На правах рукописи

Березин Виктор Александрович

К теории квантовых черных дыр

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институт ядерных исследований РАН.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор *Волович Игорь Васильевич (МИАН)*

доктор физико-математических наук,
профессор *Гриб Андрей Анатольевич (РГПУ)*

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор *Новиков Игорь Дмитриевич (АКЦ ФИАН)*

Ведущая организация:

Лаборатория теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова
Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)

Защита диссертации состоится ______________________________

в часов мин. на заседании диссертационного совета Д 002.119.01 Учреждения Российской академии наук Института ядерных исследований РАН по адресу: 117312 Москва, проспект 60-летия Октября, дом 7а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института ядерных исследований РАН.

Автореферат разослан ______________________________

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.119.01
кандидат физико-математических наук *Б. А. Тулупов*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. С момента первого упоминания в научной литературе о “темных звездах” в 1784 году наука о черных дырах превратилась в самостоятельную и широко разветвленную отрасль теоретической физики. Естественно, вначале все внимание было приковано к астрофизическим проявлениям черных дыр, позволяющих, в принципе, их обнаружить. Эта работа далеко не закончена, более того, она получила новый импульс после обнаружения черных дыр не только звездной массы, но и гигантских - в активных ядрах галактик и даже в центре нашей Галактики Млечный Путь.

Параллельно астрофизическим исследованиям, постепенно прояснялась и сложная причинная структура пространства-времени, содержащего черную дыру. Трудность состояла в том, что в решении уравнений Эйнштейна для точечной гравитирующей массы, найденного К.Шварцшильдом в 1916 г., почти сразу же после окончательной формулировки уравнений общей теории относительности А.Эйнштейном и Д.Гильбертом, имелась явная сингулярность при некотором значении радиуса, пропорциональном массе источника. И хотя этот радиус (известный под именами “радиус Шварцвальд” и “гравитационный радиус”) совпал с размерами темных звезд Дж.Мичелла (1984 г.), вычисленным П.-С.Лапласом в 1799 году, людям трудно было представить себе столь радикальные изменения в структуре пространства-времени, которые принесло углубленное изучение многообразия Шварцшильда. Прорыв в понимании этого произошел в конце 50-х - начале 60-х годов прошлого столетия и связан с именами Д.Финкельштейна, Ч.Фронсдала, М.Крускала и И.Д.Новикова. А в работах Р.Пенроуза и С.Хокинга было дано математическое определение горизонта событий, который и служит пространственно-временной границей черной дыры.

Но, проникнув, конечно,теоретически, внутрь черной дыры, ученые обнаружили, что на нулевом радиусе имеется истинная сингулярность (в отличие от координатной сингулярности Шварцшильда), где тензор кривизны Римана становится бесконечным, что вызывает бесконечные приливные силы. Аналогия с нерелятивистской теорией подсказывала, что там сосредоточен источник тяготения. Но сингулярность оказалась очень необычной - она пространственно-подобная. Это означает, что (при подходящем выборе временной координаты) она существует мгновение в начальный момент, затем исчезает и возрождается, как Феникс, на мгновение в конечный момент. Полное пространство-время Шварцшильда с точечным источником называется "весной черной дырой". Но даже если источник распределенный, и мировая линия его границы времени-подобна, то вне источника эта сингулярность никуда не исчезает. Долгое время появление сингулярности в "центре" черной дыры, так же как и начальной сингулярности в космологии, считалось просто артефактом высокой степени симметрии в соответствующих решениях уравнений Эйнштейна. Но после доказательства знаменитых теорем Р.Пенроузом и С.Хокингом выяснилось, что сингулярности являются неотъемлемым атрибутом общей теории относительности при выполнении достаточно естественных условий энергодоминантности для тензора энергии-импульса, означающих просто. что гравитация является только притягивающей силой. Дж.А.Уилео считал, что неизбежность сингулярностей есть проявление величайшего кризиса классической физики. Надежды стали возлагать на квантовую теорию гравитации.

В настоящее время существуют три квантовых теории, в которых гравитационное поле рассматривается как фундаментальное или компонентой более общего фундаментального взаимодействия. Это каноническая квантовая теория, известная также как квантовая геометродинамика, теория струн и петлевая квантовая гравитация. В первой из них основными объектами служат трехмерные геометрии на некотором пространственно-подобном сечении четырехмерного псевдоевклидового многообразия, в двух других - своеобразные протяженные конструкции. Во всяком случае, ясно, что вводимая квантовой теорией нелокальность - млм в виде волновой функции (функционала от геометрий), или же напрямую в виде струн и петель, поможет, в конце концов, решить проблему сингулярностей. Для нас важно другое: вся история квантовой механики свидетельствует о том, что квантовые эффекты проявляются на всех доступных расстояниях. Для больших черных дыр (с массами и размерами гораздо больше планковских, 10^{-5}гр и 10^{-33}см, соответственно), которые можно считать квази-классическими, естественной границей служит классическая граница черной дыры - горизонт событий (в нашем частном случае - сфера Шварцшильда). Это значит, что черные дыры можно рассматривать как единый квантовый объект. Нужно также помнить, что в любой релятивистской теории гравитации свойства материи неизменно отражаются в свойствах пространства-времени, и наоборот. Можно предположить, по аналогии с теорией конденсированных тел, существование “гравитационных фононов”, из которых и состоит квантовая черная дыра.

Не только квантовая теория должна играть важную роль в теории черных дыр, но и наоборот, черные дыры должны играть фундаментальную роль в квантовой теории других полей. Это следует из идей М.А.Маркова, высказанных им в 1965-1966 годах. Он высказал предположение, что существует частица массы Планка, 10^{-5}гр, названный им “максимоном”, является одновременно и верхним пределом масс элементарных частиц, и мощным регуляризатором присущих квантовой теории поля расходимостей на малых расстояниях. Поскольку комптоновский радиус максимона того же порядка, что и его гравитационный радиус, он должен считаться квантовой частицей и в то же время квантовой черной дырой. Но тут возникает концептуальная трудность. Дело в том, что само понятие горизонта событий, границы черной дыры - глобальное, для его определения необходимо знать всю историю, как прошлую, так и будущую. И если это, теоретически, возможно в классической теории, то как быть в квантовом случае? Таким образом, определения квантовой черной дыры в настоящее время не существует. Но есть надежда, что исследование квантовых моделей и, в их рамках, квази-классических черных дыр поможет перекинуть мостик от классических черных дыр к квантовым и сформулировать такое определение. При этом глобальная структура пространства-времени, содержащего черную дыру, будет играть значительную, если не решающую, роль, поскольку, как мы знаем, поведение волновых функций в квантовой механике особенно чувствительно именно к глобальной структуре, определяющей необходимые граничные условия (пример тому - известная задача о двойной потенциальной яме).

Глобальность горизонта событий, из-под которого не может вырваться на бесконечность даже свет, имеет еще одно важное последствие. Исследование многих ученых на протяжении примерно двух десятков лет завершилось работами Дж.Бекенштейна (1973 г.) и С.Хокинга (1974 г.), ознаменовавшими возникновение новой науки - термодинамики черных дыр. Оказалось, что волновые функции квантованного безмассового скалярного поля на фоне метрики Шварцшильда ведут себя так же, как и температурнае волновые функции, а черная дыра вследствие квантовых эффектов испускает чернотельное излучение с планковским спектром. При этом изменение массы (энергии) черной дыры общего вида (а не только шварцшильдовой) можно записать в виде первого закона термодинамики, а второе начало - неубывании энтропии, соответствует одному из основных законов классических черных дыр - неубыванию площади поверхности горизонта событий. Из вычислений следовало, что энтропия черной дыры равна одной четверти этой площади (обезразмеренной комбинацией мировых констант: гравитационной постоянной и скоростью света). Это замечательно простое соотношение было позднее подтверждено прямыми подсчетами числа квантовых состояний на горизонте как в петлевой квантовой гравитации, так и в теории струн. Следует заметить, что в теории струн появляются классические решения с горизонтами событий, которые ничего общего не имеют с обычными пространственно-временными черными дырами, но для вычисления энтропии это не имеет значения. Для нас важно то, что в самосогласованной картине при учете обратного влияния материи на структуру пространства-времени существование такого квантового излучения отражает квантовую структуру даже квази-классических черных дыр. А естественная квантованность (дискретность) энтропии как меры (скрытой) информации приводит к дискретному спектру масс черных дыр. Что еще раз подтверждает необходимость рассматривать их как единый квантовый объект. Испаряясь, черные дыры становятся все меньше, квантовые эффекты становятся все больше, и только они "решают", исчезнут ли черные дыры, превратясь в излучение, или же процесс остановится приблизительно на планковской массе. Результат очень важен для космологических сценариев. В последнее время появилось множество теорий, рассматривающих гравитационное взаимодействие не как фундаментальное, а эффективное, наподобие сил Ван-дер-Ваальса, т.е., как результат действия других, фундаментальных полей. Среди них следует отметить гипотезу А.Д.Сахарова, получившую позднее название "индуцированная гравитация" - в ней гравитационное поле есть не что иное как натяжения вакуума всех остальных полей, а также совсем недавнюю идею Э.Верлинде об энтропийной силе. Интересным представляется и открытие так называемого $AdS - CFT$-соответствия, связывающего некоторые решения для черных дыр в пространстве-времени с отрицательной гравитационной постоянной (анти-де Ситтер) со свойствами некой конформной теории поля (CFT), "живущей" на его границе (с числом измерений, на единицу меньшим, идея Ж.'т Офта о голографическом экране). Отсюда следует, что квантовые свойства таких черных дыр и соответствующих им теорий поля должны быть самосогласованными. Я не упомянул еще о многомерных черных дырах, изучение которых стало популярным в связи с мембранными космологическими моделями, а также возможной т.н. Тэвной гравитацией в теориях типа Калуцы-Кляйна и ожидаемом рождении черных дыр на Большом Адроном Коллайдере. Это отдельная и очень сложная наука и потому требуется отдельное исследование квантовых свойств таких черных дыр.

Но, какой бы ни получилась в будущем полная теория всех взаимодействий, в ней обязательно будут присутствовать черные дыры, хотя бы потому, что они уже присутствуют в нашей реальности. А квантовые свойства черных дыр будут служить мостиком между будущим теориями и существующими сейчас, служа своеобразными правилами отбора. Теория квантовых черных дыр еще не создана. Это новый путь, неизведанный. Отсюда и название диссертации "К квантовой теории черных дыр".

Цель диссертации Целью настоящей диссертации является построение и детальное изучение моделей квантовых черных дыр. Актуальность выбранной темы исследований была обусловлена всем предыдущим развитием физики черных дыр, о чем подробно сказано выше. Следует подчеркнуть, что все полученные результаты являются совершенно новыми, а опубликованные работы - пионерскими.

Научная новизна и практическая ценность.

- Впервые произведено квантование самогравитирующей сферически симметричной пылевой оболочки, основанное на классическом пред-гамильтониане, т.е., выражении для полной энергии системы как функции радиуса оболочки и его производной по собственному времени. В результате для волновой функции получено стационарное уравнение в конечных разностях со сдвигом аргумента вдоль мнимой оси. Разработан метод получения асимптотических решений в особых точках линейных уравнений в конечных разностях.
- Впервые сформулирован критерий, которому должны удовлетворять решения уравнений подобного типа: решения должны быть однозначными аналитическими функциями на римановой поверхности, количество листов которой и положение разрезов определя-

ется видом асимптотик. С использованием данного критерия получен дискретный спектр масс (энергий) для связанных состояний самогравитирующих сферически симметричных пылевых оболочек - релятивистское обобщение формулы Ридберга для атома водорода. Практическая ценность этого результата в том, что данный критерий может быть применен к любому линейному конечно-разностному уравнению, коэффициенты которого - аналитические функции.

– Впервые получено общее решение волнового уравнения в конечных разностях с кулоновским потенциалом. При этом использован оригинальный метод преобразования обратного интеграла Фурье для перехода из импульсного представление в координатное в интеграл по конечному разрезу в комплексной плоскости импульсов. Исходное же уравнение, после ряда преобразований, сводится, по существу, к одному из рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции Гаусса. Этот метод эффективно использует основные свойства линейных конечно-разностных уравнений и поэтому может найти широкое применение. В этом его практическая ценность.

– Показано, что для данного уравнения существует только одно супер-фундаментальное решение, из которого строится общее решение. Изучение его аналитических свойств и использование вышеупомянутого критерия отбора приводит к дискретному спектру, который совпадает с полученным ранее при исследовании асимптотик. При этом гипергеометрический ряд обрывается, и возникают новые, неизученные ранее, полиномы. Для этих новых полиномов найдена производящая функция.

- Детально изучен полученный спектр. Новым результатом является выделение состояния, соответствующие квантовым черным дырам. Все другие состояния описывают или не коллапсирующие оболочки (аналогично электрону в атоме водорода), или же полузамкнутому миру.
- Предложен новый способ решения квантовой релятивистской задачи Кеплера. Найдено каноническое преобразование, позволяющее извлечь квадратный корень, появляющийся в лоренц-факторе, без квадрирования исходного уравнения или введения спиноров. Проведено квантование такой модели и получено релятивистское уравнение Шредингера в конечных разностях. Показано, что это квантовое уравнение может быть исследовано методами, предложенными ранее. В результате получен дискретный спектр для связанных состояний. Он оказался аналогичным известному спектру Зоммерфельда для уравнения Клейна-Гордона. Для данного уравнения получен и исследован спектр масс квантовых черных дыр. Практическая ценность в том, что подобный метод может быть применен и к другим одномерным и сферически симметричным релятивистским задачам.
- Впервые построена классическая геометродинамика (формализм Арновитта-Дезера-Мизнера) для сферически симметричной гравитации, источником которой служит тонкая пылевая самогравитирующая оболочка. Найдено каноническое преобразование (аналогичное преобразованию Кухажа для вечной черной дыры), которое позволяет чрезвычайно упростить уравнение связи и разрешить их,

оставив только два: для импульсной и гамильтоновой связей на оболочке.

- Выдвинута и реализована идея аналитического продолжения ветвящихся функций и заданы правила обхода точек ветвления. Это позволяет использовать единый гамильтониан в геодезически полном пространстве-времени Шварцшильда. Практическое значение в том, что этот способ может быть реализован и в других случаях, когда пространство-время имеет сложную причинную структуру.
- Требование аналитичности решений на подходящей римановой поверхности и сравнение поведения асимптотик на обеих бесконечностях и в точках ветвления позволило получить дискретный спектр для связанных состояний, зависящий от двух квантовых чисел. Появление второго квантового числа не имеет аналога в обычной квантовой механике и является следствием существования второй бесконечности, которую обязательно "чувствует" квантовая оболочка. Практическое значение этого результата в том, что впервые показано влияние глобальной геометрии на квантовые состояния системы, что особенно важно при исследовании гораздо более сложных ситуаций, когда необходимо качественно представлять поведение квантовых систем.
- Впервые вычислена квази-классическая волновая функция как решения уравнения в конечных разностях для световой оболочки. Показано, что требование его аналитичности и однозначности на римановой поверхности, учитывающей все точки ветвления, приводит к тому, что под горизонтом событий черной дыры, помимо подающей (сходящейся) волны, существует и выходящая (расши-

ряющаяся), но амплитуда последней экспоненциально подавлена. Показано, что при некоторых, физически приемлемых, предположениях, снаружи черной дыры появляется поток излучение. Применение распределения Гиббса позволило вычислить температуру этого излучения, которая совпала с температурой Хокинга. Этим доказано, что излучение Хокинга может быть интерпретировано как процесс квантового туннелирования, что и определяет практическую ценность результата.

- Впервые матричным методом исследованы асимптотики конечно-разностного уравнения Шредингера для массивной оболочки в случае двойного вырождение собственных значений главной матрицы. Показано, что уравнения для бесконечных матриц сводятся к бесконечной системе уравнений второго порядка. Найден дискретный спектр для связанных состояний, который в точности совпадает с полученным ранее из приближенного уравнения. Таким образом, спектр един как для больших, так и для малых черных дыр. Этот результат имеет практическое значение, так как позволяет в сложных случаях ограничиваться гораздо более простыми приближенными уравнениями.
- В рамках модели с тонкой оболочкой изучен процесс квантового сферически симметричного гравитационного коллапса. Показано, что, в отличие от классического, он обязательно идет с излучением и рождением вещества внутри первоначальной оболочки. Поскольку такой процесс может идти различными неконтролируемыми путями, то он сам является источником энтропии результирующей квантовой черной дыры. Это качественно новое явление.

– С помощью компьютерного моделирования и качественным исследованием спектра показано, что процесс квантового коллапса останавливается в особой точке спектра, когда главное квантовое число равно нулю. В этом состоянии оболочка не чувствует ни внешней, ни внутренней массы, она чувствует только самое себя. Это состояние названо состоянием “беспамятства”, оно напоминает главное свойство классической черной дыры - отсутствие “волос”. Сформулировано определение квантовой черной дыры как набора оболочек (в нашей модели), каждая из которых находится в состоянии “беспамятства”. Это первое операционное определение, что такое квантовая черная дыра.

– Впервые предложено исследовать свойства больших квантовых черных дыр (= квази-классических) на классических моделях, которые получили название “классические аналоги квантовых черных дыр”. С этой целью сформулировано свойство “беспамятства” на языке непрерывных распределений материи. Практическое значение идеи состоит в предложении изучать квантовые эффекты в физике черных дыр.

– Впервые построена конкретная сферически симметричная модель самогравитирующей идеальной жидкости, обладающей свойством “беспамятства” и удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна. Оказалось, что плотность энергии (массы) и давления подчиняются закону обратных квадратов. Условие отсутствия сингулярности в тензоре кривизны Римана выделяет одно-параметрическое семейство решений с универсальным численным коэффициентом в распределении материи и предельно жестким уравнением состояния. В этой аналоговой модели есть температура, причем все статические наблюдатели внутри распределения материи находятся в тепловом равновесии друг с другом. Эта температура вдвое ниже температуры Хокинга.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

Глава 3.

1. Произведено квантование конкретной модели самогравитирующей сферически симметричной пылевой оболочки, основанное на классическом пред-гамильтониане, т.е., выражении для полной энергии системы как функции радиуса оболочки и его производной по собственному времени. В результате для волновой функции получено стационарное уравнение в конечных разностях со сдвигом аргумента вдоль мнимой оси.
2. Разработан метод получения асимптотических решений в особых точках линейных уравнений в конечных разностях.
3. Сформулирован критерий, которому должны удовлетворять решения уравнений подобного типа: решения должны быть однозначными аналитическими функциями на римановой поверхности, количество листов которой и положение разрезов определяется видом асимптотик. Показано, что обычный критерий отбора подходящих решений путем наложения граничных условий не позволяет получить дискретный спектр для связанных состояний.
4. С использованием данного критерия получен дискретный спектр масс (энергий) для связанных состояний самогравитирующих сферически симметричных пылевых оболочек - релятивистское обобщение формулы Ридберга для атома водорода.

5. Получено общее решение волнового уравнения в конечных разностях с кулоновским потенциалом. При этом использован оригинальный метод преобразования обратного интеграла Фурье для перехода из импульсного представление в координатное в интеграл по конечному разрезу в комплексной плоскости импульсов. Исходное же уравнение, после ряда преобразований, сводится, по существу, к одному из рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции Гаусса.
6. Показано, что для данного уравнения существует только одно супер-фундаментальное решение, из которого строится общее решение. Изучение его аналитических свойств и использование вышеупомянутого критерия отбора приводит к дискретному спектру, который совпадает с полученным ранее при исследовании асимптотик. При этом гипергеометрический ряд обрывается, и возникают новые, неизученные ранее, полиномы.
7. Для этих новых полиномов найдена производящая функция.
8. Вычислена волновая функция основного состояния, удовлетворяющая в нуле бесконечному ряду граничных условий, необходимых для эрмитовости гамильтониана на действительной полуоси.
9. Детально изучен полученный спектр. Его особенности позволили выделить состояния, соответствующие квантовым черным дырам. Все другие состояния описывают или не коллапсирующие оболочки (аналогично электрону в атоме водорода), или же полузамкнутому миру. В предельном случае нулевой полной массы получен дискретный спектр значений голой массы оболочки, образующий замкнутый мир.

10. Показано, что спектр масс для (в общем случае) заряженной сферически симметричной черной дыры согласуется с существованием излучения Хокинга.
11. Рассмотрена релятивистская задача Кеплера. Найдено каноническое преобразование, позволяющее извлечь квадратный корень, появляющийся в лоренц-факторе, без квадрирования исходного уравнения или введения спиноров. Проведено квантование такой модели и получено релятивистское уравнение Шредингера в конечных разностях.
12. Показано, что это квантовое уравнение может быть исследовано методами, предложенными ранее. В результате получен дискретный спектр для связанных состояний. Он оказался аналогичным известному спектру Зоммерфельда для уравнения Клейна-Гордона.
13. Для данного уравнения получен и исследован спектр масс квантовых черных дыр.

Глава 4.

1. Построена классическая геометродинамика (формализм Арновитта-Дезера-Мизнера) для сферически симметричной гравитации, источником которой служит тонкая пылевая самогравитирующая оболочка.
2. Найдено каноническое преобразование (аналогичное преобразованию Кухажа для вечной черной дыры), которое позволяет чрезвычайно упростить уравнение связи и разрешить их, оставив только два: для импульсной и гамильтоновой связей на оболочке.

3. Получен явный вид гамильтоновой связи на оболочке для $R-$области. В общем случае потенциальная часть содержи две точки ветвления, соответствующие горизонтам внутренней и внешней метрик Шварцшильда.
4. Реализована идея аналитического продолжения ветвящихся функций и заданы правила обхода точек ветвления. Это позволяет использовать единый гамильтониан в геодезически полном пространстве-времени Шварцшильда.
5. Произведена процедура квантования и получено стационарное конечно-разностное уравнение Шредингера для волновой функции, покрывающей все многообразие Шварцшильда и тем самым учитывающей его сложную причинную структуру.
6. Подробно исследован случай больших черных дыр (масса гораздо больше массы Планка). В этом случае в теории появляется малый безразмерный параметр, и предел больших масс одновременно означает переход к квази-классическому режиму, когда вместо конечно-разностного уравнения можно ограничиться дифференциальным уравнением второго порядка. Матричным методом вычислены асимптотики решений в особых точках уравнения- в нуле, на обеих бесконечностях и точках ветвления.
7. Для простоты рассмотрен случай, когда внутри оболочки нет других источников полей тяготения. Показано, что для оболочек типа черной дыры волновая функция для связанных состояний на "нашей стороне" моста Эйнштейна-Розена имеет экспоненциальное спадание, а на другой стороне - гораздо более быстрое, гауссово, спадание. В T_--области (неизбежное сжатие) лидирующей являет-

ся падающая сходящаяся волны, а в T_+-области - расходящаяся, что подтверждает правильность выбора обхода точек ветвления.

8. Требование аналитичности решений на подходящей римановой поверхности и сравнение поведения асимптотик на обеих бесконечностях и в точках ветвления позволило получить дискретный спектр для связанных состояний, зависящий от двух квантовых чисел. Появление второго квантового числа не имеет аналога в обычной квантовой механике и является следствием существования второй бесконечности, которую обязательно "чувствует" квантовая оболочка.
9. Получено и исследовано квантовое уравнение для расширяющейся световой (изотропной) оболочки, моделирующей излучение из черной дыры или же из полузамкнутого мира (непроходимой кротовой норы). В этом случае отсутствует главное квантовое число, но второе, новое, остается.
10. Найден дискретный спектр излучения. Оказывается, энергия излучаемых квантов не совпадает с разностью энергетических уравнений источника. Показано, что черная дыра или кротовая нора с массой, меньшей, примерно, планковской, не может излучать, т.е., существует нижний предел массы для испарения черных дыр.
11. Исследована квази-классическая волновая функция как решения первоначального полного уравнения в конечных разностях для световой оболочки. Показано, что требование его аналитичности и однозначности на римановой поверхности, учитывающей все точки ветвления, приводит к тому, что под горизонтом событий черной дыры, помимо подающей (сходящейся) волны, существует и выхо-

дящая (расширяющаяся), но амплитуда последней экспоненциально подавлена.

12. Показано, что при некоторых, физически приемлемых, предположениях, снаружи черной дыры появляется поток излучение. Применение распределения Гиббса позволило вычислить температуру этого излучения, которая совпала с температурой Хокинга.

13. Матричным методом исследованы асимптотики полного конечно-разностного уравнения Шредингера для массивной оболочки. Показано, что, вследствие двойного вырождение собственных значений главной матрицы, уравнения для бесконечных матриц сводятся к бесконечной системе уравнений второго порядка. Найден дискретный спектр для связанных состояний, который в точности совпадает с полученным ранее из приближенного уравнения. Таким образом, спектр един как для больших, так и для малых черных дыр.

14. В рамках модели с тонкой оболочкой изучен процесс квантового сферически симметричного гравитационного коллапса. Показано, что, в отличие от классического, он обязательно идет с излучением и рождением вещества внутри первоначальной оболочки. Поскольку такой процесс может идти различными неконтролируемыми путями, то он сам является источником энтропии результирующей квантовой черной дыры.

15. С помощью компьютерного моделирования и качественным исследованием спектра показано, что процесс квантового коллапса останавливается в особой точке спектра, когда главное квантовое число равно нулю. В этом состоянии оболочка не чувствует ни внешней,

ни внутренней массы, она чувствует только самое себя. Это состояние названо состоянием “беспамятства”, оно напоминает главное свойство классической черной дыры - отсутствие “волос”. Сформулировано определение квантовой черной дыры как набора оболочек (в нашей модели), каждая из которых находится в состоянии “беспамятства”.

Глава 5.

1. Предложено исследовать свойства больших квантовых черных дыр (= квази-классических) на классических моделях, которые получили название “классические аналоги квантовых черных дыр”. С этой целью сформулировано свойство “беспамятства” на языке непрерывных распределений материи.
2. Построена конкретная сферически симметричная модель самогравитирующей идеальной жидкости, обладающей свойством “беспамятства” и удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна. Оказалось, что плотность энергии (массы) и давления подчиняются закону обратных квадратов. Условие отсутствия сингулярности в тензоре кривизны Римана выделяет одно-параметрическое семейство решений с универсальным численным коэффициентом в распределении материи и предельно жестким уравнением состояния.
3. Единственным параметром модели является полная масса, пропорциональная граничному значению радиуса. При этом граничный радиус вдвое больше радиуса Шварцшильда классической черной дыры той же массы. Оказалось, что двумерное сечение (при фиксированных сферических углах) есть не что иное как пространство-время Риндлера. Т.е., у нашей аналоговой модели есть температура, причем все статические наблюдатели внутри распределения

материи находятся в тепловом равновесии друг с другом. Эта температура вдвое ниже температуры Хокинга.

4. Построена термодинамика этой модели. Вычислены все термодинамические потенциалы. Энтропия системы автоматически квантуется (дискретный эквидистантный спектр). Вычислена функция распределения при простых физических предположениях о спектре элементарных возбуждений и найдено соотношение между фундаментальной частотой возбуждений, температурой и полной энтропией.

5. Исследована энергетика процесса квантового излучения. Показано, что учет работы сил поверхностного натяжения приводит к удвоению температуры излучения (до температуры Хокинга). Кроме того, пропорциональность частоты элементарных возбуждений температуре с коэффициентом $\log 3$, диктуемый свойствами классических квази-нормальных мод, приводит к тому, что квант энтропии равен $\log 2$, что желательно с точки зрения теории информации.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах Отдела теоретической физики ИЯИ РАН, Теоретического отдела ФИАН, семинарах ГАИШ и Института им.Л.Д.Ландау, на семинарах кафедры теоретической физики Физического факультета и кафедры дифференциальной геометрии Механико-математического факультета МГУ, на семинарах в Институте Энрико Ферми Чикагского университета и Отдела астрофизики ФНАЛ, физических факультетов Университета Брауна в Провиденсе и Университета Тафтс в Бостоне (США), Отдела релятивистской астрофизики и космологии Обсерватории Париж-Медон (Франция), Института теоретической физики Бернского университета и физического факультета Цюрихского университета (Швейцария), Отдела прикладной математики и теоретической физики (Кембридж, Англия), физических факультетов университетов Тель-Авива, Бар-Илана, Иерусалима, Хайфы и Беер-Шевы (Израиль), Института высших исследований (Бюр-сюр-Иветт, Франция), Университета ЛЮМИНЕ (Марсель, Франция), Института Нильса Бора (Копенгаген, Дания), физического факультета Карлова университета (Прага, Чехия), Института Эйнштейна (Гольм, Германия), Института Спинозы Утрехтского университета (Нидерланды), физического факультета Университета "Сапиенса" (Рим, Италия), Института теоретической физики Макса Планка и физического факультета Мюнхенского университета (Германия), физического факультета Университета г.Тур (Франция), физического факультета Неапольского университета (Италия), на 4-ом, 5-ом и 6-ом Международных семинарах "Квантовая теория гравитации" (Москва), Международном семинаре "Кварки-2010" (Коломна), 2-й, 3-й и 4-й Сахаровских конференций по физике (Москва), на Всероссийской гравитационной конференции (Великий Новгород), 2-й Международной конференции "Квантовая теория поля и гравитация" (Томск), Международных конференциях "КОСМИОН" (Москва), конференции "Время в физике, космологии и религии" (Ленинград), 2-й Международной конференции "Математическая физика и ее приложения" (Самара), Международных конференциях "Физика высоких энергий и квантовая теория поля" (Москва), Международной конференции "Новейшее развитие физики черных дыр" и международной конференции, посвященной 100-летию Д.И.Блохинцева (Дубна), на международных конференциях им.Марселя Гроссмана - 8-й (Иерусалим, Израиль), 9-й (Рим, Италия) и 12-й (Париж, Франция), 2-й, 3-й и 4-й международных конференциях “Динамика со связями и квантовая гравитация” (Италия), Международной конференции “Квантовая теория поля во внешних условиях” (Лейпциг, Германия), международно конференции, посвященной 100-летию Э.Шредингера (Потсдам-Бабельсберг, ГДР), Международной конференции “Квантовая гравитация и черные дыры” (Утрехт, Нидерланды), Международной конференции “Черные дыры в теории струн и общей теории относительности” (Вели Лошинь, Хорватия), представлены в лекциях на 4-х международных школах в Казани, в 3-х в Санкт-Петербурге, 3-х в Дубне, в Ульяновске и Школе им.Софуса Ли в Нордфьордэйде (Норвегия).

Публикации и личный вклад автора. По результатам диссертации опубликовано 32 работы. Список работ приведён в конце автореферата. Вклад автора в полученные результаты является определяющим.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из Введения, пяти Глав и Заключения. Общий объём диссертации 256 страниц. Диссертация содержит 22 рисунка и список литературы из 177 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении приведены факты из истории физики черных дыр, начиная с первого о них упоминания, до наших дней. Особое внимание уделено сложностям процесса постепенного узнавания сложной причинной структуры пространства-времени Шварцшильда, не имеющей аналога ни в ньютоновской картине мира, ни в специальной теории относительности. Подчеркивается необходимость учета глобальной геометрии, что чрезвычайно важно при построении квантовой теории как на фоне заданной нетривиальной геометрии, так и решении задач квантовой гравитации, когда сама геометрия пространства-времени становится полноправным (и наиболее важным) объектом квантования. Описано, как основное глобальное свойство - существование горизонта событий, которое, в сущности, и является современным определением черной дыры, приводит к совершенно новому и неожиданному эффекту: появлению температурного поведения волновых функций безмассового скалярного поля на фоне статической метрики Шварцшильда в присутствии горизонта событий и, как следствие, испарения черных дыр. Причина этого - особые граничные условия на горизонте: волны уходят под горизонт, но оттуда ничего не выходит. Это открытие привело к созданию. нового научного направления - термодинамики черных дыр и введению в обиход таких понятий как температура и энтропия черных дыр. Чернотельное излучение черных дыр - сугубо квантовый эффект, означающий, что даже большие черные дыры (с размерами и массами гораздо больше планковских - соответственно, 10^{-33}см и 10^{-5}г) должны рассматриваться как квази-классические объекты и иметь дискретный спектр масс, поскольку энтропия естественным образом, как мера скрытой информации, квантуется. Эти и другие описанные во Введении факты последовательно приводят нас к пониманию необходимости исследовать черные дыры как единый квантовый объект. Детально описаны особенности предлагаемых нами подходов к этой проблеме и основные, прежде всего, качественные, результаты. Последнее сделано с определенной целью - чтобы (возможный) читатель мог получить представление и физической стороне проблемы и составить мнение об основных выводах, не вдаваясь в математические детали (хотя они и представляют самостоятельный интерес).

В Главе 1 даны необходимые в дальнейшем определения из дифференциальной геометрии, исследована глобальная структура произвольного (четырехмерного) сферически симметричного пространства-времени и произведена соответствующая редукция уравнений Эйнштейна. Редукция основана на том факте, что такое многообразие локально представимо в виде прямого произведения двумерной сферы S_2 и двумерного псевдо-евклидового пространства-времени M_2 с метрикой

$$ds^2 = \gamma_{ABk} dx^A dx^B - R^2(x) d\sigma^2$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi$ - линейный элемент единичной двумерной сферы, R - радиус этой сферы, площадь которой равна $4\pi R^2$, $A, B = 0, 1$.

Показано, что локальная геометрия определяется двумя инвариантными функциями двух переменных, R и Δ, где

$$\Delta = R_{,A}\, R_{,B}\, \gamma^{AB},$$

есть не что иное как лорентцев квадрат нормали к поверхностям постоянного радиуса $R = cjnst$ (запятая обозначает частную производную по соответствующей координате). Получены уравнения Эйнштейна в векторном виде для этих двух инвариантов:

$$\left(R\,(\Delta + 1)\right)_{,A} = 8\pi\, G R^2 \left(T^C_C R_{,A} - T^B_A R_{,B}\right) \,.$$

Третье уравнение для $A \neq B$ - по существу, скалярное:

$$R_{|AB} = -4\pi\, G\, R\, T_{AB}\,.$$

Оно может быть получено также как условие интегрируемости для векторного уравнения с использованием тождеств Бианки (или уравнения неразрывности) и оставшегося $\binom{2}{2}$-скалярного уравнения Эйнштейна. Уравнение же неразрывности теперь принимает вид:

$$T^B_{A|B} = 2\frac{R_{,A}}{R}T^2_2\,.$$

Функция Δ является носителем нетривиальной качественной информации о структуре сферически симметричного пространства-времени. Действительно, в плоском пространстве-времени Минковского $\Delta \equiv 1$, следовательно, все поверхности $R = \mathrm{const}$ времени-подобны, и радиус может быть выбран в качестве пространственной координаты $q = R$ на всем многообразии. В искривленном пространстве-времени Δ не является более постоянной величиной и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Область, в которой $\Delta < 0$, называется R-областью; в такой области радиус R может быть, в принципе, выбран в качестве пространственной координаты q. В той же области, в которой $\Delta > 0$, поверхности $R = \mathrm{const}$ пространственноподобны, и радиус может быть выбран в качестве временной координаты t. Такие области называются T-областями. Понятия R- и T-областей были введены И.Д.Новиковым. Но это ещё не всё. В T-областях $\Delta > 0$, поэтому $\dot{R} \neq 0$, и производная по времени не может менять знак. Следовательно, в T-области или $\dot{R} > 0$ (такая область необратимого расширения называется T_+-областью), или $\dot{R} < 0$ (необратимое сжатие, T_--область). Аналогично, R-области делятся на два класса: те, для которых $R' > 0$ они называются R_+-областями, а те, для которых $R' < 0$ (R_--областями), эти R- и T- области отделены друг от друга поверхностями $\Delta = 0$, называющимися горизонтами видимости. Горизонты видимости могут быть как изотропными (в этом случае они совпадают с горизонтом событий), так и времени-подобными или пространственно-подобными поверхностями. Таким образом, искривленное пространство-время может иметь, в общем случае, довольно сложное строение и состоять из набора $\mathrm{R}_{\pm}$- и $\mathrm{T}_{\pm}$-областей, разделенных горизонтами видимости $\Delta = 0$.

Показано, как вводятся запаздывающие о опережающие координаты Финкельштейна, позволяющие проникнуть под горизонт событий и исследовать геометрию геодезически полного пространства-времени Шварцшильда. С их помощью построены диаграммы Картера-Пенроуза, чрезвычайно полезные при выяснении причинной структуры многообразий, а также диаграммы вложения, удобные для наглядного представления геометрии пространственных сечений. Особо отмечается, что геометрия пространственного сечения представляет собой мост Эйнштейна-Розена или, иначе, непроходимую кротовую нору, различные части которой причинно не связаны между собой.

Глава 2 посвящена изложению формализма тонких оболочек в общей теории относительности. Выведены уравнения Израэля для сшивания решений уравнений Эйнштейна с двух сторон тонкой сингулярной оболочки. Они связывают поверхностный тензор энергии-импульса оболочки S_{ij} со скачком тензора внешней кривизны $[K_{ij}]$, определяющим вложение $(d-1)$-мерной гиперповерхности в объемлющее d-мерное многообразие:

$$\varepsilon([K_i^j] - \delta_i^j [K_l^l]) = 8\pi G S_i^j,$$

Подробно исследован необходимый в дальнейшем случай четырехмерной сферической симметрии, где уравнения Израэля представлены в удобной форме, легко допускающей их физическое толкование:

$$\begin{aligned}
-\left[\sigma\sqrt{\dot{\rho}^2-\Delta}\right] &= 4\pi G\rho S_0^0\,, \\
-\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{\dot{\rho}^2-\Delta}}\left(\ddot{\rho}+\frac{1+\Delta}{2\rho}-4\pi G\rho T_n^n\right)\right] &= 4\pi G\left(2S_2^2-S_0^0\right)\,, \\
\dot{S}_0^0+\frac{2\dot{\rho}}{\rho}\left(S_0^0-S_2^2\right)+[T_0^n] &= 0\,.
\end{aligned}$$

Здесь появляется знаковая функция $\sigma = \pm 1$, которая определяет, возрастают ли радиусы в направлении внешней нормали, ил же убывают. Мы уже знаем, что в R-областях знак пространственной производной от радиуса не может меняться. Отсюда следует, что σ определяет, в какой из них движется оболочка, в R_+ - тогда $\sigma = +1$, или же в R_- - тогда $\sigma = -1$. Вообще говоря, σ не является интегралом движения и может меняться в T-областях. Поскольку мы будем рассматривать оболочки, внутри которых - вакуум, т.е., метрики Шварцшильда с разными массами, то знаки σ_{in} внутри и σ_{out} снаружи определяют, как именно соединяются две геометрии вдоль оболочки, с какой стороны соответствующего моста Эйнштейна-Розена, т.е., они полностью определяют глобальную геометрии полного многообразия. В простейшем случае, когда внутри - плоское пространство-время Минковского, σ_{in}, а знак σ_{out} определяет тип оболочки: имеем ли мы дело с черной дырой, если $\sigma_{out} = +1$, или же с кротовой норой (полузамкнутым миром), если $\sigma_{in} = -1$. Выбор, где (in), а где (out), разумеется, условен. У нас (out) означает, “нашу” сторону моста Эйнштейна-Розена, т.е., откуда мы все то наблюдаем.

В конкретном случае вакуумных метрик (Шварцшильда) снаружи и внутри и тонкой пылевой оболочки показано, что достаточно иметь только одно уравнение - т.н. уравнение связи

$$\sigma_{in}\sqrt{\dot\rho^2+1-\frac{2Gm_{in}}{\rho}}-\sigma_{out}\sqrt{\dot\rho^2+1-\frac{2Gm_{out}}{\rho}}=\frac{GM}{\rho}\,.$$

где M - голая масса оболочки, которая в нашем случае пылевой оболочки есть просто сумма масс составляющих пылинок и является интегралом движения. Это уравнение досконально исследовано для всех возможных вариантов движения оболочки в зависимости от начальных условий. Построены диаграммы Картера-Пенроуза для полных геометрий с оболочкой и диаграммы погружения.

В Главе 3 построена наша первая (хронологически) модель квантовой тонкой сферически симметричной оболочки. Создана схема получения квантового уравнения прямо из известного классического выражения для энергии системы. Именно, использовано сквадрированное первое из уравнений Израэля (уравнение связи), в котором, для простоты, положено $m_{in}=0$, т.е., наша оболочка является единственным источником поля тяготения. Поэтому внутри - плоское пространство-время Минковского, а снаружи - метрика Шварцшильда с массой $m_{out}=\Delta m$ (M - голая масса оболочки, $\rho(\tau)$ - ее радиус, τ - собственное время наблюдателя на оболочке):

$$m=M\sqrt{\dot\rho^2+1}-\frac{GM^2}{2\rho}\,.$$

Мы рассматриваем это выражение для полной энергии системы как пред-гамильтониан, из которого восстанавливается лангранжиан, находится канонически сопряженный радиусу импульс и строится гамильтониан:

$$H=M\cosh\frac{p}{M}-\frac{\kappa M^2-e^2}{2\rho}.$$

Квантование производится обычным образом. В координатном представлении импульс заменяется на дифференциальный оператор $\Pi = -i\partial/\partial x\,(x = M\rho)$, в результате чего получается следующее стационарное уравнение Шредингера в конечных разностях для волновой функции $\Psi(x)$ $(e^{-i\frac{\partial}{\partial x}}\Psi(x) = \Psi(x-i))$:

$$\frac{M}{2}\left((\Psi(x+i)+\Psi(x-i)-\frac{GM^2-e^2}{x}\Psi(x)\right) = m\Psi(x).$$

Такое конечно-разностное линейное уравнение второго порядка обладает очень важным свойством: при умножении какого-либо решения Ψ_0 на функцию $e^{2\pi kx}\,(k = 1, 2, ...)$ (более общо, на любую периодическую функцию с чисто мнимым периодом i) мы снова получим решение. "Правильные" волновые функции должны быть интегрируемые с квадратом, а гамильтониан при этом - эрмитовым оператором.

Нас, прежде всего, интересует дискретный спектр масс (энергий) связанных состояний. В обычной квантовой механике, когда уравнение Шредингера является дифференциальным уравнением второго порядка, цель достигается путем наложения определенных граничных условий на волновые функции в особых точках, у нас - в нуле и на бесконечности. Для этого нужно узнать асимптотическое поведение решений. Как это сделать в нашем случае? Самым удобным оказался матричный метод. Идея состоит в том, что волновая функция со сдвинутым аргументом формально разлагается в ряд Тэйлора по производным, который обрывается на произвольном члене (для нашего конкретного уравнения это член четного порядка $2N$), затем дифференциальное уравнение конечного порядка преобразовывается в систему уравнений первого порядка и записывается в матричном виде. С этими матрицами производятся многочисленные манипуляции (подробно описанные в диссертации), и в результате получаются следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}\Psi &= x^n \quad x \to 0,\\ n &= 0, 1, 2, ...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{\lambda x} e^{-\frac{\alpha}{2\sin\lambda}\log x}, \quad x \to \infty\\ \cos\lambda &= \epsilon.\end{aligned}$$

Здесь мы уже перешли к пределу $N \to \infty$. Заметим, что собственные значения λ определяются с точностью до слагаемого $2\pi i k (k = 0, 1, 2...)$, воспроизводя при этом основное свойство решений, указанное выше. В усеченном же уравнении в асимптотиках вблизи нуля последним появляется член $(1 + x^{2N}\log x)$. Именно избавление от него приводит к тому, что число необходимых условий, накладываемых на волновую функцию, превышает на единицу число свободных констант и, как следствие, к дискретному спектру энергий (масс). Теперь же подобный член "растворяется" в бесконечности. Появление дискретного спектра в усеченных уравнениях также не служит гарантией его существования после предельного перехода. Как же быть? Ответ, оказывается, уже содержится в самом уравнении. Вспомним, какие требования предъявляются к решениям обыкновенного дифференциального уравнения - они должны быть достаточное число раз дифференцируемыми. Следовательно, решения конечно-разностного уравнения должны быть бесконечно дифференцируемыми. Более того, поскольку у нас сдвиг аргумента происходит вдоль мнимой оси, решений должны быть аналитическими функциями на некоторой римановой поверхности. Так как в особых точках уравнения асимптотики, как правило, имеют точки ветвления, а число листов римановой поверхности должно быть одинаковым на обоих концах соответствующего разреза, то ранг точек ветвления может отличаться лишь на целое n. Так у нас появляется квантовое число. Итак, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{GM^2}{2\sin\lambda} &= n \\ m &= M\sqrt{1-\frac{G^2M^4}{4n^2}}\,. \end{aligned}$$

Этот спектр масс, во-первых, является релятивистским обобщением известной формулы Ридберга и, во-вторых, частью знаменитого дираковского спектра для атома водорода (после соответствующих замен параметров), если в последнем положить равным нулю так называемое радиальное квантовое число.

Основное свойство линейных конечно-разностных уравнений позволило нам развить метод получения общего решения. Здесь мы опишем его очень кратко - подробности даны в диссертации. Сначала нужно получить уравнение для Фурье-образа Ψ_p или, что эквивалентно, записать наше уравнение в импульсном представлении:

$$i\frac{\partial}{\partial p}(\cosh p-\cos\lambda)\Psi_p=\beta\sin\lambda\Psi_p,$$

где $\epsilon=\cos\lambda, \qquad \alpha=GM^2=2\beta\sin\lambda$. Решение получается очень легко:

$$\begin{aligned} \Psi_p &= C\frac{z}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}\left(\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right)^{\beta}, \\ z &= e^p. \end{aligned}$$

Оно обладает очень важным свойством - периодично с чисто мнимым периодом $2\pi i$. Интересно и важно отметить, что в импульсном представлении есть только одно решение (с точностью до нормировочного множителя). Но это если рассматривать его как функцию z. При замене

$p \to p+2\pi ik$ мы получаем счетное множество функций p, что при обратном Фурье-преобразовании дает множитель $e^{-2\pi kx}$, обеспечивая основное свойство решений в координатном представлении. Это означает, что, на самом деле, нам достаточно найти только одно частное решение, которое можно назвать супер-фундаментальным, общее же решение получится умножением последнего на произвольную периодическую функцию с чисто мнимым периодом i.

Указанный выше сдвиг в импульсах эквивалентен сдвигу оси интегрирования при обратном преобразовании Фурье. Это ключевое наблюдение, позволяющее получить супер-фундаментальное решение. Заметим, прежде всего, что наше решение имеет счетное число точек ветвления в комплексной плоскости импульсов, которое может быть разбито на пары $(i\lambda+2\pi ki, -i\lambda+2\pi(k+1)i)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$. Соединяя точки ветвления в каждой паре разрезами, мы получаем комплексную плоскость со счетным числом разрезов. На соответствующей римановой поверхности наше решение является однозначной аналитической функцией комплексного переменного. Мы выберем следующий контур интегрирования. Сначала будем интегрировать вдоль действительной оси слева направо (т.е., от $-\infty$ до $+\infty$), затем вдоль короткой кривой на правой бесконечности ($p \to p+2\pi i, p \to +\infty$), далее вдоль прямой линии $y = 2\pi i$, параллельной действительной оси, справа налево и, наконец, вдоль короткой кривой на левой бесконечности обратно к действительной оси. Интегрирование по коротким кривым на бесконечностях между прямыми линиями дает нулевой вклад при положительных значениях x (для отрицательных x можно выбрать прямую линию $y = -2\pi i$ вместо $y = 2\pi i$). Интегрирование же вдоль каждой из прямых линий дает нам решение, линейная комбинация которых опять есть решение. Таким образом, интеграл обратного преобразования Фурье вдоль такого замкнутого контура приводит нас к решению уравнения в координатном представлении. Предлагаемый контур можно превратить в контур вокруг разреза $(\lambda i, (2\pi - \lambda)i)$ для $x > 0$ (или вокруг разреза $(-\lambda i, -(2\pi - \lambda)i)$ для $x < 0$). Опуская многочисленные важные и очень любопытные детали, приведем ответ:

$$\Psi_\beta(x) = \left(-4\pi\beta e^{-i\lambda} \sin\lambda\right) x e^{-\lambda x} F\left(1 - ix, 1 - \beta; 2; 1 - e^{-2i\lambda}\right).$$

где $F(a, b; c; z)$ - гипергеометрическая функция Гаусса при следующих значениях параметров:

$$a = 1 - ix, \qquad b = 1 - \beta; \qquad c = 2; \qquad z = 1 - e^{-2i\lambda},$$

Мы видим, что аргумент в гипергеометрической функции превратился у нас в параметр решения. И, наоборот, аргумент решения входит в один из параметров гипергеометрической функции. Интересно отметить, что само наше первоначальное конечно-разностное уравнение является следствием одного из рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции.

Исследование поведения найденного супер-фундаментального решения в особых точках показывает, что, при правильном поведении в нуле, на бесконечности имеются как экспоненциально спадающие, так и экспоненциально растущие слагаемые. Последние исчезают, только если $\beta = n$, когда гипергеометрический ряд обрывается, и получаются новые, ранее не известные, полиномы. Мы нашли рекуррентные соотношения для этих полиномов, а также производящую функцию. Кроме того, удалось вычислить волновую функцию основного состояния при $n = 1$, удовлетворяющую всем необходимым граничным условиям.

Излишне говорить, то полученный таким способом спектр масс совпадает с найденным ранее.

По аналогии со случаем атома водорода, к которому наш спектр сводится в нерелятивистском пределе, мы можем заключить, что оболочка не коллапсирует без излучения энергии. В классической физике, однако все немного иначе. Электрон в классическом атоме водорода коллапсирует, непрерывно излучая энергию, тогда как гравитационный сферически симметричный коллапс происходит вовсе без излучения, поскольку сферически симметричного гравитационного излучения не существует. Но без коллапса не может образоваться горизонт событий и, значит, черная дыра. Более того, если мы вычислим среднее значение радиуса оболочки, используя найденную волновую функцию, то получим, что, по крайней мере, для больших значений главного квантового числа оно значительно превосходит классический гравитационный радиус, так что оболочка проводит большую часть своей "жизни" вне классической черной дыры. Следовательно, чтобы получить решение для квантовой черной дыры, нужны какие-то новые критерии, и необходимо более детальное изучение найденного нами спектра масс. Рассмотрим зависимость полной массы m от голой массы M , зафиксировав квантовое число n. Это аналогично фиксации радиуса точки поворота в классической динамике. Видно, что есть две ветви, возрастающая, если $1 > \frac{m}{M} > \sqrt{\frac{2}{3}}$, и убывающая в противоположном случае. Возрастающая ветвь соответствует оболочке "типа черной дыры". а убывающая - типу "кротовой норы". Используя "квази-классическую" аргументацию, мы можем сказать, что для состояний, удовлетворяющих вышеприведенному неравенству, среднее значение радиуса лежит вне горизонта событий "на нашей" стороне моста

Эйнштейна-Розена (заменяя таким образом понятие “классическая точка поворота” на понятие “среднее значение радиуса”). Для убывающей ветви то же самое происходит “на другой” стороне моста Эйнштейна-Розена. Теперь ясно, почему значение отношение полной массы к голой массе в квантовом случае больше соответствующего классического значения. Причина этого как раз в замене классической точки поворота средним значением радиуса - последнее всегда меньше, что и приводит к возрастанию полной массы. Рассуждая таким образом и далее, следует предположить, что максимально возможное значение полной массы m при фиксированных главном квантовом числе n соответствует ситуации, когда среднее значение радиуса оболочки лежит вне горизонта событий, делая возможным ее коллапс. Дальнейшее же возрастание голой массы M приведет к образованию полузамкнутого мира (оболочки типа “кротовой норы”) с меньшей полной массой.

Обобщая, мы можем ввести следующее определение состояний квантовой черной дыры: при заданном значении главного квантового числа n квантовая черная дыра обладает максимально возможной массой m. Окончательно, для спектра масс черных дыр получаем

$$m = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{n} M_{Pl}.$$

<u>Глава 4</u> посвящена строгому каноническому мини-суперпространственному квантованию той же физической системы. Только такой подход обеспечивает полный учет нетривиальной причинной структуры пространства-времени Шварцшильда.

Канонический формализм для общей теории относительности и был разработан Арновиттом, Дезером и Мизнером (АДМ). Это сложная гамильтонова система со связями - последние есть отражение ковариантности теории относительно произвольных преобразований координат. В частности, гамильтониан системы равен нулю на уравнениях связи - отсюда произвол в его выборе, что особенно важно при квантовании. Лишь в простейших случаях удается разрешить все связи. Один из них - сферически симметричная вечная черная дыра Шварцшильда, т.е., вакуумное пространственно-временное многообразие с сингулярностями при нулевом радиусе, где и сосредоточен гравитирующий источник. При каноническом квантовании гравитации динамическими переменными служат компоненты трехмерного метрического тензора на некоторой пространственно-подобной гиперповерхности (поверхности одновременных событий при подходящем выборе временной координаты), а сопряженными импульсами - компоненты тензора внешней кривизны, определяющего вложение этой гиперповерхности в объемлющее пространство-время.

Процедура мини-суперпространственного квантования означает, что рассматриваются только многообразия с заданной симметрией. Для вечной черной дыры Шварцшильда такое квантование было произведено Кухажем в АДМ-формализме и Каструпом и Тимманном в переменных Аштекара (в этих переменных уравнения связи резко упрощаются, но за все приходится платить). Авторы изобрели красивые и полезные математические приемы, позволившие полностью решить поставленную задачу. Но физический результат тривиален: мини-суперпространство оказалось двумерным, координатами его служат шварцшильдова масса и сопряженный ей импульс. Фактически - квантовая теорема Биркгоффа. Это и понятно, потому что источник тяготения в вечной черной дыре очень необычен - это две пространственно-подобные гиперповерхности в прошлом и будущем (в промежутке он вовсе не существует), которые рассматриваются как сингулярные части полной границы многообразия. Другими словами, в вечной черной дыре отсутствуют динамические степени свободы (следствие того, что не бывает сферически симметричных гравитационных волн).

Отсюда вывод: нужно ввести в физическую систему реальную динамическую переменную. Наше предложение: рассмотреть простейшее обобщение “точечного” источника - тонкую сферически симметричную пылевую оболочку. Тогда единственной динамической переменной будет радиус этой оболочки (как функция времени). В результате получаем следующую физическую систему: тонкая пылевая оболочка плюс куски многообразий Шварцшильда по обеим сторонам, внутренней с массой m_{in} и внешней с массой m_{out}. Эти массы с необходимостью различны, поскольку наша цель - получить самосогласованное решение с полным учетом обратного влияние гравитирующего источника на метрику пространства-времени. В результате, значительные усилия привели к построению классической геометродинамики, в которой разрешены все связи, кроме одной - гамильтоновой связи на оболочке. Стандартная процедура квантования дала уравнение для волновой функции типа уравнения Шредингера, которое, как и в предыдущей Главе, оказалось конечно-разностным, но гораздо более сложным:

$$\Psi(m_{in}, m_{out}, S + i\zeta) + \Psi(m_{in}, m_{out}, S - i\zeta) =$$
$$\sigma_{in}\sigma_{out}\frac{F_{in} + F_{out} - M^2/4m_{out}^2 S}{\sqrt{F_{in}}\sqrt{F_{out}}}\,, \Psi(m_{in}, m_{out}, S)$$

где $S = \frac{R^2}{2G{m_{out}}^2}$ безразмерный квадрат радиуса в единицах Шварцшильда внешнего решения $\frac{1}{2}\frac{m_{Pl}^2}{m_{out}^2}$, $\sigma = \pm 1$, $F = 1 - \frac{2Gm}{R}$, а M - голая масса оболочки. Основное отличие от квантового уравнения, исследованного в предыдущей Главе, помимо более хитрого потенциала, - то, что оно явным образом чувствует горизонты - нули функций F. Но это же создает проблемы.

Чтобы в них разобраться, в диссертации подробно изучен частный случай, когда $m_{in} = 0$. Уравнение теперь принимает вид ($m_{out} = m$, $F_{in} = 1$, $\sigma_{in} = +1$, $F_{out} = F$, $\sigma_{out} = \sigma$):

$$\Psi(m, S + i\zeta) + \Psi(m, S - i\zeta) = \sigma \frac{1 + F - M^2/4m^2S}{\sqrt{F}} \Psi(m, S)\,,$$

Теперь у нас всего два варианта: $\sigma = +1$ для оболочки типа черной дыры, и $\sigma = -1$ для оболочки типа кротовой норы. Уравнение это явным образом справедливо только в R-области. Но его необходимо продлить не только в T-области, но и в R=область на другой стороне моста Эйнштейна-Розена, абсолютно запрещенную для классической траектории, но вполне доступную для квантовой оболочки. Наша идея: сделать замену

$$\sqrt{F} \to F^{1/2}$$

и будем рассматривать это как функцию комплексного переменного. Тогда точки горизонта, где $F = 0$, становятся точками ветвления, и нам необходимо иметь правило их обхода. Мы предположим, что

$$\begin{aligned} F^{1/2} &= |F|\, e^{i\phi} \\ \phi = 0 \quad &\text{в } R_{+}\text{-область} \\ \phi = \pi/2 \quad &\text{в } T_{-}\text{-область} \\ \phi = \pi \quad &\text{в } R_{-}\text{-область} \\ \phi = -\pi/2 \quad &\text{в } T_{+}\text{-область} \end{aligned}$$

для случая черной дыры, и

$$\begin{aligned} \phi = \pi &\quad \text{в } R_+\text{-область} \\ \phi = -\pi/2 &\quad \text{в } T_-\text{-область} \\ \phi = 0 &\quad \text{в } R_-\text{-область} \\ \phi = \pi/2 &\quad \text{в } T_+\text{-область} \end{aligned}$$

для случая кротовой норы. Мотивация для такого аналитического продолжения - это возможность получить единое уравнение для волновой функции Ψ, которая покрывала бы все четыре части полной диаграммы Картера-Пенроуза для пространства-времени Шварцшильда. Некоторые следствия из этого факта скоро станут очевидными.

Вначале мы рассмотрели большие черные дыры ($m \gg m_{Pl}$, $\zeta \ll 1$). С одной стороны, этот случай более прост математически, т.к. можно разложить левую часть уравнения по производным, например, до второго порядка, а с другой стороны - проще физически, поскольку черные дыры, фактически, уже квази-классические, и нам легче интерпретировать поведение волновой функции. Мы исследовали асимптотическое поведение решений в особых точках - ноль, обе бесконечности и горизонт, применив матричный метод, отработанный в предыдущей Главе. Приведем здесь только основные результаты, без подробностей. Для оболочки типа черной дыры в R_+-области поведение волновой функции на бесконечности такое же, как и в нерелятивисткой квантовой механике - экспоненциальной спадание, но в R_--области, запрещенной классически, спадание гораздо более сильное, гауссово. В T_--области существуют две волны, сходящаяся и расходящаяся, но последняя существенно подавлена, в T_+-области ситуация, естественно, обратная, это наглядно показывает, как формируется одиночная волна в классическом пределе. Требование аналитичности волновой функции на римановой поверхности приводит к неожиданному результату: сравнение асимптотик на горизонте и двух бесконечностях дает два квантовых условия, вместо одного в обычной квантовой механике. Появляется новое квантовое число, неизвестное ранее. Спектр имеет следующий вид:

$$\frac{\left(\frac{M^2}{m^2}-1\right)^{3/2}}{2-\frac{M^2}{m^2}}=\frac{1+2p}{n}$$

$$m=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+2p}}{\sqrt{\frac{M^2}{m^2}-1}}m_{pl}$$

Появление нового квантового и второго квантового условия означает, что в рассмотренной модели задание квантового состояния полностью фиксирует как полную массу, так и голую массу оболочки. Ясно, что построенная нами система слишком жесткая, и ее необходимо расширить за счет ненулевой массы внутри оболочки. Если эта масса фиксирована, то квантовое состояние остается неизменным, и ни о каком гравитационном коллапсе не может быть и речи. Понятно поэтому, что даже в случае сферической симметрии, в отличие от классической теории, процесс квантового коллапса невозможен без включения излучения. При этом, чтобы удовлетворить двум квантовым условиям, необходимо предположить, что это излучение идет не только наружу, на бесконечность, но и вовнутрь, увеличивая тем самым массу внутри оболочки. Ясно, что подобный процесс может проходить множеством различных способов. И в этом источник появления энтропии образующейся в конечном счете черной дыры.

Была исследована квази-классическая волновая функция как решение первоначального полного уравнения в конечных разностях для световой оболочки. Показано, что требование его аналитичности и однозначности на римановой поверхности, учитывающей все точки ветвления, приводит к тому, что под горизонтом событий черной дыры, помимо подающей (сходящейся) волны, существует и выходящая (расширяющаяся), но амплитуда последней экспоненциально подавлена. Показано, что при некоторых, физически приемлемых, предположениях, снаружи черной дыры появляется поток излучение. Применение распределения Гиббса позволило вычислить температуру этого излучения, которая совпала с температурой Хокинга. В наших расчетах был использован тот факт, что в промежутке между внутренним и внешним горизонтами канонически сопряженный импульс приобретает мнимую часть. Тем самым была доказана возможность интерпретации излучения Хокинга как процесс туннелирования.

Матричным методом исследованы асимптотики полного конечно-разностного уравнения Шредингера для массивной оболочки. Показано, что, вследствие двойного вырождение собственных значений главной матрицы, уравнения для бесконечных матриц сводятся к бесконечной системе уравнений второго порядка. Найден дискретный спектр для связанных состояний, который в точности совпадает с полученным ранее из приближенного уравнения. Таким образом, спектр един как для больших, так и для малых черных дыр.

Теперь квантовые условия выглядят следующим образом:

$$\frac{2(\Delta m)^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - (\Delta m)^2}} = \frac{2m_{pl}^2}{\Delta m + m_{in}} n$$

$$M^2 - (\Delta m)^2 = 2(1 + 2p) m_{pl}^2$$

Здесь Δm - полная масса оболочки, M - ее голая масса, а полная масса системы равна $m = m_{out} = \Delta m + m_{in}$. Для оболочки типа черной дыры $M^2 < 4m\Delta m$, или

$$\frac{\Delta m}{M} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{m_{in}}{M}\right)^2 + 1} - \frac{m_{in}}{M}\right).$$

После включения процесса излучения, управляемого начинается квантовый коллапс. Компьютерная симуляция показывает, что процесс идет в "правильном" направлении, то есть, мы подходим, в результате, все ближе и ближе к порогу, отделяющему черную дыру от полузамкнутого мира (кротовой норы). И процесс останавливается точно при равенстве нулю главного квантового числа $n = 0$!

Точка $n = 0$ в нашем спектре совершенно особая. Лишь в таком состоянии оболочка "не чувствует" не только внешние области (что естественно для сферически симметричной конфигурации), но она ничего не знает и о том, что делается внутри. Она "чувствует" только себя самое. Эта ситуация напоминает классический (несферический) коллапс. В конце концов, когда все оболочки (как первоначальная, так и вновь рожденные) окажутся в соответствующих состояниях $n_i = 0$, вся система не будет "помнить" свою собственную историю - Иван, родства не помнящий. Это и есть квантовая черная дыра. В такой ситуации массы всех оболочек удовлетворяют соотношению

$$\Delta m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} M_i.$$

В Главе 5 рассматриваются классические модели - аналоги квантовых черных дыр. Цель - исследовать свойства квази-классических черных дыр, используя обычные (локальные) законы термодинамики и, что самое важное, учитывая обратное влияние распределения материи на метрику пространства-времени. Дело в том, что все до сих пор известное о термодинамике и испарении черных дыр основано на расчетах, в которых метрика, содержащая горизонт - фоновая, а также на общих качественных рассуждениях. Но мы знаем, что само понятие горизонта - глобальное, и любое событие (в прошлом и будущем) влияет на него. Кроме того, использование вакуумной метрики как фоновой чревато неприятностями, так как уравнения Эйнштейна нелинейны.

В последнее время большое внимание привлекает развитие аналитических методов расчета квази-нормальных частот, которые характеризуют распад возмущений вокруг черной дыры и, тем самым, процесс ее образования. Эти частоты -комплексные, спектр мнимой части которых эквидистантен, а действительная часть стремится на конечной стадии формирования черной дыры к пределу, прямо пропорциональному ее температуре. Для черной дыры Шварцшильда коэффициент пропорциональности оказывается равным $\frac{\ln 3}{8\pi}$, но в общем случае это не так. Кроме того, простые соображения, основанные на принципе соответствия Н.Бора, связывают это значение с квантом энтропии, делая его равным $\ln 3$. А это уже серьезно, поскольку квант энтропии - вещь универсальная. Дж.Бекенштейн и В.Муханов показали, что он должен быть равен

$\ln k\,(k = 2, 3, 4, ...)$. Теория информации склоняет нас к значению $\ln 2$. Но это еще не все. Вычисление энтропии черной дыры Шварцшильда в рамках петлевой квантовой гравитации связывает значение этого кванта с фундаментальной группой, лежащей в основе всей теории. Вот почему возник ажиотаж вокруг квази-нормальных частот. Мы назвали это "загадкой $\ln 3$".

Что сделано в диссертации?

Построена конкретная сферически симметричная модель самогравитирующей идеальной жидкости, обладающей свойством "беспамятства" и удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна. Оказалось, что плотность энергии (массы) и давления подчиняются закону обратных квадратов. Условие отсутствия сингулярности в тензоре кривизны Римана выделяет одно-параметрическое семейство решений с универсальным численным коэффициентом в распределении материи и предельно жестким уравнением состояния, $\varepsilon = p = \frac{1}{16\pi G r^2}$. При этом голая и полная масса связаны соотношением $M = \sqrt{2}\,m$ - точно таким же, как и для квантовых оболочек в состоянии "беспамятства" Единственным параметром модели является полная масса, пропорциональная граничному значению радиуса. При этом граничный радиус вдвое больше радиуса Шварцшильда классической черной дыры той же массы. Оказалось, что двумерное сечение (при фиксированных сферических углах) есть не что иное как пространство-время Риндлера. Т.е., у нашей аналоговой модели есть температура, причем все статические наблюдатели внутри распределения материи находятся в тепловом равновесии друг с другом. Эта температура вдвое ниже температуры Хокинга.

Построена термодинамика этой модели. Вычислены все термодинамические потенциалы. Энтропия системы автоматически квантуется (дискретный эквидистантный спектр). Вычислена функция распределения при простых физических предположениях о спектре элементарных возбуждений и найдено соотношение между фундаментальной частотой возбуждений, температурой и полной энтропией:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{\omega}{T}}}{1-e^{-\frac{\omega}{T}}} &= e^{-\frac{S}{N}} = e^{-\gamma_0}\,, \\ e^{\gamma_0} &= e^{\frac{\omega}{T}} - 1\,. \end{aligned}$$

Исследована энергетика процесса квантового излучения. Показано, что учет работы сил поверхностного натяжения приводит к удвоению температуры излучения (до температуры Хокинга). Кроме того, пропорциональность частоты элементарных возбуждений температуре с коэффициентом $\log 3$, диктуемый свойствами классических квазинормальных мод, приводит к тому, что квант энтропии равен $\log 2$, что желательно с точки зрения теории информации.

И это только первые шаги, показывающие, что идея классических аналогов квантовых черных дыр весьма плодотворна.

В Заключении представлены выводы и сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. V.A.Berezin, V.A.Kuzmin, I.I.Tkachev Dynamics of bubbles in General Relativity Phys.Rev. D36 (1987) 2919-2944
2. V.A.Berezin, N.G.Kozimirov, V.A.Kuzmin, I.I.Tkachev On the quantum mechanics of bubbles Phys.Lett. B212 (1988) 415-417
3. V.A.Berezin On a quantum mechanical model of a black hole Phys.Lett. B241 (1990) 194

4. V.A.Berezin Quantum mechanics and black holes. Proc. Fourth Seminar on Quantum Gravity, Moscow, 28 May - 1 June, 1990.p.342-357 “Quantum Gravity” World Scientific, Singapore, Eds.M.A.Markov, V.A.Berezin, V.P.Frolov
5. V.A.Berezin Quantum Black Holes and Hawking’s Radiation Preprint IHES/P/91/76 Nov.1991, 27pp.
6. V.A.Berezin On a quantum black hole mass spectrum Proc. 2nd Intern. Sakharov Conf. in Physics, “Moscow 1996, Physics” (1996) 220-223
7. V.A.Berezin Quantum Black Hole Model and Hawking Evaporation Proc. 6th Moscow Quantum Gravity, Moscow, Russia, 12-19 June, 1995 IJMP D5 (1996) 679-706
8. V.A.Berezin On quantization of black holes Proc. 9th Russian Grav.Conf. “Theoretical and experimental Problems of Relativity and Gravitation” Novgorod, Russia, 24-30 June, 1996 Grav.Cosmol. 2 (1996) 277-288
9. V.A.Berezin Quantum Black Hole Model and Hawking’s Radiation Phys.Rev. D55 (1997) 2139-2151

   1
10. V.A.Berezin Square-root quantization: application to quantum black holes Talk given on the Second Conference on Constrained Dynamics and Quantum Gravity, Santa Margherita, Ligure, Italy, 17-21 September 1996 Nucl.Phys.Proc.Suppl. 57 (1997) 181-183
11. V.A.Berezin, A.M. Boyarsky, A, Yu. Neronov Quantum geometrodynamics for black holes and wormholes Phys.Rev. D57 (1998) 1118-1128

12. V.A.Berezin, A.M.Boyarsky. A.Yu.Neronov Towards the mass spectrum of quantum black holes and wormholes Talk given on the Second international conference "Quantum field theory and gravitation", July 28 -August 2, 1997, Tomsk, Russia
13. V.A.Berezin Quantum black holes:unexpected results Talk given at the Birthday Conference dedicated to A.Arvilski, 17th of February, 1997 gr-qc/9710067
14. V.A.Berezin, A.M.Boyarsky, A.Yu.Neronov Quantum Mechanics of Self-Gravitating Particles and Quantum Black Hole Models. Preprint INR RAS, 1999
15. V.A.Berezin Markov's maximon and quantum black holes Phys.Part.Nucl. 29 (1998) 274-277
16. V.A.Berezin, A.M.Boyarsky, A.Yu.Neronov Black hole mass spectrum vs spectrum of Hawking radiation Phys.Lett. B455 (1999) 109-114
17. V.A.Berezin, A.M.Boyarsky, A.Yu.Neronov Quantum black hole spectrum: What is it? Grav.Cosmol. 5 (1999) 11-15
18. V.A. Berezin, A.M.Boyarsky, A.Yu. Neronov On the Mechanism of Hawking Radiation Grav.Cosmol., Vol. 5 (1999), pp. 16-22 ArXiv: gr-qc/0605.099
19. V.A. Berezin, A.M. Boyarsky, A.Yu. Neronov On the spectrum of relativistic Schroedinger equation in finite differences arXiv:gr-qc/9902028, 16 pages, 1 figure
20. V.A.Berezin Something about quantum black holes 4th Int. Conf. on Cosmology, Relativistic Astrophysics: Cosmoparticle Physics in Honor of 80th Birthday of Isaak M.Khalatnikov (COSMION 99) Moscow, Russia, 17-24 Oct. 1999 Grav.Cosmol. 6 (2000) 72-77

21. V.A.Berezin Notes on quantum gravitational collapse Proc. 9th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic field theories (MG9), Rome, Italy, 2-9 July 2000 “Rome 2000, Recent..., Pt.B”, (2000) 1513-1514 gr-qc/0101004
22. V.A.Berezin Quantum black hole: What is it? Nucl.Phys.-Proc.Suppl. 88 (2000) 34-39
23. V.A.Berezin Vector-like Einstein’s equations for D-dimensional spherical gravity with (D-2)-dimensional sphere arXiv:gr-qc/0010083
24. V.A. Berezin Towards a Theory of Quantum Black Hole Talk given at the Fifth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions, Leipzig, 10-14 Sept., 2001 Int.J.Mod.Phys. A17 (2002) 979-988
25. V.A.Berezin, A.L.Smirnov Towards a theory of thin self-gravitating crossing shells Grav.Cosmol. 8 (2002) 25-40 arXiv:gr-qc/0210084
26. V.A. Berezin What can we learn studying quantum black holes? 65 pp.,11 Figs. Published in Int.Journ.Mod.Phys.A (2002) as a review article. gr-qc/0212100
27. V.A.Berezin Quantum gravitational colapse and quantum black holes Phys.Part.Nucl. 34 (2003) 523-553
28. V.A.Berezin Black Hole Thermodynamics without a Black Hole? Nucl.Phys. B661 (2003) 409-422 ArXiv: gr-qc/0302.066
29. V.A.Berezin On Classical Analogs of Quantum Schwarzschild and Reissner-Nordstrom Black Holes. Solving the “Mystery of log(3)” Combined and extended version of talks given at the “4th International Sakharov Conference on Physics”, Lebedev Institute, Moscow, Russia,

May 18-23, 2009, Joint workshop “Frontiers in Black Hole Physics in Dubna”, Dubna, Russia, May 25-30, 2009 and “Twelfth Marcel Grossmann Meeting MG12”, Palais d’UNESCO,Paris, France, July 12-18, 2009 ArXiv: gr-qc/1001.3996

30. V.A.Berezin Quantum Black Holes. Black Hole Temperature without a Black Hole 7 pages, Talk given at Workshop “Black Holes in General Relativity and String Theory”, August, 24-30, 2008, Veli Losinj, Croatia ArXiv: gr-qc/ 0812.4515. PoS. BHs, GRandStrings. 2008:019.2008
31. V.A.Berezin Classical analog of Quantum Schwarzschild black hole: local vs global, and the mystery of log 3. 20 pages, Preprint IHES, 2010. Int.J.Mod.Phys. A26 (2011) 161
32. V.A.Berezin Notes on classical analogs of quantum black holes. Contr.Paper, p.66-79. Petrov Centenary Symposium. Kazan, 1-6 November, 2010