.01857) [hep-ph].
28. *Jaeckel J., Schenk S.* Exploring high multiplicity amplitudes: The quantum mechanics analogue of the spontaneously broken case // Phys. Rev. D. — 2019. — T. 99, № 5. — C. 056010. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.056010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.056010). — arXiv: [1811.12116](https://arxiv.org/abs/1811.12116) [hep-ph].
29. *Bachas C.* A Proof of exponential suppression of high-energy transitions in the anharmonic oscillator // Nucl. Phys. B. — 1992. — T. 377. — C. 622–648. — DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90304-T](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90304-T).
30. *Cornwall J. M., Tiktopoulos G.* Semiclassical matrix elements for the quartic oscillator // Annals Phys. — 1993. — T. 228. — C. 365–410. — DOI: [10.1006/aphy.1993.1096](https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1096).
31. *Voloshin M. B.* Strong high-energy scattering in theories with weak coupling // Phys. Rev. D. — 1991. — T. 43. — C. 1726. — DOI: [10.1103/PhysRevD.43.1726](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.1726).
32. *Khlebnikov S. Y.* Semiclassical approach to multiparticle production // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 282. — C. 459–465. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90669-U](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90669-U).
33. *Gorsky A. S., Voloshin M. B.* Nonperturbative production of multiboson states and quantum bubbles // Phys. Rev. D. — 1993. — T. 48. — C. 3843. — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.3843](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.3843). — arXiv: [hep-ph/9305219](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9305219).

34. *Diakonov D., Petrov V.* Nonperturbative isotropic multiparticle production in Yang-Mills theory // Phys. Rev. D. — 1994. — T. 50. — C. 266—282. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.266](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.266). — arXiv: [hep-ph/9307356](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9307356).
35. *Son D. T.* Semiclassical approach for multiparticle production in scalar theories // Nucl. Phys. B. — 1996. — T. 477. — C. 378—406. — DOI: [10.1016/0550-3213\(96\)00386-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00386-0). — arXiv: [hep-ph/9505338](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9505338).
36. *Rubakov V. A.* Nonperturbative aspects of multiparticle production // 2nd Rencontres du Vietnam: Consisting of 2 parallel conferences: Astrophysics Meeting: From the Sun and Beyond / Particle Physics Meeting: Physics at the Frontiers of the Standard Model. — 10.1995. — arXiv: [hep-ph/9511236](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9511236).
37. *Rubakov V. A., Son D. T.* Instanton like transitions at high-energies in (1+1)-dimensional scalar models. 2. Classically allowed induced vacuum decay // Nucl. Phys. B. — 1994. — T. 424. — C. 55—70. — DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)90088-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90088-4). — arXiv: [hep-ph/9401257](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9401257).
38. *Rebbi C., Singleton Jr R. L.* Computational study of baryon number violation in high-energy electroweak collisions // Phys. Rev. D. — 1996. — T. 54. — C. 1020—1043. — DOI: [10.1103/PhysRevD.54.1020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.1020). — arXiv: [hep-ph/9601260](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9601260).
39. *Rebbi C., Singleton Jr R. L.* Numerical approaches to high-energy electroweak baryon number violation above and below the sphaleron barrier // ICTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology. — 06.1996. — C. 479—522. — arXiv: [hep-ph/9706424](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9706424).
40. *Demidov S. V., Levkov D. G.* Soliton pair creation in classical wave scattering // JHEP. — 2011. — T. 06. — C. 016. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2011\)016](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2011)016). — arXiv: [1103.2133 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1103.2133).

41. *Goldberg H., Nash D., Vaughn M. T.* Classical lambda phi\*\*4 theory in (3+1)-dimensions // Phys. Rev. D. — 1992. — T. 46. — C. 2585—2593. — DOI: [10.1103/PhysRevD.46.2585](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.2585).
42. *Demidov S. V., Farkhtdinov B. R.* Numerical study of multiparticle scattering in  $\lambda\phi^4$  theory // JHEP. — 2018. — T. 11. — C. 068. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2018\)068](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)068). — arXiv: [1806.10996](https://arxiv.org/abs/1806.10996) [hep-ph].
43. *Demidov S. V., Farkhtdinov B. R.* Constraints on multiparticle production in scalar field theory from classical simulations // EPJ Web Conf. / под ред. V. E. Volkova [и др.]. — 2018. — Т. 191. — С. 02021. — DOI: [10.1051/epjconf/201819102021](https://doi.org/10.1051/epjconf/201819102021).
44. *Khoze V. V., Reiness J.* Review of the semiclassical formalism for multiparticle production at high energies // Phys. Rept. — 2019. — Т. 822. — С. 1—52. — DOI: [10.1016/j.physrep.2019.06.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.06.004). — arXiv: [1810.01722](https://arxiv.org/abs/1810.01722) [hep-ph].
45. *Landau L. D., Lifshits E. M.* Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Т. v.3. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 1991. — (Course of Theoretical Physics). — ISBN 978-0-7506-3539-4.
46. *Rubakov V. A., Tinyakov P. G.* Towards the semiclassical calculability of high-energy instanton cross-sections // Phys. Lett. B. — 1992. — Т. 279. — С. 165—168. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)91859-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91859-8).
47. *Tinyakov P. G.* Multiparticle instanton induced processes and B violation in high-energy collisions // Phys. Lett. B. — 1992. — Т. 284. — С. 410. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90453-B](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90453-B).
48. *Mueller A. H.* Comparing two particle and multiparticle initiated processes in the one instanton sector // Nucl. Phys. B. — 1993. — Т. 401. — С. 93. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90299-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90299-5).

49. The Semiclassical description of tunneling in scattering with multiple degrees of freedom / G. F. Bonini [и др.] // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 60. — С. 076004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.60.076004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.076004). — arXiv: [hep-ph/9901226](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9901226).
50. *Levkov D. G., Panin A. G., Sibiryakov S. M.* Signatures of unstable semiclassical trajectories in tunneling // J. Phys. A. — 2009. — Т. 42. — С. 205102. — DOI: [10.1088/1751-8113/42/20/205102](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/20/205102). — arXiv: [0811.3391](https://arxiv.org/abs/0811.3391).
51. *Rubakov V. A., Son D. T., Tinyakov P. G.* Classical boundary value problem for instanton transitions at high-energies // Phys. Lett. B. — 1992. — Т. 287. — С. 342—348. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90994-F](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90994-F).
52. Singular classical solutions and tree multiparticle cross-sections in scalar theories / F. L. Bezrukov [и др.] // 10th International Workshop on High-energy Physics and Quantum Field Theory (NPI MSU 95). — 09.1995. — С. 228—238. — arXiv: [hep-ph/9512342](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9512342).
53. *Bezrukov F. L., Libanov M. V., Troitsky S. V.* O(4) symmetric singular solutions and multiparticle cross-sections in  $\phi^4$  theory at tree level // Mod. Phys. Lett. A. — 1995. — Т. 10. — С. 2135—2141. — DOI: [10.1142/S0217732395002283](https://doi.org/10.1142/S0217732395002283). — arXiv: [hep-ph/9508220](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9508220).
54. *Bezrukov F. L.* Use of singular classical solutions for calculation of multiparticle cross-sections in field theory // Theor. Math. Phys. — 1998. — Т. 115. — С. 647. — DOI: [10.1007/BF02575488](https://doi.org/10.1007/BF02575488). — arXiv: [hep-ph/9901270](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9901270).
55. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC / G. Aad [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 716. — С. 1—29. — DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020). — arXiv: [1207.7214](https://arxiv.org/abs/1207.7214) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/hep-ex)].
56. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC / S. Chatrchyan [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 716. —

- C. 30–61. — DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021). — arXiv: [1207.7235](https://arxiv.org/abs/1207.7235) [hep-ex].
57. *Khoze V. V., Spannowsky M.* Higgsplosion: Solving the hierarchy problem via rapid decays of heavy states into multiple Higgs bosons // Nucl. Phys. B. — 2018. — T. 926. — C. 95–111. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2017.11.002](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.11.002). — arXiv: [1704.03447](https://arxiv.org/abs/1704.03447) [hep-ph].
58. *Khoze V. V.* Multiparticle production in the large  $\lambda n$  limit: realising Higgsplosion in a scalar QFT // JHEP. — 2017. — T. 06. — C. 148. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2017\)148](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)148). — arXiv: [1705.04365](https://arxiv.org/abs/1705.04365) [hep-ph].
59. Problems with Higgsplosion / A. Belyaev [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — T. 98, № 11. — C. 113001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.98.113001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.113001). — arXiv: [1808.05641](https://arxiv.org/abs/1808.05641) [hep-ph].
60. *Monin A.* Inconsistencies of higgsplosion. — 2018. — АБГ. — arXiv: [1808.05810](https://arxiv.org/abs/1808.05810) [hep-th].
61. *Dine M., Patel H. H., Ulbricht J. F.* Behavior of Cross Sections for Large Numbers of Particles. — 2020. — Февр. — arXiv: [2002.12449](https://arxiv.org/abs/2002.12449) [hep-ph].
62. *Libanov M. V., Rubakov V. A., Troitsky S. V.* Multiparticle processes and semiclassical analysis in bosonic field theories // Phys. Part. Nucl. — 1997. — T. 28. — C. 217–240. — DOI: [10.1134/1.953038](https://doi.org/10.1134/1.953038).
63. *Demidov S., Levkov D.* High-energy limit of collision-induced false vacuum decay // JHEP. — 2015. — T. 06. — C. 123. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2015\)123](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2015)123). — arXiv: [1503.06339](https://arxiv.org/abs/1503.06339) [hep-ph].
64. *Khoze V. V., Spannowsky M.* Consistency of Higgsplosion in Localizable QFT // Phys. Lett. B. — 2019. — T. 790. — C. 466. — DOI: [10.1016/j.physletb.2019.01.052](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.01.052). — arXiv: [1809.11141](https://arxiv.org/abs/1809.11141) [hep-ph].

65. *Khoze V. V., Spannowsky M.* Higgsploding universe // Phys. Rev. D. — 0201. — Т. 96, № 7. — С. 075042. — DOI: [10.1103/PhysRevD.96.075042](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.075042). — arXiv: [1707.01531](https://arxiv.org/abs/1707.01531) [hep-ph].
66. *Voloshin M. B.* Loops with heavy particles in production amplitudes for multiple Higgs bosons // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 11. — С. 113003. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.113003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.113003). — arXiv: [1704.07320](https://arxiv.org/abs/1704.07320) [hep-ph].
67. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / W. Press [и др.]. — 3-е изд. — Cambridge University Press, 2007. — ISBN 9780521880688.
68. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines / N. Metropolis [и др.] // The Journal of Chemical Physics. — 1953. — Т. 21, № 6. — С. 1087—1092. — DOI: [10.1063/1.1699114](https://doi.org/10.1063/1.1699114).
69. *Pincus M.* A Monte Carlo Method for the Approximate Solution of Certain Types of Constrained Optimization Problems // Operations Research. — 1970. — Т. 18, № 6. — С. 1225—1228. — ISSN 0030364X, 15265463.
70. *NVIDIA, Vingelmann P., Fitzek F. H.* CUDA, release: 10.2.89. — 2020. — <https://developer.nvidia.com/cuda-toolkit>.
71. *Demidov S. V., Farkhtdinov B. R., Levkov D. G.* Numerical study of multiparticle production in  $\phi^4$  theory: comparison with analytic results // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2021. — Т. 114. — С. 723. — DOI: [10.1134/S0021364021230028](https://doi.org/10.1134/S0021364021230028). — arXiv: [2111.04760](https://arxiv.org/abs/2111.04760) [hep-ph].
72. *Demidov S. V., Farkhtdinov B. R., Levkov D. G.* Suppression exponent for multiparticle production in  $\lambda\phi^4$  theory // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 205. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2023\)205](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2023)205). — arXiv: [2212.03268](https://arxiv.org/abs/2212.03268) [hep-ph].
73. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Statistical Physics, Part 1. Т. 5. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 1980. — (Course of Theoretical Physics). — ISBN 978-0-7506-3372-7.



74. *Tabor M.* Chaos and integrability in nonlinear dynamics : an introduction. — New York (N.Y.) : Wiley, 1989.
75. *Froissart M.* Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation // *Phys. Rev.* — 1961. — T. 123. — C. 1053. — DOI: [10.1103/PhysRev.123.1053](https://doi.org/10.1103/PhysRev.123.1053).
76. *Levkov D., Nugaev E., Popescu A.* The fate of small classically stable Q-balls // *JHEP.* — 2017. — T. 12. — C. 131. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2017\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2017)131). — arXiv: [1711.05279](https://arxiv.org/abs/1711.05279).
77. The Epsilon Expansion Meets Semiclassics / G. Badel [и др.] // *JHEP.* — 2019. — T. 11. — C. 110. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2019\)110](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2019)110). — arXiv: [1909.01269](https://arxiv.org/abs/1909.01269).

# Список иллюстративного материала

1.1	Результат поиска классически достижимых $\tilde{N}_f$ при фиксированном $\tilde{N}_i = 1$ и параметрах решётки $N_r = 400$ , $R = 20$ . Каждой точке на графике соответствует классическое решение, описывающее рассеяние при соответствующих $\tilde{N}_f$ и $\tilde{E}$ . Зелёным (светло-серым) точкам соответствуют решения, полученные при поиске максимума $\tilde{N}_f$ , красным (тёмно-серым) — минимума. Граница (сплошная линия) построена по решениям с максимальным изменением числа частиц. . . . .	29
1.2	Примеры начальных волновых пакетов $\phi(t = 0, r)$ решений, соответствующих верхней границе $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ для набора энергий $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$ и $11$ . Параметры решётки: $N_r = 400$ , $R = 20$ . Пунктирными линиями показаны границы пространственного интервала $[r_1, r_2]$ . . . . .	31
1.3	Эволюция поля $\chi(t, r) = r\phi(t, r)$ , соответствующего решению на верхней границе $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$ при $\tilde{E} \approx 6.1$ ; $N_r = 400$ , $R = 20$ . . . . .	32
1.4	Изменение во времени (а) мгновенного числа частиц $\tilde{N}(t)$ , (б) линеаризованной (сплошная линия) и полной (пунктирная линия) энергий для решения, изображённого на Рис. 1.3. . . . .	33
1.5	Дифференциальные распределения энергии $\epsilon_k$ по волновому числу для начального (толстая линия) и конечного (тонкая линия) волновых пакетов граничных решений, изображённых на Рис. 1.2. . . . .	34

- 1.6 Классически разрешённая область в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 1$ , найденная численно для трёх вариантов пространственной решётки: 1)  $N_r = 400, R = 20$  (квадраты, толстая сплошная линия); 2)  $N_r = 600, R = 20$  (круги, пунктирная линия); 3)  $N_r = 600, R = 30$  (треугольники, пунктирная линия); 4)  $N_r = 400, R = 20$ , но начальные конфигурации граничных решений сдвинуты по времени (квадраты, тонкая линия). . . . . 35
- 1.7 То же, что и на Рис. 1.2, но при  $N_r = 600, R = 30$ . Начальные волновые пакеты  $\phi(t = 0, r)$  для решений на верхней границе с  $\tilde{N}_f = \tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  для набора энергий  $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$  и  $11$ . Пунктирная линия демонстрирует пространственный интервал, на котором задаётся начальный волновой пакет. . . . . 36
- 1.8 Распределение  $\epsilon_k$  энергии по модам в импульсном пространстве для начальных конфигураций решений на верхней границе при  $N_r = 400, R = 20$  (толстая линия) и  $N_r = 600, R = 30$  (тонкая линия). Соответствующие конфигурации изображены на Рис. 1.2 и Рис. 1.7. . . . . 37
- 1.9 Полевые конфигурации, соответствующие верхней границе классически разрешённой области, связанные друг с другом сдвигом по времени (толстая и тонкая линии) при  $\tilde{E} \approx 3, 4.5, 8$  и  $11$ . Параметры пространственной решётки:  $N_r = 400, R = 20$ . Пунктирные линии демонстрируют пространственный интервал, на котором задавалась начальная конфигурация. . . . . 38
- 1.10 То же, что на Рис. 1.2 но для решений на нижней части границы. 39
- 1.11 Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 0.1, N_r = 600, R = 30$ . . . . . 40

- 1.12 Примеры (а) начальных волновых пакетов и (б) изменения мгновенного числа частиц для граничных решений с  $\tilde{N}_i = 0.1$  и  $\tilde{E} \approx 0.6$ . Графики слева соответствуют решению на верхней границе классически разрешённой области, а графики справа — на нижней. 41
- 1.13 Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  для  $\tilde{N}_i = 10.0$ ,  $N_r = 600$ ,  $R = 30$ . Части границы  $\tilde{N}_f^{\min}(\tilde{E})$  и  $\tilde{N}_f^{\max}(\tilde{E})$  составлены при помощи классических решений с двумя пиками (сплошная линия) и тремя пиками (пунктирная линия). Точками показаны ветки решений, которые дают локальные минимумы функционала  $\mathcal{F}$  (или экстремумы  $\tilde{N}_f$ ). . . 42
- 1.14 Примеры граничных решений с  $\tilde{N}_i = 10$ . (а) Начальный волновой пакет; (б) эволюция мгновенного числа частиц  $\tilde{N}(t)$ ; (с) распределение энергии  $\epsilon_k$  по модам для начальной конфигурации; (д) то же, что и на рисунке (с), но для конечной конфигурации. Рисунки относятся к решениям на нижней части границы при  $\tilde{E} \approx 65$  в левом столбце, а в правом — при  $\tilde{E} \approx 80$ . . . . . 44
- 1.15 (а) Начальные волновые пакеты и (б) эволюция мгновенного числа частиц для решений с  $\tilde{N}_i = 10$  и  $\tilde{E} \approx 80$  соответствующих локальным минимумам  $\tilde{N}_f$ . Левый столбец соответствует процессу с  $\tilde{N}_f > \tilde{N}_i$ , а правый — с  $\tilde{N}_f < \tilde{N}_i$ . . . . . 45
- 1.16 Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости  $(\tilde{E}, \tilde{N}_f)$  при  $\tilde{N}_i = 30$ . Использовались решётки с параметрами  $R = 30$ ,  $N_r = 600$  (сплошная линия) и  $R = 50$ ,  $N_r = 1000$  (пунктирная линия). . . . . 46
- 1.17 (а) Начальные волновые пакеты и (б) изменение мгновенного числа частиц для граничных решений с  $\tilde{N}_i = 30$  и  $\tilde{E} \approx 200$ . Левый столбец соответствует  $\tilde{N}_f > \tilde{N}_i$ , а правый —  $\tilde{N}_f < \tilde{N}_i$ . . . . . 47

1.18	(а) Область классически разрешённых процессов рассеяния в плоскости $(\tilde{E}/\tilde{N}_i, \tilde{N}_f/\tilde{N}_i)$ для различных $\tilde{N}_i$ , (б) разница $ \tilde{N}_f^{\min} - \tilde{N}_i $ как функция от $\tilde{N}_i$ при фиксированном $\tilde{E}/\tilde{N}_i$ . . . . .	49
2.1	Контур A0B в плоскости комплексного времени для квазиклассической граничной задачи (толстая сплошная линия со стрелками, иллюстрирующими направление эволюции) и сингулярности $t_*(\mathbf{x})$ , $t'_*(\mathbf{x})$ , $t''_*(\mathbf{x})$ квазиклассических решений (тонкие линии, начинающиеся от закрашенных кругов или кругов с крестами). Изображение схематичное. . . . .	54
2.2	(а) Экспонента $F_J$ в зависимости от амплитуды источника $j_0$ при $\varepsilon = 3$ . Цепочка решений $S_0S$ (круги) получена при помощи увеличения $j_0$ при фиксированных $\lambda n/j_0^2 \approx 10^{-2}$ и $\sigma \approx 0.13$ , в то время как решения с нижней цепочки $SS_1$ (также круги) имеют фиксированное $\lambda n \approx 2.51$ и $j_0/\sigma \approx 120$ . Пунктирная и сплошная линия показывают экспоненту подавления (2.37) в линейной теории и полиномиальную экстраполяцию (2.41) в $j_0 = 0$ соответственно. (б) Экстраполяции $j_0 \rightarrow 0$ при различных значениях $j_0/\sigma$ для $\varepsilon = 3$ и $\lambda n = 2.51$ (линии, проходящие через круги). Мы положили $m = 1$ . . . . .	67
3.1	Численные значения для функции $f(\varepsilon)$ (круги с интервалами погрешностей) в сравнении с древесными результатами: $O(4)$ -симметричной оценкой из работ [53; 54] (сплошная линия) и разложением при малых $\varepsilon$ (3.2) (пунктирная линия). . . . .	74
3.2	Седловое решение $\phi_{cl}(t, r)$ с параметрами $\lambda n \approx 0.63$ , $\varepsilon = 0.5$ , $j_0 = 0.6$ , и $\sigma \approx 0.18$ при $m = 1$ . Цвет обозначает комплексную фазу решения. . . . .	75

- 3.3 Два квазиклассических решения, полученных из решения с Рис. 3.2 при помощи увеличения (а) числа частиц в конечном состоянии  $\lambda n$  и после этого — (b) средней кинетической энергии  $\varepsilon$  рождённых частиц. Пик решения (b) при  $t, r \approx 0$  обрезан для удобства визуализации. Параметры решений: (а)  $\lambda n \approx 18.8$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $j_0 = 7.8$ ,  $\sigma \approx 0.41$  и (b)  $\lambda n \approx 18.8$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 12$ ,  $\sigma \approx 0.2$ . Цвет соответствует фазе комплексного  $\phi_{\text{cl}}(t, r)$ . Параметр  $m$  положен равным 1. . . . . 76
- 3.4 (а) Действительная часть обратного поля  $\text{Re} [\phi_{\text{cl}}(0, r)]^{-1}$  при  $t = +0$  и малых  $r$ . Численные результаты (круги) интерполируются полиномом второй степени из уравнения (2.28) (сплошная линия). Параметры изображённого решения  $\lambda n \approx 2.51$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 6$  и  $\sigma = 0.05$ . (b) Положение вершины  $t_*(0)$  “главной” поверхности сингулярности в зависимости от  $j_0$  (круги). Этот график соответствует  $j_0/\sigma = 120$  и тем же параметрам конечного состояния, как на рисунке (а). Сплошная линия соответствует фите параболой  $t_*(0) \propto j_0^2$ . Параметр  $m$  положен равным 1. . . . . 77
- 3.5 Отмасштабированные распределения чисел заполнения  $a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*/(\lambda n)$  в конечном состоянии как функции от энергии частиц  $\omega_{\mathbf{k}}$ . Два графика соответствуют  $\lambda n \approx 2.51$  и  $\lambda n \approx 12.57$  при  $\varepsilon = 3$ ,  $j_0 = 0$ . Мы положили параметр  $m$  равным 1. . . . . 78
- 3.6 (а) Обратное значение модуля поля  $|\phi_{\text{cl}}(0, r)|^{-1}$  как функция от масштабированной радиальной координаты  $r/r_{\text{int}}$  при  $t = 0$ . Все графики соответствуют  $\varepsilon = 1$ ,  $j_0 = 12$ , и  $\sigma \approx 0.19$ . (b) Плотность энергии  $|\rho_{\mathcal{E}}|$  в зависимости от  $r/r_{\text{int}}$  для решения с  $\lambda n \approx 37.7$ . Остальные параметры взяты теми же, что на рисунке (а). Параметр  $m$  положен равным 1. . . . . 79

- 3.7 (а) Контуры и поверхности сингулярности в плоскости комплексного времени (качественно). (б) Комплексная фаза  $\arg \phi_{\text{cl}}(t, 0)$  седловой конфигурации, как функция комплексного времени при  $r = 0$  (цвет). Сплошные чёрные линии отображают сингулярности  $\phi_{\text{cl}}$ . Мы не вычисляем решение в белых областях под ними. Решение имеет параметры  $\lambda n = 2.51$ ,  $\varepsilon = m/2$ ,  $j_0 = 0.053 m^2$ , и  $\sigma = 0.29 m^{-1}$ . . . . . 81
- 3.8 Комплексная фаза численного решения  $\phi_{\text{cl}}(t_1, r)$  как функция от  $r$  в точке  $t = t_1$  на второй цепочке сингулярностей  $t'_*(r_1) = t_1$ , изображённой на Рис. 3.7а. Окрестность  $r_1$  изображена вертикальной полупрозрачной серой полосой. Два графика (точки и круги) получены при помощи аналитического продолжения вдоль контуров  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$ , изображённых на Рис. 3.7а. Решение имеет следующие параметры:  $\lambda n = 2.51$ ,  $\varepsilon = m/2$ ,  $j_0 = 0.053 m^2$  и  $\sigma = 0.29 m^{-1}$ . . . . . 82
- 3.9 (а) Экспонента  $F(\lambda n, \varepsilon)$  вероятности многочастичного рождения в модели (1) при  $\varepsilon = 3m$ . Численные данные (круги) интерполируют между древесным результатом при  $\lambda n \ll 1$  (пунктирная линия и уравнение (3.1)) и линейной асимптотикой (3.6) при  $\lambda n \gg 1$  (сплошная линия). (б) Экспонента подавления  $F$  как функция от  $\lambda n$  при фиксированном  $\varepsilon$ . Точки соответствуют численным данным, линии соответствуют интерполяциям функцией (3.7). . . . . 83
- 3.10 (а) Наклон  $f_\infty(\varepsilon)$  (см. (3.6)) экспоненты подавления вероятности многочастичного рождения при больших  $\lambda n$  (круги) как функция от  $\varepsilon$  и интерполяция (3.8) (сплошная линия). (б) Параметры из выражения (3.7) при разных значениях  $\varepsilon$ . . . . . 84

3.11	(а) Экспонента подавления $F_{\mathcal{A}}(\lambda n)$ (3.9) для амплитуды рождения $n$ частиц на массовом пороге (круги с интервалами погрешности), интерполяция численных данных (сплошная линия), древесный результат (линия из точек), древесный результат с однопетлевой поправкой (пунктирная линия). (б) Множитель Лагранжа $T$ как функция от $\varepsilon$ при $\lambda n \approx 18.8$ и $j_0 = 0$ (круги). Сплошная линия соответствует асимптотике $T \propto \varepsilon^{-3}$ при больших $\varepsilon$ . . . . .	85
3.12	Энтропия $\Sigma_V(n, E)$ для $n$ свободных нерелятивистских частиц с полной энергией $E \approx nt$ в конечном объёме $V$ (сплошная линия, схематично). Пунктирная линия соответствует логарифму фазового объёма. . . . .	91



## Приложение А

### Формулировка граничной задачи на пространственно-временной решётке

#### А.1. Действие, энергия и уравнения на решётке

Для численной реализации метода, описанного в Главе 2, делается замена сферически-симметричной конфигурации  $\phi(t, r) = \chi(t, r)/r$ . Действие (2.7) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda S_J}{2\pi} = & \int dt \int_0^\infty dr \left[ (\partial_t \chi)^2 - (\partial_r \chi)^2 - \chi^2 - \frac{\chi^4}{2r^2} \right] \\ & + \int_0^\infty dr \left[ 2ir J \chi|_{t=0} - \chi \partial_t \chi|_{t_{N_t+1}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где мы положили  $m = 1$ , проинтегрировали по частям и проигнорировали граничные члены при  $r \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow +i\infty$ : поле экспоненциально спадает в этих областях. Однако мы удерживаем граничный член, соответствующий конечному моменту времени  $t = t_{N_t+1}$ . При дискретизации использовалась равномерная решётка по пространству. Она имеет  $N_r = 256$  узлов  $r_i \equiv i \cdot \Delta r$  пронумерованных целыми числами  $0 \leq i \leq N_r - 1$ . Узлы располагались в сферическом ящике размера  $R = 6.5 \div 100$ . Расстояние между узлами решётки равно  $\Delta r = R/(N_r - 1)$ . С другой стороны, решётка по времени  $\{t_j\}$  была выбрана существенно неоднородной с шагом

$$|\Delta t_j| \equiv |t_{j+1} - t_j| = \Delta t' \left\{ 1 + \alpha \text{th}[\beta(j - N_0 - N_1)] - \alpha \text{th}[\beta(j - N_0 + N_1)] \right\}, \quad (\text{A.2})$$

где  $|\Delta t_j| \approx \Delta t'$  вдали от  $t = 0$ , узел  $N_0$  соответствует моменту времени  $t_{N_0} = 0$  где расположен источник, и узлы решётки расположены более часто при

$N_0 - N_1 \lesssim j \lesssim N_0 + N_1$ , что достигается выбором параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Напомним, что  $t_j$  покрывает сложный контур<sup>1</sup> по времени А0В с Рис. 2.1. Поэтому  $\Delta t_j$  являются чисто мнимыми при  $j < N_0$  и действительными при больших  $j$ . На практике мы выбирали достаточно малое  $\Delta t'$ , чтобы можно было разрешить расходящиеся волны, а размер шага по времени вблизи источника  $|\Delta t_{N_0}| = \Delta t' [1 - 2\alpha \tanh(\beta N_1)]$  выбирался примерно на два порядка меньше по амплитуде. Мы выбираем размер области высокого временного разрешения при помощи подстройки параметров  $N_1$  и  $\beta$ , а затем подбираем  $\alpha$  так, чтобы выполнялось  $\alpha \tanh(\beta N_1) - 1/2 \sim 10^{-2}$ . После выбора параметров неравномерной решётки мы находим положения узлов  $t_j$  и целочисленные значения  $N_0, N_t$ , интегрируя уравнение (A.2). Типичные размеры решётки по времени составляют  $7061 \leq N_t \leq 12201$ , индекс  $N_0 \sim N_t/3$ , размер области с высокой плотностью узлов  $N_1 \sim N_t/4$ ,  $\beta^{-1} \sim 10^3$ , коэффициент деформации  $\alpha \approx 0.57$ .

Мы дискретизируем действие (A.1) используя значения поля  $\chi_{j,i} = r_i \phi_{j,i}$  в узлах решётки и конечные разности второго порядка

$$\partial_t \chi \rightarrow (\chi_{j+1,i} - \chi_{j,i})/\Delta t_j, \quad \partial_r \chi \rightarrow (\chi_{j,i+1} - \chi_{j,i})/\Delta r, \quad \Delta t_j \equiv t_{j+1} - t_j. \quad (\text{A.3})$$

Эти производные дискретизованы относительно центральных точек  $(j + 1/2, i)$  и  $(j, i + 1/2)$  по времени и пространству соответственно. Мы также заменяем интегралы в уравнении (A.1) при помощи составного метода трапеций [67], а именно

$$\int dt L(t) \rightarrow \sum_{j=-1}^{N_t} \Delta t_j L_{j+1/2} \quad \text{или} \quad \sum_{j=-1}^{N_t+1} \Delta \bar{t}_j L_j, \quad (\text{A.4})$$

где первый вариант используется в кинетическом слагаемом  $L = (\partial_t \chi)^2$ , а второй — во всех остальных. В уравнении (A.4) были введены конечные разности  $\Delta \bar{t}_j = (\Delta t_{j-1} + \Delta t_j)/2$  во внутренних узлах решётки и  $\Delta \bar{t}_{-1} = \Delta t_{-1}/2$  и  $\Delta \bar{t}_{N_t+1} = \Delta t_{N_t}/2$  на границах. Дискретизация радиальной координаты про-

<sup>1</sup> Как было сказано в Разделе 2.5, в определённых случаях контур при  $j > N_0$  деформируется в контур, обозначенный пунктирной линией 0В'В на Рис. 2.1. Тогда комплексная фаза  $\Delta t_j$  определяется наклоном контура.

изводится схожим образом. При условии равномерности шага по  $r$ , получаем разности  $\Delta\bar{r}_i = \Delta r$  для внутренних узлов решётки и  $\Delta\bar{r}_0 = \Delta\bar{r}_{N_r-1} = \Delta r/2$  для границы.

Мы накладываем граничное условие Неймана  $\partial_r\phi_{\text{cl}} = 0$  на пространственной границе  $r = R$  и требуем регулярности  $\phi_{\text{cl}}$  в начале координат  $r = 0$ . В терминах поля  $\chi(t, r)$  эти условия означают

$$\partial_r\chi(t, R) = R^{-1}\chi(t, R) \quad \text{и} \quad \chi(t, 0) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Для того, чтобы наложить такие условия согласованно с уравнением поля, мы добавляем член  $\lambda\Delta S_J/2\pi = \int dt [\chi^2(t, R)/R - 2\chi(t, 0)\partial_r\chi(t, 0)]$  к классическому действию (A.1). После этого уравнения (A.5) получаются при экстремизации  $S_J$  по  $\chi(t, R)$  и  $\chi(t, 0)$ . Эта модификация действия не изменяет величины экспоненты подавления, потому что седловое значение  $\chi_{\text{cl}}(t, R)$  экспоненциально мало и  $\chi_{\text{cl}}(t, 0)$  равно нулю. Мы дискретизируем добавочный член  $\Delta S_J$  тем же образом, что и остальные.

Подстановки (A.3) и (A.4) дают действие на решётке

$$\begin{aligned} \frac{\lambda S_J}{2\pi} = & \sum_{j=-1}^{N_t} \sum_{i=0}^{N_r-1} \frac{\Delta\bar{r}_i}{\Delta t_j} (\chi_{j+1,i} - \chi_{j,i})^2 - \sum_{j=-1}^{N_t+1} \sum_{i=0}^{N_r-2} \frac{\Delta\bar{t}_j}{\Delta r} (\chi_{j,i+1} - \chi_{j,i})^2 \\ & + 2i \sum_{i=0}^{N_r-1} \Delta\bar{r}_i r_i J_i \chi_{N_0,i} - \sum_{j=-1}^{N_t+1} \sum_{i=0}^{N_r-1} \Delta\bar{t}_j \Delta\bar{r}_i \left( \chi_{j,i}^2 + \frac{\chi_{j,i}^4}{2r_i^2} \right) \\ & + \sum_{j=-1}^{N_t+1} \Delta\bar{t}_j \left( \frac{\chi_{j,N_r-1}^2}{R} - \frac{2}{\Delta r} \chi_{j,0} \chi_{j,1} \right) - \int_0^\infty dr \chi \partial_t \chi \Big|_{t_{N_t+1}}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

где  $J_i \equiv J(r_i)$ , а граничный член при  $t = t_{N_t+1}$  записан в непрерывной форме; мы обсудим его дискретизацию в Разделе A.2. Дискретизованное уравнение поля и пространственные граничные условия при  $r = 0, R$  получаются при помощи экстремизации уравнения (A.6) по отношению к  $\chi_{j,i}$ .

## А.2. Граничные условия на решётке

В этом разделе Приложения мы обсудим вывод граничных условий в асимптотическом прошлом и будущем для дискретизованных седловых уравнений. Условие (2.8) может быть задано на самом первом узле по времени

$$\chi_{-1,i} = 0. \quad (\text{A.7})$$

При больших положительных временах эволюция поля становится линейной, решётка по времени становится близкой к равномерной:  $\Delta t_j \approx \Delta t'$ . Дискретизованное уравнение поля в этом случае упрощается,

$$\frac{\chi_{j+1,i} + \chi_{j-1,i} - 2\chi_{j,i}}{\Delta t'^2} - \sum_{i'} \Delta_{i,i'} \chi_{j,i'} + \chi_{j,i} = 0, \quad (\text{A.8})$$

где трёхдиагональная матрица  $\Delta_{i,i'}$ , заменяющая оператор Лапласа, может быть явно получена из дискретизованного действия. Мы решаем уравнение (A.8), используя базис собственных векторов  $\psi_i^{(l)}$  матрицы  $\Delta_{i,i'}$ :  $\Delta \psi^{(l)} = -k_l^2 \psi^{(l)} \equiv -(\omega_l^2 - 1) \psi^{(l)}$ , где  $k_l$  является дискретным аналогом импульса,  $l$  — целое число. Общее решение

$$\chi_{j,i} = \sum_{l=1}^{N_r} \frac{\psi_i^{(l)}}{\sqrt{2\omega_l}} (a_l e^{-i\mu_l t_j} + b_l^* e^{i\mu_l t_j}), \quad \mu_l = \frac{2}{\Delta t'} \arcsin\left(\frac{\Delta t'}{2} \omega_l\right) \quad (\text{A.9})$$

может быть параметризовано произвольными комплексными амплитудами  $a_l$  и  $b_l^*$ , содержащимися в слагаемых, осциллирующих с частотами  $\pm\mu_l$ . В непрерывном пределе, собственные векторы переходят в сферические гармоники,  $\psi_i^{(l)} \propto \sin(k_l r_i)$ , частоты начинают удовлетворять дисперсионным соотношениям  $\mu_l^2 \rightarrow k_l^2 + 1$ , а амплитуды  $a_l$  и  $b_l$  становятся пропорциональными отрицательно и положительно частотным амплитудам в непрерывной версии теории. Таким образом, уравнение (A.9) представляет собой дискретную версию разложения по плоским волнам (2.9). На практике мы численно находим спектр  $\{\psi^{(l)}, k_l^2 \equiv \omega_l^2 - 1\}$  для  $\Delta_{i,i'}$  и извлекаем амплитуды используя значения поля

на двух последних узлах решётки по времени следующим образом

$$a_l = \frac{ie^{i\mu_l t_{N_t+1}} \sqrt{\omega_l}}{\sqrt{2} \sin(\mu_l \Delta t')} \sum_{i=0}^{N_r-1} \Delta \bar{r}_i \psi_i^{(l)} \left( \chi_{N_t+1,i} e^{-i\mu_l \Delta t'} - \chi_{N_t,i} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$b_l^* = \frac{e^{-i\mu_l t_{N_t+1}} \sqrt{\omega_l}}{i\sqrt{2} \sin(\mu_l \Delta t')} \sum_{i=0}^{N_r-1} \Delta \bar{r}_i \psi_i^{(l)} \left( \chi_{N_t+1,i} e^{i\mu_l \Delta t'} - \chi_{N_t,i} \right),$$

где  $\psi_i^{(l)}$  нормируются<sup>2</sup>, как  $\sum_i \Delta \bar{r}_i \psi_i^{(l)} \psi_i^{(l')} = \delta_{ll'}$ . Граничное условие в последний момент времени (2.10) в дискретизованном виде<sup>3</sup>

$$a_l = e^{-\theta+2\omega_l T} b_l \quad (\text{A.11})$$

задаёт систему уравнений на  $\chi_{N_t,i}$  и  $\chi_{N_t+1,i}$ .

Последний член в действии (A.6) дискретизируется заменой

$$\int_0^\infty dr \chi \partial_t \chi \Big|_{t_{N_t+1}} \rightarrow \sum_{i=0}^{N_r-1} \sum_{l=1}^{N_r} \Delta \bar{r}_i \chi_{N_t+1,i} \psi_i^{(l)} \left( \frac{\tilde{\chi}_{N_t+1,l} - \tilde{\chi}_{N_t,l}}{\Delta t_{N_t}} - \frac{\Delta t_{N_t}}{2} \omega_l^2 \tilde{\chi}_{N_t+1,l} \right), \quad (\text{A.12})$$

где  $\tilde{\chi}_{j,l} \equiv \sum_i \Delta \bar{r}_i \psi_i^{(l)} \chi_{j,i}$  — поле, разложенное по свободным волнам на решётке. Можно убедиться, что выражение (A.12) является дискретизацией второго порядка по  $\Delta t_j$ , раскладывая в ряд Тейлора по  $\Delta t_j$  и применяя уравнение поля (A.8).

Имея разложения (A.9), можно вычислить параметры конечного состояния следующим образом

$$\lambda E = 4\pi \sum_l \omega_l a_l b_l^*, \quad \lambda n = 4\pi \sum_l a_l b_l^*. \quad (\text{A.13})$$

<sup>2</sup> Эта форма скалярного произведения связана с тем фактом, что матрица  $\Delta \bar{r}_i \Delta_{i,i'}$  симметричная, а сама  $\Delta_{i,i'}$  — нет.

<sup>3</sup> Один из собственных векторов  $\Delta_{i,i'}$  имеет вид  $\psi_i^{(N_r)} \propto \delta_{0,i}$ . Это связано с выбором граничного члена при  $i=0$  в уравнении (A.6). Однако уравнение (A.11) вместе с граничным условием  $\chi_{j,0} = 0$  гарантируют, что  $a_{N_r} = b_{N_r} \equiv 0$  для всех полученных решений.

Видно, что эти выражения воспроизводят (2.11) в непрерывном пределе. В частности, в этом пределе непрерывные числа заполнения равны

$$a_k b_k^* \approx \frac{a_l b_l^*}{k_l^2 \Delta k_l}, \quad (\text{A.14})$$

где  $\Delta k_l = k_l - k_{l-1} \approx \pi/R$ .

Стоит отметить, что полная нелинейная энергия (2.15) дискретизируется тем же образом, что и классическое действие. Мы проверяли её сохранение вдоль частей контура по времени  $A0$  и  $0B$  для оценки численных ошибок. Также, разность между полной энергией (2.15) и линеаризованной (2.11), которая была получена при помощи разложения по свободным волнам, служит оценкой нелинейных эффектов в конечном состоянии. При корректном выборе контура по времени эти нелинейные эффекты малы.