

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*На правах рукописи*

**Агеева Юлия Александровна**

**Космологические решения в скалярно-тензорной  
теории Хорндески**

1.3.3 — теоретическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физ.-мат. наук,  
Миронов С. А.

Москва – 2023

*Посвящается памяти Рубакова Валерия Анатольевича*

# Содержание

Введение	5
<b>1 Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение в модели генезиса</b>	<b>23</b>
1.1 Модель ранней Вселенной: генезис в теории Хорндески . . . . .	23
1.2 Квадратичный лагранжиан скалярных и тензорных возмущений .	27
1.3 Устойчивость и запрещающая теорема . . . . .	29
1.4 Действие третьего порядка для возмущений и анализ проблемы сильной связи . . . . .	32
1.4.1 Скалярный сектор . . . . .	33
1.4.2 Смешанный сектор: одно скалярное и два тензорных возмущения . . . . .	37
1.4.3 Смешанный сектор: одно тензорное и два скалярных возмущения . . . . .	38
1.4.4 Тензорный сектор . . . . .	40
<b>2 Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом</b>	<b>43</b>
2.1 Сжатие и отскок с последующей инфляцией . . . . .	44
2.2 Сжатие и отскок без инфляции . . . . .	66
2.3 Генезис с последующим сжатием и отскоком . . . . .	68
2.4 Стандартный генезис . . . . .	79
<b>3 Проблемы размерного анализа сильной связи</b>	<b>83</b>
3.1 Инфляция в системе координат Эйнштейна . . . . .	85
3.2 Сжатие в системе координат Йордана . . . . .	85
3.3 Проблема сильной связи: размерный анализ . . . . .	86
3.4 Проблема сильной связи: анализ амплитуд рассеяния . . . . .	90

<b>4 Соотношение унитарности и унитарные ограничения и их применение для анализа проблемы сильной связи</b>	<b>93</b>
4.1 Соотношения унитарности: различимые частицы . . . . .	95
4.2 Соотношение унитарности: неразличимые частицы . . . . .	98
4.3 Унитарные ограничения . . . . .	100
4.4 Пример: теория с двумя действительными скалярными полями .	104
<b>Заключение</b>	<b>109</b>
<b>Список литературы</b>	<b>112</b>
<b>Приложение</b>	<b>126</b>
<b>A Явные формулы для коэффициентов в действиях второго и третьего порядков</b>	<b>126</b>
<b>B Отсутствие режима сильной связи на ранних временах в модели сжимающейся Вселенной</b>	<b>133</b>
<b>C Детали численных вычислений в модели Вселенной с генезисом и сжатием</b>	<b>137</b>
<b>D Инвариантность относительно инверсии времени и симметрия <math>S</math>-матрицы</b>	<b>140</b>

# Введение

## Актуальность темы исследования

На сегодняшний день благодаря многочисленным теоретическим исследованиям совместно с полученными наблюдательными данными свойства Вселенной известны не только качественно, но и количественно, притом с хорошей точностью. Так, теория горячего Большого взрыва и дополнившая ее инфляционная теория [1–5] находятся в согласии с результатами экспериментов и способны последовательно объяснить различные аспекты эволюции Вселенной. Такие этапы эволюции нашей Вселенной как радиационно-доминированная стадия, первичный нуклеосинтез, переход к пылевидной стадии, рекомбинация и другие [6] в свое время были предложены и последовательно описаны как раз в рамках теории горячего Большого взрыва. В то же время, теория горячего Большого взрыва сама по себе сталкивается с рядом проблем, а именно: теория не дает объяснений, почему Вселенная такая большая, однородная и изотропная (так называемая проблема горизонта); почему обладает такой большой энтропией; почему пространственная кривизна либо крайне мала, либо вовсе равна нулю; наконец, в теории Большого Взрыва нет механизма образования первичных неоднородностей (с вполне определенными свойствами), которые требуются для дальнейшего формирования таких структур как звезды, галактики и их скопления. Для того чтобы описать эти свойства, требуется задать специфичные начальные условия. Например, известна оценка энтропии видимой части Вселенной,  $S \sim 10^{88}$ . Как уже упоминалось ранее, теория горячего Большого взрыва не дает ответа на вопрос, откуда берется столь большое значение энтропии. В рамках этой теории это значение приходится установить как некоторое начальное условие, которое, конечно, имеет крайне “неестественный” вид.

На помощь приходит инфляционная теория, в рамках которой предлагается решение этих и других проблем теории горячего Большого взрыва. Согласно теории инфляции, горячей стадии предшествовала стадия быстрого, близкого

к экспоненциальному, расширения Вселенной. Такое сверхбыстрое расширение является причиной огромного размера видимой части Вселенной, ее однородности и изотропности, плоскостности ее метрики; находит свое объяснение с помощью постинфляционного разогрева и проблема энтропии. Наконец, естественным образом теория инфляции решает и проблему начальных неоднородностей [7–10].

На сегодняшний день существует много различных инфляционных моделей, см., например, [11–24]. Экспериментальные и наблюдательные данные лишь накладывают определенные ограничения на параметры теорий, но не позволяют выделить из всего ряда одну единственно верную [25]. Для окончательного утверждения инфляционной теории требуются и дополнительные экспериментальные исследования современной Вселенной. Например, многие модели инфляции предсказывают наличие во Вселенной реликтовых гравитационных волн, но пока что экспериментально такие эффекты не наблюдались.

Более того, в инфляционной теории существует ряд неразрешенных проблем. Одной из них, например, является проблема геодезической неполноты<sup>1</sup>, которая указывает на то, что в теории может быть сингулярность [27–32]. В общей теории относительности было также показано, что начальная сингулярность является характерным свойством расширяющихся космологических решений, см. [33].

Таким образом, интересно построить и изучить другие космологические сценарии ранней Вселенной, альтернативные инфляции. С одной стороны, детальное исследование альтернативных сценариев косвенно может быть своего рода подтверждением теории инфляции, если другие сценарии по каким-либо при-

---

<sup>1</sup>Стандартное условие геодезической полноты в прошлом имеет вид  $\int_{-\infty}^t a(t)dt = \infty$  для пространственно плоской, однородной и изотропной Вселенной с метрикой  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2$ , где  $a(t)$  — масштабный фактор. Отметим здесь, что геодезическая полнота как геометрическая концепция зависит от выбора системы координат (здесь и далее под системой координат мы понимаем то, что в англоязычной литературе обозначается как “frame” или “metric frame”), если например, изучается теория с массивными частицами (см. детали этого вопроса, например, в работе [26]).

чинам окажутся нежизнеспособны (например, не будут согласовываться с наблюдательными данными, будут содержать разного рода патологии и так далее). С другой стороны, новые сценарии ранней Вселенной могут дополнить инфляционную модель, избавляя ее, например, от упомянутой выше начальной сингулярности.

Для построения несингулярных моделей ранней Вселенной зачастую требуется нарушение теоремы Пенроуза [27]. Содержание этой теоремы заключается в следующем. Во-первых, требуется выполнение так называемого изотропного условия энергодоминантности (от англ. “null energy condition”, далее — NEC [33, 34], а также [35, 36]) для рассматриваемой материи. Это условие означает, что тензор энергии-импульса (далее — ТЭИ)  $T_{\mu\nu}$  этой материи удовлетворяет следующему неравенству

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0, \quad (1)$$

для любого светоподобного вектора  $n^\mu$ , который в свою очередь удовлетворяет  $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ .<sup>2</sup> Отдельно отметим, что для случая космологической постоянной ТЭИ равен  $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  и, соответственно,  $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ . Здесь и далее, греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3. Во-вторых, требуется некомпактность гиперповерхности Коши. Так, по теореме Пенроуза в будущем обязательно возникает сингулярность, если в пространстве имеется ловушечная поверхность (детали обсуждаются в Приложении А в работе [36]). Рассмотрим в качестве примера сжимающуюся пространственно плоскую Вселенную, заполненную однородной и изотропной материей, для которой выполняется неравенство NEC (1). Ловушечная поверхность в данном случае — это сфера, размер которой превышает  $H^{-1}$ , где  $H$  — соответствующий параметр Хаббла, см. [36]. Тогда по теореме Пенроуза эволюция такой Вселенной завершается сингулярностью. Совершая инверсию по времени, мы получим расширяющуюся Вселенную с сингу-

---

<sup>2</sup>Если в какой-то период эволюции гравитация описывается не стандартной общей теорией относительности, то рассматривают более общее условие  $R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0$ , см. [34].

лярностью в прошлом. Действительно, если расширяющаяся пространственно плоская Вселенная с метрикой Фрийдмана–Леметра–Робертсона–Уокера (далее — метрика ФЛРУ) вида  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$ , где  $a(t)$  — масштабный фактор, а  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера (здесь и далее, латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3), заполнена однородной и изотропной материей, то компоненты ТЭИ этой материи в сопутствующей системе отсчета равны

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = a^2 \delta_{ij} p. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность энергии, а  $p$  — давление соответствующей материи. Комбинация чисто временной “00” и чисто пространственной “ij” компонент уравнений Эйнштейна, приводят к выражению

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p), \quad (3)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная. Теперь, если мы рассмотрим светоподобный вектор вида  $n^\mu = (1, a^{-1}\nu^i)$ , при этом  $\delta_{ij}\nu^i\nu^j = 1$ , то неравенство NEC (1) для случая материи с ТЭИ (2) принимает вид

$$\rho + p > 0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) вместе с неравенством (4) следует, что параметр Хаббла не растет со временем. Рассмотрим также и ковариантный закон сохранения энергии-импульса  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Для ТЭИ (2) этот закон можно переписать как

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p), \quad (5)$$

откуда видно, с учетом (4), что в расширяющейся Вселенной со временем плотность энергии  $\rho$  уменьшается. Итак, из уравнений (3) и (5), совместно с неравенством (4), следует, что в рамках стандартной общей теории относительности выполнение условий теоремы Пероуза приводит нас к тому, что расширение Вселенной начинается с сингулярности, которая характеризуется бесконечной плотностью энергии и бесконечным темпом расширения в некоторый момент времени в далеком прошлом.



Как было указано выше, нарушая условия теоремы Пенроуза, можно избежать начальной сингулярности. Например, можно рассматривать новую экзотическую материю, для которой бы нарушалось неравенство NEC (1). Тем не менее до недавнего времени считалось, что нарушить NEC без возникновения патологий нельзя. Так, например, для теорий действительного скалярного поля, минимально связанного с гравитацией и с лагранжианами, содержащими только первые производные, неравенство NEC либо выполняется автоматически, либо теории содержат неустойчивости [14, 37].

В связи с этим в последние годы ведется активное исследование и применение теорий модифицированной гравитации, чьи лагранжианы включают высшие производные поля. Примером таких теорий, в рамках которых допустимо нарушение NEC служит *теория Хорндески*, берущая свое начало в работе [38] и переоткрытая позже в [39]. Теория Хорндески — это скалярно-тензорная теория модифицированной гравитации. Долгое время принято было считать, что подобного рода теории с лагранжианами, содержащими производные выше первой патологичны. Так, лагранжианы с высшими производными обычно приводят к уравнениям движения с производными выше второй, а это в свою очередь приводит к возникновению дополнительных нефизических степеней свободы или, другими словами, к появлению в теории духов Остроградского [40–42]. Тем не менее лагранжиан теории Хорндески устроен так, что хоть он и содержит высшие производные, при получении уравнений движения происходят определенные сокращения, и сами полевые уравнения имеют второй порядок по производным.

Итак, действие теории Хорндески имеет вид

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (6)$$

где  $g$  — это детерминант метрики и

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\square\phi)^3 - 3\square\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3], \quad (7) \end{aligned}$$

где  $R$  — это скаляр Риччи,  $\phi$  — это действительное скалярное поле,  $X = -\frac{g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{2}$ ,  $\square\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ ,  $G_{4X} \equiv \partial G_4/\partial X$  и т.д. В общем случае  $G_{2,3,4,5}$  — это произвольные функции поля  $\phi$  и  $X$ . Сигнатура метрики здесь и далее принята как  $(-, +, +, +)$ .

Теория Хорндески является обобщением большого класса скалярно-тензорных теорий. Так, неминимальная связь с гравитацией вида  $f(\phi)R$  получается при  $G_4 = f(\phi)$ , а действие общей теории относительности (действие Эйнштейна–Гильберта) восстанавливается при  $G_4 = const = \frac{M_{Pl}^2}{2}$ . Далее, слагаемое  $G_2$  “содержит” в себе такие модели как  $k$ -инфляцию [14],  $k$ -эссенцию [43, 44], различные модели а также , а слагаемое с функцией  $G_3$  включает в себя, например, модели кинетического “переплетения” с гравитацией [45] и теории  $G$ -инфляции [18, 19]. Теория галилеонов [46] с галилеевой симметрией  $\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + b_\mu$  и различные ее обобщения [47–54] также являются частным случаем данной теории, как и модели  $f(R)$ -гравитации (сводятся к подклассу теории Хорндески с помощью введения дополнительного поля вида  $\phi = \frac{df}{dR}$ ) [55, 56], теория Гаусса–Бонне [24], Хиггс-инфляция [20–23] и так далее (см. обзор [57]).

Касательно различных приложений теории Хорндески кратко заметим, что помимо того, что эта теория содержит в себе многочисленные модели инфляции и, как мы будем обсуждать далее, различные несингулярные модели ранней Вселенной, в ее рамках также возможно построение моделей темной энергии [58–63]; кроме того, она находит свое применение и для описания физики черных дыр, см., например, [64–66]. Отметим, что в свете зарегистрированного гравитационно-волнового всплеска GW170817 [67] на вид лагранжиана (7) для моделей темной энергии и моделей черных дыр были наложены определенные ограничения, см. обзор [68].

В рамках данной работы мы будем использовать теорию Хорндески, а вернее — определенный ее подкласс, для исследования следующих космологических моделей ранней Вселенной без начальной сингулярности. Первая из них — это модель *генезиса* (от англ. “genesis”) [69–77]. В модели генезиса эволю-

ция Вселенной начинается с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства-времени Минковского, далее постепенно плотность энергии скалярного поля  $\phi$  начинает расти. При приближении к некоторому моменту времени, например, к  $t = 0$ , происходит переход к инфляционной стадии или же разогрев и переход на горячую стадию. Так, если после генезиса запускается радиационно-доминированная стадия, то тогда генезис выступает как альтернатива инфляции. Вторая возможность — это модель Вселенной со *сжатием и отскоком* (от англ. “bounce”) [78–80, 80–86]. В этой модели предполагается, что эволюция Вселенной начинается со сжатия ( $H < 0$ ), затем в какой-то момент происходит отскок (смена знака параметра Хаббла) и дальнейшее расширение ( $H > 0$ ). Как и в случае с генезисом, после отскока последующим этапом может быть как инфляция, так и горячая стадия.

Упомянутые выше модели генезиса и отскока устойчивы. Под устойчивостью понимается то, что в соответствующей линеаризованной теории нет духовых и градиентных неустойчивостей. Кроме того, в дальнейшем мы будем требовать, чтобы скорости звука соответствующих возмущений не превышали скорости света. Тем не менее построение устойчивых моделей генезиса или отскока на ранних временах вовсе не означает, что космологические решения будут устойчивы и на протяжении всей последующей истории жизни Вселенной. Весьма большой интерес все же представляет получение именно полной устойчивой модели эволюции на всех временах (в данной работе время будет принимать значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Отметим, что наибольшие трудности возникают при моделировании устойчивого промежуточного периода между эпохами (например, переход с генезиса или отскока далее на инфляцию и/или горячую стадию).

Однако, в работах [87, 88] в рамках как теории обобщенных галилеонов, так и в общей теории Хорндески, были сформулированы так называемые *запрещающие* теоремы (от англ. “no-go theorem”) о невозможности построения космологических решений без начальной сингулярности, которые были бы свободны

от градиентных неустойчивостей на протяжении всей эволюции.

В той же работе [88] (а также в [89]) было отмечено, что одним из возможных космологических сценариев (будь то генезис или отскок), свободным от неустойчивостей на всех последующих космологических эпохах, является тот, в котором, на первый взгляд, возникает *режим сильной связи*: эффективная масса Планка стремится к нулю при больших отрицательных временах и классический анализ теории запрещен. Здесь можно пойти следующими путями. С одной стороны, можно полностью отказаться от теории, где наивно возникает режим сильной связи. Например, существует обобщение теории Хорндески — так называемые “расширенные” теории Хорндески (от англ. “beyond Horndeski theories”) [90–92], в рамках которых возможно построение как и самой несингулярной эпохи (например, генезиса или отскока) с нарушением NEC, так и устойчивого классического решения на протяжении всей эволюции [93–97]. В данной диссертации мы не рассматриваем эту возможность. С другой стороны, можно провести детальный анализ режима сильной связи. Такой анализ или, иными словами, возможность применения классического полевого описания эволюции Вселенной на ранних стадиях базируется на сравнении характерных масштабов энергии: чтобы выяснить, является ли классический подход законным на рассматриваемых ранних временах, нужно оценить масштаб сильной связи и сравнить его с обратным характерным временем эволюции космологических решений (фоновых решений). Масштаб энергии сильной связи обычно определяется взаимодействиями возмущений метрики,<sup>3</sup> которые характеризуются действием высших (выше второго) порядков по этим возмущениям. Если окажется, что масштаб энергии сильной связи выше классического масштаба на рассматриваемых временах, то применение классического полевого описания решений законно, режим сильной связи на указанных временах отсутствует.

Характерные масштабы энергии сильной связи вычисляются с помощью

---

<sup>3</sup>В общем случае, в теории есть и возмущения скалярного поля. Мы же налагаем с самого начала унитарную калибровку, которая имеет вид  $\delta\phi = 0$ , и работаем только с возмущениями метрики.

размерного анализа слагаемых действия третьего и высших порядков по соответствующим возмущениям метрики. Тем не менее, в данной диссертации показано, что размерный анализ может давать завышенную оценку масштаба сильной связи, а в некоторых моделях приводить и к неправильному ответу. Поэтому масштабы энергии сильной связи следует вычислять более точно, используя условие унитарности  $S$ -матрицы и следующие из этого условия унитарные ограничения [98–102].

Важно заметить, что отсутствие сильной связи при анализе действия третьего порядка по возмущениям ничего не говорит о наличии или отсутствии сильной связи в модели вообще. Поэтому если сильная связь не найдена при изучении трёхточечных вершин, то следует изучать четвёртый и следующие порядки по возмущениям. Для определенного вида функций лагранжиана (7) анализ высших (выше второго и третьего) порядков и соответствующий размерный анализ сильной связи был, например, проведен в работе [103].

### **Цели и задачи диссертации**

Целью данного диссертационного исследования является изучение классических космологических решений без начальной сингулярности в скалярно-тензорных теориях гравитации со старшими производными (в подклассе теории Хорндески), анализ проблемы режима сильной связи в таких моделях и построение полной эволюции ранней Вселенной, устойчивой на всех временах.

Задачи данной диссертации формулируются в рамках подкласса теории Хорндески как в ковариантном виде, так и формализме Арновитта–Дезера–Мизнера (везде далее — АДМ), как это было сделано в работе [88]. Формализм предполагает, что пространство-время можно расслоить на совокупность пространственноподобных 3-мерных гиперповерхностей, которые параметризуются временной координатой, а на каждой гиперповерхности вводятся пространственные координаты. Уравнения движения в общей теории относительности в рамках данного формализма оказываются записанными в гамильтоновой форме.

Так одной из задач является исследование кубического действия в АДМ

формализме для конкретной модели генезиса из работы [88] в рамках выбранного подкласса теории Хорндески, получение явных формул для коэффициентов каждого из слагаемых в этом действии. Далее, с использованием размерного анализа найдены характерные масштабы энергии сильной связи. Для этой же конкретной модели генезиса получен масштаб классической энергии. Показано, что при определенных значениях параметров лагранжиана удастся удовлетворить условию отсутствия сильной связи на ранних временах: характерные масштабы энергии сильной связи превышают классический энергетический масштаб. В действительности допустимо построение устойчивой на всех временах модели генезиса в рамках теории Хорндески, на ранних временах режим сильной связи отсутствует при определенном подборе параметров лагранжиана.

Далее, отдельной задачей является построение полных устойчивых на всех временах моделей эволюции ранней Вселенной. Так, построены различные несингулярные модели, а именно 1) сжимающаяся Вселенная с отскоком, эволюция которой проходит через инфляционную эпоху к стадии с безмассовым скалярным полем: расширение Вселенной в рамках общей теории относительности, динамика определяется безмассовым скалярным полем; 2) сжатие и Вселенная с отскоком, которая после отскока сразу переходит на стадию с безмассовым скалярным полем и ОТО; 3) модель модифицированного генезиса, где эволюция начинается с плоского пространства-времени Минковского, затем следует сжатие и отскок, а далее последующее расширение; 4) “стандартный” генезис: эволюция начинается с плоского пространства-времени Минковского, затем наступает эпоха расширения. Показано, что эти модели устойчивы на всех временах, а скорости распространения соответствующих возмущений над фоновым решением не превышают скорости света. Также во всех моделях проведен анализ проблемы сильной связи, показано, что классическое полево описание в каждый момент времени законно. Проведенное исследование позволяет убедиться в том, что в довольно простом подклассе теории Хорндески действительно допустимо построение непатологичных на всех временах моделей ранней Вселенной.

Часть из этих моделей включает в себя инфляционную стадию, часть же выступает в роли альтернативных ей сценариев.

Наконец, в еще одну отдельную задачу выделяется исследование другого варианта анализа проблемы сильной связи в моделях ранней Вселенной. Для этих целей сперва была рассмотрена модель сжимающейся Вселенной, которая конформно связана с моделью инфляции [104]. Известно, что в такой модели не может быть никакого масштаба сильной связи, кроме планковской массы. Однако, наивный размерный анализ в такой модели отскока показывает, что некоторый масштаб сильной связи все же есть. Поэтому следует проводить более точный анализ проблемы сильной связи с помощью диаграммной техники. Такой более точный анализ должен выявить, что в действительности никаких масштабов сильной связи, кроме массы Планка в рассматриваемой модели отскока нет. Таким образом, показано, что наивный анализ масштаба сильной связи не всегда дает правильный ответ и для того, чтобы определить применимость классического описания в некоторых моделях требуется проводить более точный анализ проблемы сильной связи с помощью диаграммной техники и унитарных ограничений. Кроме того, поскольку в рассматриваемых космологических моделях присутствует несколько типов возмущений (а именно — скалярные и тензорные возмущения метрики), эти самые унитарные ограничения необходимо получить и для случая рассеяния частиц разных типов, с разными дисперсионными соотношениями. Для этого была рассмотрена теория, которая содержит скалярные поля с различными скоростями звука. Были получены соотношения унитарности для парциальных амплитуд для процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$ . С использованием соотношений унитарности также получены и необходимые для точного анализа сильной связи унитарные ограничения.

### **Научная новизна диссертации**

Все основные результаты, выдвигаемые на защиту, являются новыми. Так, изучение режима сильной связи, его наличие или отсутствие в устойчивых несингулярных моделях ранней Вселенной в рамках теории Хорндески — новая

задача, данный вопрос еще не был подробно освещён в литературе. Однако, режим сильной связи был обозначен в ряде работ (см., например, [88, 89]) в качестве новой возможной патологии рассматриваемых теорий-кандидатов на описание ранней Вселенной. Кроме того, изучение сшивки эпох генезиса или Вселенной с отскоком с последующими стадиями эволюции Вселенной — отдельная неисследованная задача. Актуальность исследования космологических сценариев, предшествовавших горячей стадии, подтверждается существенным количеством новых работ в указанной области. Прделанная работа позволила глубже понять структуру используемых скалярно-тензорных теорий. Отдельное исследование размерного анализа проблемы сильной связи на простом примере модели сжимающейся Вселенной, которая конформно связана с некоторой теорией инфляции, позволило определить недостатки такого подхода, подтолкнув нас к исследованию и использованию более точного анализа проблемы сильной связи с помощью условия унитарности и унитарных ограничений.

### **Теоретическая и практическая значимость диссертации**

Все результаты, полученные в диссертации имеют теоретическое значение, а предложенные устойчивые космологические решения — генезис, Вселенная с отскоком и их модификации — в рамках подкласса теории Хорндески без начальной сингулярности и без сильной связи с гравитацией в прошлом являются собой реалистичные примеры полных моделей ранней Вселенной. Так, например, в этих моделях в будущих работах может быть вычислен спектр, наклон спектра возмущений, исследованы негауссовости, а знание этих величин позволит наложить дополнительные ограничения на параметры модели из наблюдательных данных. Благодаря тому, что построенные модели асимптотически в будущем выходят на стадию, где динамика расширения определяется безмассовым скалярным полем и стандартной ОТО, указанные сценарии допускают естественный выход на горячую стадию после эпохи генезиса или после отскока, что делает данные решения интересными с точки зрения построения полной модели Вселенной.



## Методология диссертационного исследования

В данной работе используются как численные, так и аналитические методы, успешно применяемые для самых разных задач теоретической физики, классической и квантовой теории поля, астрофизики и космологии. В ходе работы для определенных вычислений применялось такое программное обеспечение как система компьютерной алгебры *Mathematica*. Также, в работе используется стандартный формализм теории возмущений.

## Положения, выносимые на защиту

1. Несингулярная, устойчивая на протяжении всего времени эволюции Вселенной модель генезиса может быть построена в рамках подкласса теории Хорндески. В такой модели, согласно размерному анализу действия третьего порядка по возмущениям метрики, отсутствует режим сильной связи на ранних временах.
2. Полная эволюция ранней Вселенной, которая начинается с конкретных несингулярных эпох — сжатия с отскоком, генезиса, а также их модификаций — может быть построена в рамках подкласса теории Хорндески, с конкретным видом функций лагранжиана этой теории. Показано, что эти модели устойчивы на всех временах и находятся вне режима сильной связи. Указанные ранние эпохи могут быть сшиты с последующей эпохой инфляции, а далее может происходить устойчивый переход с инфляции на стадию, где динамика определяется безмассовым действительным скалярным полем, а гравитация описывается ОТО.
3. Наивный размерный анализ масштаба сильной связи не всегда дает правильный ответ и для того, чтобы определить применимость классического описания в некоторых моделях требуется проводить более точный анализ проблемы сильной связи с помощью диаграммной техники, условия унитарности  $S$ -матрицы и унитарных ограничений.

4. В теории, которая содержит скалярные поля с различными скоростями звука, могут быть получены соотношения унитарности для парциальных амплитуд для процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$ . Используя соотношения унитарности, можно получить унитарные ограничения. Последние, в свою очередь, могут быть полезны при получении более точных оценок масштаба энергии сильной связи в различных космологических моделях ранней Вселенной.

### **Достоверность и обоснованность результатов**

Результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых международных научных журналах, а также обсуждались в рамках докладов на международных конференциях.

### **Апробация результатов**

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях, семинарах, школах:

1. Международный семинар “XXth International Seminar on High Energy Physics (QUARKS-2018)”, Валдай, Россия, 27 мая — 2 июня 2018 года.
2. Международная школа Cargese 2018 International Summer School “Mass: From the Higgs to Cosmology”, Каржез, Франция, 9 — 21 июля 2018 года.
3. Международная школа и конференция “YITP Asian-Pacific Winter School and Workshop on Gravitation and Cosmology 2019”, Киото, Япония, 11—15 февраля 2019 года.
4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2019”, Москва, Россия, 8—12 апреля 2019 года.
5. Международная конференция “The 29th Workshop on General Relativity and Gravitation in Japan”, Кобе, Япония, 25—29 ноября 2019 года.

6. X Межинститутская молодежная конференция “Физика элементарных частиц и космология 2021”, Долгопрудный, Россия, 19 — 20 апреля 2021 года.
7. Международный семинар Quarks-2020 “Online Workshops-2021”, секция “Modification of Gravity: Theories and Observations”, онлайн, 31 мая—24 июня 2021 года.
8. Международная конференция “International Conference on Quantum Field Theory, High–Energy Physics, and Cosmology”, Дубна, Россия, 17–22 июля 2022 года.
9. Мемориальная конференция памяти академика Андрея Алексеевича Славнова, Москва, Россия, 21–22 декабря 2022 года.

Результаты также были представлены 15 мая 2023 г. на семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Российской академии наук.

### **Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Y. Ageeva, O. Evseev, O. Melichev and V. Rubakov. Towards evading the strong coupling problem in Horndeski Genesis // Physical Review D. — 2020. — Vol. 102. — no.2. — 023519.
2. Y. Ageeva, P. Petrov and V. Rubakov. Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past // Physical Review D. — 2021. — Vol. 104. — no.6. — 063530.
3. Y. Ageeva and P. Petrov. On the strong coupling problem in cosmologies with “strong gravity in the past” // Modern Physics Letters A. — 2022. — Vol. 37. — no.26. — 2250171.

4. Y. Ageeva and P. Petrov. Unitarity relation and unitarity bounds for scalars with different sound speeds // Physics—Uspekhi. — 2022.

а также в тезисах докладов:

1. Y. Ageeva, O. Evseev, O. Melichev and V. Rubakov, Horndeski Genesis: strong coupling and absence thereof // EPJ Web Conferences. — 2018. — Vol. 191. — 07010.

### **Личный вклад автора**

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

### **Структура, объем и краткое содержание работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. Общий объем работы 141 страница. Диссертация содержит 18 рисунков. Список литературы включает 130 наименований.

В главе 1 рассматривается конкретный подкласс теории Хорндески и определенный анзац для функций лагранжиана, в рамках которых возможно построение устойчивого на всех временах генезиса без сильной связи на ранних временах. Так, в параграфе 1.1 приведены: лагранжиан подкласса теории Хорндески как в ковариантном, так и в АДМ формализмах; явный вид возмущенной метрики; соответствующие уравнения движения; анзац для функций лагранжиана, в рамках которого можно получить в качестве фонового решения генезис. В параграфе 1.2 приводятся формулы для квадратичного действия для возмущений метрики (скалярных и тензорного) в унитарной калибровке, а в параграфе 1.3 подробно обсуждается устойчивость решения и запрещающая теорема, а также способ обойти ее условия. Получен явный вид ограничений на параметры лагранжиана: как раз в рамках этих ограничений и можно обойти запрещающую теорему. Здесь же показано, как в теории наивно возникает проблема сильной связи на больших отрицательных временах. В параграфе 1.4 приводится действие третьего порядка для возмущений и проводится размерный анализ

проблемы сильной связи во всех секторах — скалярном (пункт 1.4.1), смешанном (пункты 1.4.2 и 1.4.3) и тензорном (пункт 1.4.4).

Глава 2 посвящена построению полных несингулярных моделей ранней Вселенной. В параграфе 2.1 приводится анзац для функций лагранжиана, в рамках которых будет построен сценарий сжатия с последующим отскоком, явный вид уравнений движения в этом анзаце и коэффициенты из действия второго порядка для возмущений. В этом же параграфе детально показано, как можно построить модель ранней Вселенной, эволюция которой начинается со сжатия с последующим отскоком, затем происходит переход на стадию инфляции, после которой запускается эпоха, на которой дальнейшая динамика определяется безмассовым скалярным полем, а в гравитационном секторе восстанавливается стандартная общая теория относительности. Приводится конкретный численный пример такой модели. Аналогичным образом в параграфе 2.2 был построен другой сценарий: после сжатия и отскока сразу наступает стадия с безмассовым скалярным полем и стандартной гравитацией, описываемой ОТО. Кроме того, также и различные численные примеры полных моделей с генезисом на ранних временах построены и приводятся в параграфах 2.3 и 2.4.

Далее, глава 3 содержит исследование потенциальной проблемы сильной связи на ранних временах в модели сжимающейся Вселенной, которая конформно связана с некоторой моделью инфляции. Наивный размерный анализ в модели со сжатием приводит к выводу, что масштаб энергии сильной связи в такой теории есть и он даже может быть ниже классического. Однако, с точки зрения того, что модель сжимающейся Вселенной конформно связана с моделью инфляции, никакого масштаба сильной связи, кроме планковского, в теории быть не должно. Из вычислений соответствующих матричных элементов и при использовании условия унитарности было показано, что модель сжимающейся Вселенной действительно свободна от режима сильной связи, как и должно быть.

Наконец, в главе 4 получены соотношения унитарности для парциальных

амплитуд процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$  с учетом вклада промежуточных двух-частичных состояний. Такое соотношение мы получаем в двух случаях: когда частицы в паре различимы (параграф 4.1) и идентичны (параграф 4.2). Далее, в параграфе 4.3 получены унитарные ограничения, а в параграфе 4.4 на примере простой теории с двумя действительными полями продемонстрировано, что полученные ранее соотношение унитарности действительно выполняется в первом нетривиальном порядке по константам связи.

Заключение содержит краткую формулировку результатов исследований, представленных в диссертации.

Приложение А содержит явные формулы для коэффициентов в квадратичном и кубическом действиях для возмущений в случае выбранного подкласса теории Хорндески, а также кубическое действие, записанное в терминах всех возмущений скалярного сектора до подстановки уравнений связи.

В Приложении В приведен подробный анализ проблемы сильной связи для модели сжимающейся Вселенной.

Приложение С содержит технические детали и обсуждение тонкостей численных вычислений, которые проводились для модели Вселенной, эволюция которой начинается с плоского пространства-времени Минковского, а затем переходит на сжатие.

Наконец, Приложение D посвящено обсуждению  $T$ -инвариантности  $S$ -матрицы и следующей из этой инвариантности симметрии для парциальных амплитуд.

# 1 Проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и ее решение в модели генезиса

## 1.1 Модель ранней Вселенной: генезис в теории Хорндески

В общем случае лагранжиан теории Хорндески имеет вид (7). Для наших целей достаточно рассмотреть подкласс теории Хорндески, а именно пусть  $G_{2,3}$  будут функциями как  $\phi$ , так и  $X$ , функция  $G_4$  — только функцией поля, а  $G_5 = 0$ . Таким образом, выбранный нами лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R, \quad (8)$$

Итак, теория с лагранжианом (8) выбрана нами для построения моделей ранней Вселенной. Будем изучать ее на больших отрицательных временах и рассмотрим пространственно-плоские решения фона.

Нам удобнее будет работать в гамильтоновой формулировке или, другими словами, в формализме АДМ. Предполагается, что пространство-время можно расслоить на совокупность пространственноподобных 3-мерных гиперповерхностей, которые нумеруются при помощи временной координаты, и на каждой такой гиперповерхности вводятся свои пространственные координаты. Тогда динамическими переменными формализма оказываются метрический тензор на этих гиперповерхностях и сопряжённый с ним тензор канонических импульсов. Соответственно, гамильтониан теории записывается через эти переменные. В таком формализме метрика, с учетом возмущений, имеет вид

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (9)$$

где  $\gamma_{ij}$  — это трехмерная метрика,  $N$  — функция хода (от англ. “lapse function”), а  $N_i = \gamma_{ij}N^j$  — вектор сдвига (от англ. “shift vector”). Выбирая унитарную калибровку (в которой поле  $\phi$  зависит только от времени  $t$  и имеет вид  $\phi = \phi(t)$ ),

можно переписать действие (8) следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ A_2(t, N) + A_3(t, N)K + A_4(t, N)(K^2 - K_{ij}^2) + B_4(t, N)R^{(3)} \right] \quad (10)$$

где  $A_{2,3,4}$  и  $B_4$  — произвольные функции времени и  $N$ , и, в общем случае (когда функция  $G_4$  из (8) зависит и от поля  $\phi$ , и от  $X$ )

$$A_4(t, N) = -B_4(t, N) - N \frac{\partial B_4(t, N)}{\partial N}, \quad (11)$$

${}^{(3)}R_{ij}$  — тензор Риччи, составленный по трехмерной метрике  $\gamma_{ij}$ ,  $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$ , где  $\gamma$  — детерминант трехмерной метрики,  $K = \gamma^{ij}K_{ij}$ , где  $K_{ij}$  — это внешняя трехмерная кривизна

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} \left( \frac{d\gamma_{ij}}{dt} - {}^{(3)}\nabla_i N_j - {}^{(3)}\nabla_j N_i \right), \quad (12)$$

и  ${}^{(3)}R = \gamma^{ij} {}^{(3)}R_{ij}$  — это скаляр Риччи по трехмерной метрике  $\gamma^{ij}$ . Далее мы будем рассматривать случай, когда  $A_4$  и  $B_4$  не зависят от  $N$ ; в таком случае связь (11) принимает простой вид  $A_4(t) = -B_4(t)$ . Также напомним, что время меняется в пределах  $-\infty < t < +\infty$ . Связь между функциями  $G_{2,3,4}$  в ковариантном и  $A_{2,3,4}$ ,  $B_4$  в АДМ формализмах дается формулами [63, 91, 105]

$$G_2 = A_2 - 2XF_\phi, \quad G_3 = -2XF_X - F, \quad G_4 = B_4, \quad (13)$$

где  $N$  и  $X$  связаны между собой следующим образом

$$N^{-1}d\phi/dt = \sqrt{2X}, \quad (14)$$

и

$$F_X = -\frac{A_3}{(2X)^{3/2}} - \frac{B_4\phi}{X}. \quad (15)$$

Отметим, что выражение (15) определяет  $F(\phi, X)$  с точностью до некоторого аддитивного слагаемого  $D(\phi)$ . Это слагаемое, вообще говоря, изменит функции лагранжиана следующим образом

$$G_2 \rightarrow G_2 - 2XD_\phi, \quad G_3 \rightarrow G_3 - D.$$



Однако, эти дополнительные вклады в действие с лагранжианом (8) исчезают при интегрировании по частям

$$\int d^4x \sqrt{-g} (-2X D_\phi + D \square \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (D \nabla^\mu \phi) = 0 . \quad (16)$$

Соответственно, произвольная функция  $D(\phi)$  не войдет и в уравнения движения.

Кроме того, отметим и следующую тонкость: переход от ковариантного формализма с лагранжианом (8) к АДМ формализму с действием и лагранжианом (10) зависит от явного вида функции  $\phi(t)$ . В этом смысле у нас есть дополнительная свобода в выборе явного вида функций  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_4$ , или, другими словами, свобода в выборе конкретного анзаца для фонового решения в той или иной модели. Позже, в параграфе 2.1 мы воспользуемся этой дополнительной свободой.

В данной главе мы изучаем конкретное космологическое решение — эпоху генезиса. Напомним, что в модели генезиса эволюция Вселенной начинается с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства-времени Минковского, далее плотность энергии скалярного поля  $\phi$  постепенно начинает расти. При приближении к некоторому моменту времени происходит переход к инфляционной стадии или же разогрев и переход на горячую стадию. Для получения и описания фонового решения генезиса и возмущений над ним мы воспользуемся следующим анзацем:

$$N = N_0(t)(1 + \alpha) , \quad (17a)$$

$$N_i = \partial_i \beta + N_i^T , \quad (17b)$$

$$\gamma_{ij} = a^2(t) \left( e^{2\zeta} (e^h)_{ij} + \partial_i \partial_j Y + \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \right) , \quad (17c)$$

где  $a(t)$  и  $N_0(t)$  — фоновые решения для масштабного фактора и функции хода, явный вид которых для стадии генезиса будет найден ниже; также  $\partial_i N^{Ti} = 0$  и

$$(e^h)_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2} h_{ik} h_{kj} + \frac{1}{6} h_{ik} h_{kl} h_{lj} + \dots , \quad h_{ii} = 0 , \quad \partial_i h_{ij} = 0 . \quad (18)$$

Далее мы будем опускать индекс “0” у  $N_0(t)$  для удобства. Остаточная калибровочная свобода фиксируется путем задания  $Y = 0$  и  $W_i^T = 0$ . Тогда формула (17с) принимает вид:

$$\gamma_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta} (e^h)_{ij}. \quad (19)$$

Ниже мы увидим, что возмущения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $N_i^T$  входят в действие без производных, и динамическими степенями свободы являются только скалярное возмущение  $\zeta$  и поперечный и бесследовый тензор  $h_{ij}$  (тензорное возмущение).

Подставляя  $N = N(t)$ ,  $N^i = 0$ ,  $\gamma_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$  в (10), получим фоновое действие

$$\mathcal{S}^{(0)} = \int dt Na^3(A_2 + 3A_3H + 6A_4H^2). \quad (20)$$

где  $H = \dot{a}/(Na)$  — это параметр Хаббла. Вариация этого действия по  $N$  и по  $a$  приведет к следующим уравнениям движения

$$(NA_2)_N + 3NA_{3N}H + 6N^2(N^{-1}A_4)_N H^2 = 0, \quad (21a)$$

$$A_2 - 6A_4H^2 - \frac{1}{N} \frac{d}{dt} (A_3 + 4A_4H) = 0, \quad (21b)$$

где индекс “ $N$ ” означает производную по  $N$ .

Наша цель — построить несингулярное космологическое решение, описывающее очень раннюю Вселенную в рамках выбранной теории (8). Как мы и оговаривали ранее, будем строить модель генезиса. Для этого рассмотрим теперь конкретный вид функций лагранжиана (10), следуя [88]:

$$A_2 = f^{-2\alpha-2-\delta} a_2(N), \quad (22a)$$

$$A_3 = f^{-2\alpha-1-\delta} a_3(N), \quad (22b)$$

$$B_4 = -A_4 = f^{-2\alpha}, \quad (22c)$$

где  $\alpha$  и  $\delta$  — параметры лагранжиана,  $f(t)$  — некоторая функция времени, которая имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$f \approx -ct, \quad c = \text{const} > 0. \quad (23)$$

Функции  $a_2$  и  $a_3$  из (22) имеют вид:

$$a_2(N) = -\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3N^4}, \quad (24)$$

$$a_3(N) = \frac{1}{4N^3}, \quad (25)$$

Подставляя функции (22), (23) и (25) в уравнения (21), получим решение на ранних временах,  $t \rightarrow -\infty$ :

$$H \approx \frac{\chi}{(-t)^{1+\delta}}, \quad (26)$$

$$a \approx 1 + \frac{\chi}{\delta(-t)^\delta}, \quad N \approx 1, \quad (27)$$

где на параметр  $\delta$  накладывается ограничение

$$\delta > 0, \quad (28)$$

чтобы при  $t \rightarrow -\infty$  получалось плоское пространство, то есть  $a \rightarrow 1$ ;  $\chi$  — комбинация параметров лагранжиана:

$$\chi = \frac{\frac{2}{3} + \frac{c}{4}(2\alpha + 1 + \delta)}{4(2\alpha + 1 + \delta)c^{2+\delta}}. \quad (29)$$

Таким образом, теория с лагранжианом (22), (23), (25) действительно описывает модель генезиса на очень ранних временах  $t \rightarrow -\infty$ . Дальнейшая наша цель — выяснить, насколько законно классическое полевое описание построенной эпохи генезиса.

## 1.2 Квадратичный лагранжиан скалярных и тензорных возмущений

Для анализа устойчивости и применимости классического описания для решения (26)-(29) нам понадобится явный вид квадратичного действия для скалярных и тензорных возмущений. Будем работать в анзаце (17) и рассмотрим квадратичный лагранжиан в случае общей теории Хорндески (7) для скаляр-

ных возмущений [106]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scalar}}^{(2)} &= a^3 \left[ -3\mathcal{G}_T \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} + \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} + \Sigma \alpha^2 - \frac{2}{a^2} \Theta \alpha \beta_{,ii} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{a^2} \mathcal{G}_T \frac{\dot{\zeta}}{N} \beta_{,ii} + 6\Theta \alpha \frac{\dot{\zeta}}{N} - \frac{2}{a^2} \mathcal{G}_T \alpha \zeta_{,ii} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где производная по времени имеет вид  $\dot{\zeta} \equiv \frac{d\zeta}{dt}$ . Явные формулы для коэффициентов в квадратичном действии 30 мы приводим в Приложении А. Варьируя действие с лагранжианом (30) по  $\alpha$  и  $\beta$ , получим следующие уравнения связи

$$\Sigma \alpha - \frac{\Theta}{a^2} \partial^2 \beta + 3\Theta \frac{\dot{\zeta}}{N} - \frac{\mathcal{G}_T}{a^2} \partial^2 \zeta = 0, \quad (31a)$$

$$\Theta \alpha - \mathcal{G}_T \frac{\dot{\zeta}}{N} = 0. \quad (31b)$$

Решения этих уравнений даются выражениями

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}_T}{\Theta} \frac{\dot{\zeta}}{N}, \quad (32a)$$

$$\beta = \frac{1}{a\mathcal{G}_T} \left( a^3 \mathcal{G}_S \psi - \frac{a\mathcal{G}_T^2}{\Theta} \zeta \right). \quad (32b)$$

Подставляя эти связи в (30), мы получаем лагранжиан [24]

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta} = \int N dt d^3x a^3 \left[ \frac{\mathcal{G}_S}{N^2} \dot{\zeta}^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} \right], \quad (33)$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\Theta} \mathcal{G}_T^2 \right) - \mathcal{F}_T \equiv \frac{1}{aN} \frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_T, \quad (34a)$$

$$\mathcal{G}_S = \frac{\Sigma}{\Theta^2} \mathcal{G}_T^2 + 3\mathcal{G}_T, \quad (34b)$$

где мы также ввели обозначение  $\xi \equiv \frac{a}{\Theta} \mathcal{G}_T^2$  для дальнейших целей. Квадрат скорости распространения скалярного возмущения  $\zeta$  определяется как  $c_s^2 \equiv \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S$ .

В Приложении А мы также приводим явные выражения для коэффициентов из действия второго порядка в случае лагранжиана (8) подкласса теории Хорндески, а также формулы для этих коэффициентов в АДМ формализме.

Квадратичное действие для тензорных возмущений  $h_{ij}$  имеет вид [106]

$$\mathcal{S}_{hh} = \int N dt d^3x \frac{a^3}{8} \left[ \frac{\mathcal{G}_T}{N^2} \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} h_{ij,k} h_{ij,k} \right], \quad (35)$$

где коэффициенты  $\mathcal{G}_T$  и  $\mathcal{F}_T$  даны формулами (A.1) из приложения А для полной теории Хорндески (7), и формулами (A.3) для подкласса (8). В АДМ формализме коэффициенты  $\mathcal{G}_T$  и  $\mathcal{F}_T$  могут быть получены по формулам (A.5).

Так, полное квадратичное действие и для скалярных, и для тензорных возмущений имеет вид:

$$\mathcal{S}^{(2)} = \int N dt d^3x a^3 \left[ \frac{\mathcal{G}_S}{N^2} \dot{\zeta}^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} + \frac{\mathcal{G}_T}{8N^2} \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{8a^2} h_{ij,k} h_{ij,k} \right]. \quad (36)$$

### 1.3 Устойчивость и запрещающая теорема

Рассмотрим квадратичное действие (36) с коэффициентами  $\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S, \mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T$  в случае общей теории Хорндески. Для такой теории существует теорема, запрещающая существование устойчивых космологических решений без начальной сингулярности. Теорема строится на условии отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе:

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{aN} \frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_T > 0, \quad (37)$$

которое сводится к тому, что  $\xi(t)$  должна быть монотонно растущей функцией времени:

$$\dot{\xi} > a\mathcal{F}_T > 0, \quad (38)$$

где мы положили  $N = 1$ , согласно (27); мы также считаем, что рассматриваемое космологическое решение несингулярно ( $a > \text{const} > 0$ ), и что в тензорном секторе нет градиентных неустойчивостей, то есть  $\mathcal{F}_T > 0$ . Интегрируя формулу (38), получим

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) > \int_{t_1}^{t_2} a(t) \mathcal{F}_T dt. \quad (39)$$

Интеграл в правой части неравенства (39) зависит от асимптотического поведения  $\mathcal{F}_T$  и при увеличении области интегрирования может быть сходящимся или

расходящимся. Будем сейчас рассматривать такие  $\mathcal{F}_T$ , которые никогда не обращаются в нуль. Предположим, что интеграл в (39) при  $t_{1,2} \rightarrow \pm\infty$  сходящимся не является. Также будем рассматривать несингулярное  $\xi$ , т.е. коэффициент  $\Theta(t)$ , определенный в (A.2b), ни в какой момент времени не пересекает нуля. Теперь предположим, что  $\xi(t_1) < 0$  и перепишем (39) в виде

$$-\xi(t_2) < |\xi(t_1)| - \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathcal{F}_T dt, \quad (40)$$

где интеграл в правой части является растущей функцией  $t_2$ . Таким образом, правая часть неравенства (40) обязательно становится отрицательной при достаточно большом  $t_2$ , а значит  $\xi(t_2) > 0$  и функция  $\xi$  в какой-то момент времени сменила знак. Согласно оговоренному выше выбору  $\xi$  не может пересекать нуля в случае несингулярного космологического сценария ( $a \neq 0$ ). Это в свою очередь означает, что предположение  $\xi(t_1) < 0$  неверно и  $\xi(t) > 0$  в любой момент времени. Тогда получаем из (39)

$$-\xi(t_1) > -\xi(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathcal{F}_T dt, \quad (41)$$

откуда видно, что при  $t_1 \rightarrow -\infty$  правая часть (41) станет положительной, и поэтому  $\xi(t_1) < 0$ , что находится в противоречии с нашим полученным выше предположением о том, что  $\xi(t) > 0$  для любых  $t$ .

Таким образом, в рамках сделанных нами предложений о виде и несингулярном на всех временах поведении функций  $a(t)$ ,  $\Theta$  и  $\mathcal{F}_T$  функция  $\xi(t)$  обязательно пересекает нуль в некоторый момент времени. Казалось бы, это означает, что в случае общей теории Хорндески невозможно построить несингулярные космологические решения, которые бы удовлетворяли условию отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе на протяжении всей эволюции.

Однако, вернемся теперь к обсуждению асимптотического поведения функции  $\mathcal{F}_T$ , оставляя, как и прежде несингулярными  $a(t)$  и  $\Theta(t)$  на всех временах. Рассмотрим (37) на ранних временах, и потребуем, чтобы выполнялось следу-

ющее соотношение [88, 89, 107]

$$\int_{-\infty}^t a(t)[\mathcal{F}_T(t) + \mathcal{F}_S(t)]dt < \infty . \quad (42)$$

Это мгновенно приводит нас к необходимому условию обхода запрещающей теоремы: должно выполняться  $\mathcal{F}_T \rightarrow 0$  и  $\mathcal{F}_S \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Кроме того, в работах [88, 89] показано, что и  $\mathcal{G}_T \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{G}_S \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . То есть коэффициенты в квадратичном действии (36) для скалярных и тензорных возмущений стремятся к нулю в далеком прошлом,  $t \rightarrow -\infty$ . Значит, класс моделей, предложенный в [88, 89, 107] потенциально содержит проблему сильной связи: энергетический масштаб сильной связи может стремиться к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . Отметим, что последнее утверждение можно увидеть и из других соображений: в выбранном нами подклассе теории Хорндески (8) верно, что эффективная масса Планка  $G_4 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , согласно (A.3). Последнее и является простейшим сигналом о возможной проблеме сильной связи в теории.

Для конкретной модели генезиса (26)-(29), полученного в рамках теории с функциями лагранжиана (22)-(25) асимптотики коэффициентов (A.5) из квадратичного действия для тензорных возмущений (35) имеют вид:

$$\mathcal{F}_T \propto (-t)^{-2\alpha}, \quad \mathcal{G}_T \propto (-t)^{-2\alpha}, \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \quad (43)$$

а для скалярных возмущений, согласно (34), (A.6), получаем:

$$\mathcal{F}_S \propto (-t)^{-2\alpha+\delta}, \quad \mathcal{G}_S \propto (-t)^{-2\alpha+\delta}, \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \quad (44)$$

Чтобы удовлетворить условию (42), или, что то же самое  $\mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$  ( $\mathcal{G}_{S,T} \rightarrow 0$ ) при  $t \rightarrow -\infty$ , получаем дополнительное к (28) ограничение на параметры лагранжиана

$$2\alpha > 1 + \delta. \quad (45)$$

Действительно, ввиду условий (28) и (45), интеграл (42) действительно сходится. Но в то же время эффективные массы Планка  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{F}_S$ ,  $\mathcal{G}_S$  (как и функция

лагранжиана  $G_4$ ) обращаются в нуль в асимптотическом прошлом, что является наивным сигналом о наличии сильной связи на этих временах. Этот вопрос детально изучен далее, рассмотрены второй и третий порядки действия по возмущениям и показано, что классическое описание эволюции Вселенной на столь ранних временах возможно при определенных значениях параметров  $\alpha, \delta$ .

## 1.4 Действие третьего порядка для возмущений и анализ проблемы сильной связи

В этом параграфе с помощью наивного размерного анализа мы найдем энергетические масштабы сильной связи на ранних временах. Для этого необходимо знать действие следующих после квадратичного порядков для  $\zeta$  и  $h_{ij}$ . Ниже мы воспользуемся только кубическим действием по возмущениям и рассмотрим скалярный, тензорный и смешанный сектора для анализа проблемы сильной связи. Мы увидим, что полученные энергетические масштабы имеют вид обратной степенной функции времени  $t$ . Чтобы говорить о применимости классического описания эволюции Вселенной на столь ранних временах, мы потребуем, чтобы всевозможные классические масштабы были много меньше характерных масштабов сильной связи, то есть

$$E_{class} \ll E_{strong}. \quad (46)$$

Единственным размерным параметром в нашей задаче, который характеризует классическую эволюцию Вселенной является параметр Хаббла, а связанный с ним масштаб энергий (сравнение с которым дает наиболее сильное условие отсутствия сильной связи<sup>4</sup>)

$$E_{class} \propto \frac{\dot{H}}{H} \propto (-t)^{-1}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (47)$$

---

<sup>4</sup>Другой классический масштаб, который дается  $H(t)$ , будет давать более слабые ограничения (46) (согласно виду решению для параметра Хаббла (26) в нашей модели генезиса).



где мы воспользовались (26). Таким образом, если энергетический масштаб сильной связи  $E_{strong}$  падает с течением времени медленнее, чем  $(-t)^{-1}$  при  $t \rightarrow -\infty$ , то классическое описание модели генезиса законно. Кроме того, мы также предполагаем, что взаимодействия более высоких порядков (чем кубическое) не дадут более низких энергетических масштабов сильной связи. Ниже мы рассмотрим взаимодействия в различных секторах по отдельности.

### 1.4.1 Скалярный сектор

Кубическое действие для скалярных возмущений  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\zeta$  дается в работах [106, 108, 109]. В Приложении А мы приводим вычисление кубического действия для возмущения  $\zeta$  (после подстановки уравнений связи (31) или (32)). Это кубическое действие имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int N dt a^3 d^3x \sum_{i=1}^{17} \mathcal{L}_{\zeta\zeta\zeta}^{(i)} = \int N dt a^3 d^3x \left\{ \Lambda_1 \frac{\dot{\zeta}^3}{N^3} + \Lambda_2 \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} \zeta + \Lambda_3 \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} \partial^2 \zeta \right. \\ + \Lambda_4 \frac{\dot{\zeta}}{N} \zeta \partial^2 \zeta + \Lambda_5 \frac{\dot{\zeta}}{N} (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_6 \zeta (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_7 \frac{\dot{\zeta}}{N} (\partial^2 \zeta)^2 + \Lambda_8 \zeta (\partial^2 \zeta)^2 + \Lambda_9 \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 \\ + \Lambda_{10} \frac{\dot{\zeta}}{N} (\partial_i \partial_j \zeta)^2 + \Lambda_{11} \zeta (\partial_i \partial_j \zeta)^2 + \Lambda_{12} \frac{\dot{\zeta}}{N} \partial_i \zeta \partial_i \psi + \Lambda_{13} \partial^2 \zeta \partial_i \zeta \partial_i \psi + \Lambda_{14} \frac{\dot{\zeta}}{N} (\partial_i \partial_j \psi)^2 \\ \left. + \Lambda_{15} \zeta (\partial_i \partial_j \psi)^2 + \Lambda_{16} \frac{\dot{\zeta}}{N} \partial_i \partial_j \zeta \partial_i \partial_j \psi + \Lambda_{17} \zeta \partial_i \partial_j \zeta \partial_i \partial_j \psi \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ , и

$$\psi = (1/N) \partial^{-2} \dot{\zeta},$$

а коэффициенты  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{17}$  являются функциями времени  $t$ , их явный вид приводится в Приложении А. Показано, что асимптотическое поведение для каждой  $\Lambda_i$  имеет степенной вид при  $t \rightarrow -\infty$ , а именно:

$$\Lambda_i \propto (-t)^{x_i}, \quad (49)$$

где  $x_i$  — определенные комбинации параметров  $\alpha$  и  $\delta$ .

Размерный анализ проблемы сильной связи проводится следующим образом [103, 110–112]. Сперва схематично запишем каждое слагаемое в (48) как

$$\mathcal{L}_{\zeta\zeta\zeta}^{(i)} \propto \Lambda_i \cdot \zeta^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \quad (50)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — это количество временных и пространственных производных, соответственно. Далее, введем канонически нормированное поле  $\pi$  вместо  $\zeta$ . Здесь важную роль играют два следующих факта. Во-первых,  $a(t)$  и  $N(t)$  (27) стремятся к константам при  $t \rightarrow -\infty$  в нашей модели генезиса. Во-вторых, согласно (44), имеем  $\mathcal{F}_S \propto \mathcal{G}_S$ . Тогда квадратичное действие для скалярного возмущения (33) в терминах поля  $\pi$ , записанного как

$$\pi = \sqrt{2\mathcal{G}_S} \zeta \propto (-t)^{-\alpha+\delta/2} \zeta, \quad (51)$$

примет канонический вид. Тот факт, что коэффициент  $\mathcal{G}_S$  стремится к нулю (44) при  $t \rightarrow -\infty$  имеет важное значение для дальнейшего рассуждения. В терминах канонически нормированного поля  $\pi$  можно переписать (50) как

$$\mathcal{L}_{\zeta\zeta\zeta}^{(i)} \propto \hat{\Lambda}_i \cdot \pi^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \quad (52)$$

где

$$\hat{\Lambda}_i = \Lambda_i \mathcal{G}_S^{-3/2} = \Lambda_i (-t)^{-\frac{3}{2}(\delta-2\alpha)} \propto (-t)^{x_i - \frac{3}{2}(\delta-2\alpha)}. \quad (53)$$

Размерность  $\hat{\Lambda}_i$  равна  $1 - a_i - b_i$ . Значит масштаб энергии сильной связи, соответствующий (52), дается выражением

$$E_{strong}^{\zeta\zeta\zeta, (i)} \propto \hat{\Lambda}_i^{-\frac{1}{a_i+b_i-1}} \propto (-t)^{-\frac{x_i+3\alpha-3\delta/2}{a_i+b_i-1}}. \quad (54)$$

Наконец, условие отсутствия сильной связи (46)

$$x_i + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a_i + b_i - 1, \quad \text{для всех } i = \overline{1, 17}. \quad (55)$$

которое мы получили, подставив классический масштаб (47) и масштаб энергии сильной связи (54). Все 17 условий (55) приведены в таблице 1, а наиболее сильное из всех ограничение на параметры  $\alpha$  и  $\delta$ , полученное из нашего размерного

анализа:

$$0 < \delta < \frac{1}{4}, \quad 2 - 3\delta > 2\alpha > 1 + \delta, \quad (56)$$

где мы также привели и условия (28), (45). На этом анализ проблемы сильной связи по действию третьего порядка для скалярного возмущения  $\zeta$  завершен.

Таблица 1: Анализ сильной связи по действию третьего порядка для скалярного возмущения  $\zeta$ . Обозначения столбцов: 1) вид слагаемого из действия третьего порядка для  $\zeta$ ; 2) размерность  $\hat{\Lambda}_i$ ; 3) степень асимптотического поведения  $x_i$ ; 4) количество временных производных  $a_i$ ; 5) количество пространственных производных  $b_i$ ; 6) условие отсутствия сильной связи, полученное из (55).

Слагаемое	$[\hat{\Lambda}_i]$	$x_i$	$a_i$	$b_i$	Условие
$\Lambda_1(\dot{\zeta}/N)^3$	-2	$1 - 2\alpha + 3\delta$	3	0	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_2(\dot{\zeta}/N)^2\zeta$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_3(\dot{\zeta}/N)^2\partial^2\zeta$	-3	$2 - 2\alpha + 3\delta$	2	2	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_4(\dot{\zeta}/N)\zeta\partial^2\zeta$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_5(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\zeta)^2$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_6\zeta(\partial_i\zeta)^2$	-1	$-2\alpha$	0	2	$2\alpha - 3\delta < 2$
$\Lambda_7(\dot{\zeta}/N)(\partial^2\zeta)^2$	-4	$3 - 2\alpha + 3\delta$	1	4	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_8\zeta(\partial^2\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + 2\delta$	0	4	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_9\partial^2\zeta(\partial_i\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + 2\delta$	0	4	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{10}(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\partial_j\zeta)^2$	-4	$3 - 2\alpha + 3\delta$	1	4	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_{11}\zeta(\partial_i\partial_j\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + 2\delta$	0	4	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{12}(\dot{\zeta}/N)\partial_i\zeta\partial^i\psi$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{13}\partial^2\zeta\partial_i\zeta\partial^i\psi$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{14}(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\partial_j\psi)^2$	-2	$1 - 2\alpha + 3\delta$	3	0	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_{15}\zeta(\partial_i\partial_j\psi)^2$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{16}(\dot{\zeta}/N)\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi$	-3	$2 - 2\alpha + 3\delta$	2	2	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_{17}\zeta\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$

### 1.4.2 Смешанный сектор: одно скалярное и два тензорных возмущения

Рассмотрим теперь слагаемые из действия, содержащие два тензорных возмущения  $h_{ij}$  и одно скалярное  $\zeta$  [106]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta hh} = a^3 & \left[ d_1 \zeta \frac{\dot{h}_{ij}^2}{N^2} + \frac{d_2}{a^2} \zeta h_{ij,k} h_{ij,k} + d_3 \psi_{,k} \frac{\dot{h}_{ij}}{N} h_{ij,k} + d_4 \frac{\dot{\zeta}}{N} \frac{\dot{h}_{ij}^2}{N^2} \right. \\ & \left. + \frac{d_5}{a^2} \partial^2 \zeta \frac{\dot{h}_{ij}^2}{N^2} + d_6 \psi_{,ij} \frac{\dot{h}_{ik}}{N} \frac{\dot{h}_{jk}}{N} + \frac{d_7}{a^2} \zeta_{,ij} \frac{\dot{h}_{ik}}{N} \frac{\dot{h}_{jk}}{N} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Явные формулы всех коэффициентов  $d_i$  ( $i = \overline{1,7}$ ) приведены в Приложении А. Для подкласса теории Хорндески (8) часть коэффициентов будет равна нулю, а именно:

$$d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 0 .$$

Для асимптотического поведения коэффициентов  $d_i$  на ранних временах  $t \rightarrow -\infty$  введем обозначение:

$$d_i \propto (-t)^{y_i}, \quad (58)$$

где показатель степени  $y_i$  является комбинацией параметров лагранжиана  $\alpha$  и  $\delta$ . Схематичная структура слагаемых в лагранжиане (57) имеет вид

$$\mathcal{L}_{\zeta hh}^{(i)} \propto d_i \cdot \zeta h^2 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \quad (59)$$

где  $h$  — обозначение для тензорного возмущения  $h_{ij}$ . Снова перепишем слагаемые (59) в терминах канонически нормированного скалярного возмущения  $\pi$  51 и канонически нормированного тензорного возмущения  $q_{ij}$ , которое в силу того, что  $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T$  (А.3) в теории (8), может быть записано как

$$q_{ij} = \sqrt{2\mathcal{G}_T} h_{ij} \propto (-t)^{-\alpha} h_{ij}, \quad (60)$$

и тогда квадратичное действие (35) для тензорного возмущения в терминах  $q_{ij}$  принимает канонический вид. Наконец, перепишем через канонические переменные  $\pi$  и  $q$  (здесь  $q$  обозначает  $q_{ij}$ ) схематически записанные слагаемые

(59):

$$\mathcal{L}_{\zeta hh}^{(i)} \propto \hat{d}_i \cdot \pi \cdot q^2 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \quad (61)$$

где

$$\hat{d}_i \propto d_i \mathcal{G}_S^{-1/2} \mathcal{G}_T^{-1} \propto (-t)^{y_i - (\frac{\delta}{2} - 3\alpha)}. \quad (62)$$

Значит, характерный масштаб энергии сильной связи в данном случае имеет вид

$$E_{strong}^{\zeta hh, (i)} \propto \hat{d}_i^{-\frac{1}{a_i + b_i - 1}} \propto (-t)^{-\frac{y_i - (\frac{\delta}{2} - 3\alpha)}{a_i + b_i - 1}}, \quad (63)$$

а условие  $E_{class} \ll E_{strong}^{\zeta hh, (i)}$  (где классический масштаб пропорционален  $(-t)^{-1}$ , см. (47)) приводит к следующим ограничениям на параметры:

$$y_i + 3\alpha - \frac{\delta}{2} < a_i + b_i - 1. \quad (64)$$

Соответствующие неравенства (64) для каждого из слагаемых лагранжиана (57) приведены в таблице 2. Мы видим, что в целом ограничения (64) слабее, чем ограничения из скалярного сектора (56).

### 1.4.3 Смешанный сектор: одно тензорное и два скалярных возмущения

В случае одного тензорного возмущения и двух скалярных лагранжиан третьего порядка записывается как [106]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta \zeta h} = & a^3 \left[ \frac{c_1}{a^2} h_{ij} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + \frac{c_2}{a^2} \frac{\dot{h}_{ij}}{N} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + c_3 \frac{\dot{h}_{ij}}{N} \zeta_{,i} \psi_{,j} \right. \\ & \left. + \frac{c_4}{a^2} \partial^2 h_{ij} \zeta_{,i} \psi_{,j} + \frac{c_5}{a^4} \partial^2 h_{ij} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + c_6 \partial^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Явные выражения для коэффициентов  $c_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) приведены в Приложении А. Для теории с лагранжианом (8) часть коэффициентов в данном секторе тоже равна нулю, а именно

$$c_4 = c_5 = 0,$$

а асимптотика на ранних временах так же как и в прошлых случаях имеет степенной вид  $c_i \propto (-t)^{z_i}$ , где  $z_i$  — некоторые комбинации из параметров  $\alpha$  и

Таблица 2: Ограничения на параметры лагранжиана  $\alpha$  и  $\delta$  из размерного анализа проблемы сильной связи по действию третьего порядка для возмущений  $\zeta$  и  $h_{ij}$  (смешанный сектор). Обозначения столбцов точно такое же, как и в таблице 1.

Слагаемое	$[\hat{d}_i]$	$[\hat{c}_i]$ для $\mathcal{L}_{\zeta\zeta h}$	$y_i(z_i$ для $\mathcal{L}_{\zeta\zeta h}$ )	$a_i$	$b_i$	Условие
Два тензора и один скаляр						
$d_1\zeta(\dot{h}_{ij}/N)^2$	-1		$-2\alpha + \delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$d_2\zeta h_{ij,k}h_{ij,k}$	-1		$-2\alpha + \delta$	0	2	$2\alpha + \delta < 2$
$d_3\psi_{,k}(\dot{h}_{ij}/N)h_{ij,k}$	-1		$-2\alpha + \delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
Два скаляра и один тензор						
$c_1h_{ij}\zeta_{,i}\zeta_{,j}$	-1		$-2\alpha + \delta$	0	2	$\alpha < 1$
$c_2(\dot{h}_{ij}/N)\zeta_{,i}\zeta_{,j}$	-2		$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$\alpha + \delta < 1$
$c_3(\dot{h}_{ij}/N)\zeta_{,i}\psi_{,j}$	-1		$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$\alpha + \delta < 1$
$c_6\partial^2 h_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j}$	-1		$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$\alpha + \delta < 1$

$\delta$ . Слагаемые в лагранжиане (65) можно записать как  $\mathcal{L}_{\zeta\zeta h}^{(i)} \propto c_i \cdot \zeta^2 \cdot h \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}$ . Вновь записывая все через канонически нормированные поля (51) и (60), получим  $\mathcal{L}_{\zeta\zeta h}^{(i)} \propto \hat{c}_i \cdot \pi^2 \cdot q \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}$ , где

$$\hat{c}_i \propto c_i \mathcal{G}_S^{-1} \mathcal{G}_T^{-1/2} \propto (-t)^{z_i - (\delta - 3\alpha)}. \quad (66)$$

Наконец, в этом секторе условие применимости классического описания (46) эквивалентно

$$z_i + 3\alpha - \delta < a_i + b_i - 1. \quad (67)$$

В таблице 2 приведены условия от каждого слагаемого в (65). Данный сектор вновь дает более слабые ограничения на параметры  $\alpha$  и  $\delta$ , чем чисто скалярный.

#### 1.4.4 Тензорный сектор

Лагранжиан взаимодействия трех тензорных возмущений был получен в [113]:

$$\mathcal{L}_{hhh} = a^3 \left[ \frac{\mu}{12N^3} \dot{h}_{ij} \dot{h}_{jk} \dot{h}_{ki} + \frac{\mathcal{F}_T}{4a^2} \left( h_{ik} h_{jl} - \frac{1}{2} h_{ij} h_{kl} \right) h_{ij,kl} \right], \quad (68)$$

где  $\mu = \dot{\phi} X G_{5X}$  и для теории (8) оно равно нулю. В терминах канонически нормированного поля  $q_{ij}$  (60) лагранжиан (68) схематически можно записать как

$$\mathcal{L}_{hhh} \propto \mathcal{F}_T \cdot (2\mathcal{G}_T)^{-3/2} \cdot q^3 \cdot (\partial_t)^{a_T} \cdot (\partial)^{b_T}, \quad (69)$$

В случае взаимодействия трех тензоров масштаб энергии сильной связи, полученный из размерного анализа, имеет вид:

$$E_{strong}^{hhh} \propto (\mathcal{F}_T \cdot (2\mathcal{G}_T)^{-3/2})^{-\frac{1}{a_T+b_T-1}} \propto (-t)^{-\frac{\alpha}{a_T+b_T-1}}, \quad (70)$$

где количество временных и пространственных производных согласно (68) равно  $a_T = 0$  и  $b_T = 2$ , соответственно. Следовательно, условие  $E_{class} \ll E_{strong}^{hhh}$  даст ограничение вида:

$$\alpha < 1. \quad (71)$$

Это ограничение можно было бы получить непосредственно путем анализа последнего слагаемого<sup>5</sup> в исходном лагранжиане (8): функция  $G_4$  является эффективной массой Планка в квадрате в данном случае. Поэтому наивный масштаб энергии сильной связи равен  $G_4^{1/2} \propto \mathcal{G}_T^{1/2} \propto (-t)^{-\alpha}$ . Сравнивая этот масштаб с классическим  $\propto (-t)^{-1}$ , мы мгновенно приходим к (71).

Все полученные результаты пунктов 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 и 1.4.4 для ограничений на параметры лагранжиана графически приведены на Рис. 1. Выделенная черным контуром область на этом рисунке обозначает пересечение всех ограничений (56), (64), (67) и (71). Для параметров  $\alpha$  и  $\delta$  из этой выделенной области масштаб энергии сильной связи на ранних временах выше классического. Как обсуждалось в конце пункта 1.4.1, реальная область параметров, при которых

<sup>5</sup>Другие слагаемые в (8) не содержат в себе взаимодействия трех тензорных возмущений  $h_{ij}$ .



классическое описание модели генезиса законно, может быть больше, чем полученная нами. На этом размерный анализ проблемы сильной связи для модели генезиса в рамках теории (8) завершен. При определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\delta$  классическое описание построенной модели генезиса с фоновым решением (26), (27) законно, теория устойчива.

В следующей главе будут построены и другие модели ранней Вселенной — сжатие и генезис — для которых также можно обойти запрещающую теорему, то есть получить устойчивые решения; будет показано, что и сильная связь на ранних временах для этих сценариев отсутствует. Кроме того, будет показано, что ранние эпохи сжатия и генезиса можно сшить с последующими стадиями: отскоком, инфляцией и дальнейшим расширением за счет уже стандартной ОТО и эволюции безмассового скалярного поля.

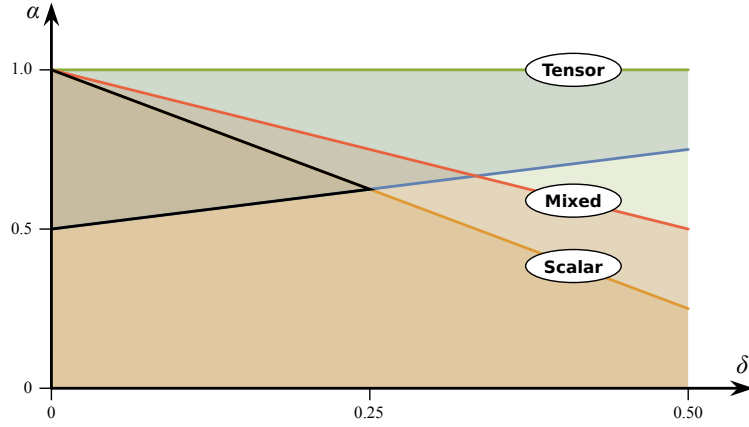


Рис. 1: Пространство параметров  $\alpha$  и  $\delta$ , характеризует лагранжиан с функциями (22). Область над синей линией соответствует условиям на параметры (28) и (45), для которых на очень ранних временах  $t \rightarrow -\infty$  фоновое решение дает плоское пространство-время Минковского, а также при таких параметрах можно обойти запрещающую теорему из работы [88]. Область под зеленой линией ( $\alpha < 1$ , обозначение “Tensor”) это те значения параметров лагранжиана, для которых отсутствует сильная связь в чисто тензорном секторе возмущений. Аналогично, области под красной ( $\alpha < 1 - \delta$ , обозначение “Mixed”) и под оранжевой ( $2\alpha < 2 - 3\delta$ , обозначение “Scalar”) линиями дают значения параметров, при которых сильная связь отсутствует в смешанном и чисто скалярном секторах, соответственно. Область, выделенная черным контуром содержит такие значения параметров  $\alpha$  и  $\delta$ , для которых сильная связь отсутствует во всех секторах, и, кроме того, теория устойчива на всех временах.

## 2 Несингулярные космологические модели ранней Вселенной с сильной связью в прошлом

Несингулярные космологические решения, такие как Вселенная с отскоком и генезис, являются на сегодняшний день основными альтернативами или дополнениями инфляционной модели. Данная глава посвящена построению таких моделей, приводятся конкретные численные примеры. Показано, что все построенные модели устойчивы на всех временах эволюции, возмущения распространяются со скоростями ниже, чем скорость света, а также в полученных сценариях отсутствует проблема сильной связи на ранних временах. Анализ начинается с выбора функций лагранжиана (10)  $A_2(t, N)$ ,  $A_3(t, N)$ ,  $A_4(t, N)$  и  $B_4(t, N)$  в АДМ формализме, которые бы позволили построить интересные нас космологические решения, описывающие раннюю Вселенную, *а также и последующие этапы эволюции*, такие как инфляция и стадия, на которой расширение определяется стандартной ОТО и эволюцией безмассового скалярного поля. Сперва, в параграфе 2.1, мы обсуждаем построение таких сценариев, которые начинаются с эпохи сжатия, затем происходит отскок (параметр Хаббла меняет знак) с последующим расширением, а далее — переход на инфляцию и первичный разогрев. Кроме того, в параграфе 2.2, будет построена и такая модель, где после отскока сразу наступает эпоха с безмассовым скалярным полем.

После этого мы также рассмотрим модели ранней Вселенной, эволюция которых начинается не с эпохи сжатия, а с плоского пространства-времени Минковского: стандартный генезис (параграф 2.3) и модифицированный генезис с последующим сжатием и отскоком (параграф 2.4).

## 2.1 Сжатие и отскок с последующей инфляцией

Итак, для построения эволюции ранней Вселенной, которая начинается с эпохи сжатия, будем работать в следующем анзаце для функций лагранжиана (10):

$$A_2 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-2} \cdot a_2(t, N), \quad (72a)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-1} \cdot a_3(t, N), \quad (72b)$$

$$A_4 = -B_4 = -\frac{1}{2} f^{-2\mu}, \quad (72c)$$

где  $\mu > 0$  — не зависящий от времени параметр, который может принимать разные значения для разных космологических моделей, <sup>6</sup>  $f = f(t)$  — это положительная функция времени. Функции  $a_2$ ,  $a_3$  имеют вид

$$a_2(t, N) = \left( \frac{x(t)}{N^2} + \frac{v(t)}{N^4} \right), \quad (73a)$$

$$a_3(t, N) = \frac{y(t)}{N^3}. \quad (73b)$$

Таким образом, введенный выше анзац включает в себя модель из [88, 111]. Этот же анзац также включает в себя четыре новые произвольные функции времени  $f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$ . Построение различных космологических моделей сводится к выбору конкретного вида этих функций (вместе с выбором параметра  $\mu$ ).

В новом анзаце (72) фоновые уравнения движения (21) имеют вид

$$\left( -\frac{x(t)}{N^2} - \frac{3v(t)}{N^4} \right) - \frac{9y(t) \cdot f \cdot H}{N^3} + 6f^2 \cdot H^2 = 0, \quad (74a)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x(t)}{N^2} + \frac{v(t)}{N^4} \right) + 6f^2 \cdot H^2 + \frac{(2\mu + 1) \cdot \dot{f}}{N} \left( \frac{y(t)}{N^3} - 4f \cdot H \right) \\ & - \frac{f}{N} \frac{d}{dt} \left( \frac{y(t)}{N^3} - 4f \cdot H \right) = 0, \end{aligned} \quad (74b)$$

а коэффициенты из квадратичного действия для скалярных возмущений (30) или (33) (после подстановки уравнений связи (32)), и для тензорных возмущений

---

<sup>6</sup>Отметим, что в прошлой главе аналогом параметра  $\mu$  был параметр  $\alpha$ , который был введен в работе [88] и использовался в [111].

(35) записываются следующим образом

$$\Theta = f^{-2\mu-1} \left( f \cdot H - \frac{3y(t)}{4N^3} \right),$$

$$\Sigma = \frac{f^{-2\mu-2}}{2N^4} \cdot \left( 6v(t) + 18y(t) \cdot f \cdot H \cdot N + x(t) \cdot N^2 - 6f^2 \cdot H^2 \cdot N^4 \right),$$

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T = f^{-2\mu}, \quad (75a)$$

$$\mathcal{F}_S = f^{-2\mu} \cdot \left( \frac{f \cdot H}{f \cdot H - \frac{3y}{4N^3}} - 1 \right) + \frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left( \frac{f^{-2\mu+1}}{f \cdot H - \frac{3y}{4N^3}} \right), \quad (75b)$$

$$\mathcal{G}_S = f^{-2\mu} \left( \frac{6v + 18y \cdot f \cdot H \cdot N + x \cdot N^2 - 6f^2 \cdot H^2 \cdot N^4}{2N^4 \cdot \left( f \cdot H - \frac{3y}{4N^3} \right)^2} + 3 \right). \quad (75c)$$

Далее мы всегда будем выбирать функции  $f(t), \dots, y(t)$  так, чтобы они приводили к выполнению неравенств  $\mathcal{G}_T, \mathcal{F}_T, \mathcal{G}_S, \mathcal{F}_S > 0$  вместе с  $c_{S,T}^2 \leq 1$  для любого момента времени  $t$ , то есть чтобы модель была устойчива на всех временах, а соответствующие возмущения распространялись со скоростями, не превышающими скорость света.

Итак, приступим теперь к построению устойчивой космологической модели с отскоком, которая состоит из следующих этапов:

- эпоха *сжатия*, на которой масштабный фактор зависит от времени степенным образом;
- *отскок*;
- *инфляция*, на протяжении которой параметр Хаббла остается постоянным по времени;
- эпоха *с безмассовым скалярным полем*, на которой скалярное поле  $\phi$  из (8) становится безмассовым скалярным полем с кинетическим членом стандартного вида, а гравитация описывается ОТО (в англоязычной литературе эта эпоха называется “kination”).

Отметим еще раз, что в отличие от стадий сжатия и отскока, гравитация на стадиях инфляции и стадии с безмассовым скалярным полем описывается обычной ОТО, а расширение обуславливается эволюцией действительного безмассового скалярного поля.

Итак, мы задали конкретный анзац для функции лагранжиана в виде (72) и (73). Для каждой из эпох — сжатие, отскок, инфляция и стадия с безмассовым скалярным полем — по отдельности мы подберем вид функций  $f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$ , а затем гладкими и непрерывными функциями, построение и явный вид которых также обсуждается в последующих пунктах, свяжем эти стадии в единую эволюцию. Между сжатием и инфляцией должен произойти отскок, параметр Хаббла изменит знак. Этот нетривиальный переход налагает на функции  $f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$  определенные условия. Кроме того, в каждый момент времени модель должна быть устойчива, возмущения должны распространяться со скоростями, не превышающими скорость света. На конкретном численном примере мы продемонстрируем, что все необходимые условия, перечисленные выше выполняются, и каждая из стадий реализуется.

### *Сжатие*

На очень ранних временах в нашей модели Вселенная сжимается. Потребуем, чтобы решение для параметра Хаббла  $H$  и функции хода  $N$  имело следующий вид:

$$H = -\frac{\chi}{(-t)}, \quad N = 1, \quad \chi > 0, \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \quad (76)$$

где мы задали  $N$ , используя однозначность перехода от ковариантного к АДМ формализму, которая обсуждалась в параграфе 1.1 после формулы (16). Это также эквивалентно тому, что на вид функции  $A_2, \dots, A_4$  (или, другими словами, на  $f(t), \dots, y(t)$ ) можно наложить дополнительные ограничения. Мы обсудим ограничения такого типа позже, см. (79).

Решение вида (76) можно получить, если выбрать  $f(t), \dots, y(t)$  как

$$f = -ct, \quad c > 0, \quad (77a)$$

$$x(t) = x_0, \quad v(t) = v_0, \quad y(t) = y_0, \quad (77b)$$

где  $c, x_0, v_0$  и  $y_0$  — некоторые константы.

Существует несколько “источников” ограничений на эти параметры  $c, x_0, v_0, y_0$ :

(i) Во-первых, убедимся, что фоновые уравнения (74) действительно выполняются для анзаца (76). Подставляя этот анзац вместе с (77) в (74), получаем следующие алгебраические уравнения

$$x_0 + 3v_0 - 9y_0 \cdot c \cdot \chi - 6c^2 \cdot \chi^2 = 0, \quad (78a)$$

$$x_0 + v_0 + 6c^2 \cdot \chi^2 - (2\mu + 1)(y_0 + 4\chi c)c = 0. \quad (78b)$$

Эти уравнения определяют параметр  $\chi$ , а также определенным образом связывают между собой параметры  $c, x_0, v_0$  и  $y_0$  (именно такого типа ограничения или связи и следуют из задания  $N = 1$ ). Уравнения (78) дают два корня для  $\chi$  и, например, для  $v_0$ . Корень, который совместим с условиями устойчивости  $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S > 0$  и с условием того, что распространение возмущений происходит со скоростями, не превышающими скорость света  $c_{T,S} \leq 1$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} v_0 = & \frac{1}{192} \left[ 48c^2 \cdot (2\mu + 1)^2 - 96x_0 + 120c \cdot y_0 \cdot (2\mu + 1) - 81y_0^2 \right. \\ & \left. - (4c \cdot (2\mu + 1) + 9y_0) \cdot \sqrt{3} \right. \\ & \left. \times \sqrt{48c^2 \cdot (2\mu + 1)^2 - 64x_0 + 27y_0^2 + 24c \cdot y_0 \cdot (2\mu + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Тогда параметр  $\chi$  определяется как

$$\chi = \frac{2x_0 + 4v_0 - y_0 \cdot c \cdot (2\mu + 1)}{9y_0 \cdot c + 4c^2 \cdot (2\mu + 1)}. \quad (80)$$

Итак, было показано, что  $v_0$  не является произвольным параметром, а вполне определенным образом (79) связан с остальными параметрами  $c, x_0, y_0, \mu$ . Такая

связь появилась из-за того, что на ранних временах мы потребовали  $N = 1$ . Кроме того, выражение (79) должно быть вещественным (то есть выражение под корнем должно быть положительным); а также параметр  $\chi$ , определяемый формулой (80), должен быть положительным,

$$\chi > 0,$$

так как при  $t \rightarrow -\infty$  параметр Хаббла, заданный как (76), должен быть отрицательным.

(ii) Следующие ограничения вытекают из условий отсутствия градиентных неустойчивостей для скалярного и тензорного возмущений, или иными словами, из условий устойчивости  $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S > 0$ . Здесь же мы рассмотрим и ограничения на параметры  $c, x_0, v_0$  и  $y_0$  от условий  $c_{T,S} \leq 1$ . Используя явные формулы для всех коэффициентов  $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S$  (75), получаем:

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T = (-c \cdot t)^{-2\mu}, \quad (81a)$$

$$\mathcal{F}_S = (-c \cdot t)^{-2\mu} \cdot \frac{4c \cdot (1 - 2\mu) - 3y_0}{4c \cdot \chi + 3y_0}, \quad (81b)$$

$$\mathcal{G}_S = (-c \cdot t)^{-2\mu} \cdot \frac{48c^2 \cdot \chi \cdot (2\mu + 1) - 16x_0 + 12c \cdot y_0 \cdot (2\mu + 3\chi + 1) + 27y_0^2}{(4c \cdot \chi + 3y_0)^2}, \quad (81c)$$

$$c_S^2 = \frac{(4c \cdot \chi + 3y_0) \cdot (4c \cdot (1 - 2\mu) - 3y_0)}{48c^2 \cdot \chi \cdot (2\mu + 1) - 16x_0 + 12c \cdot y_0 \cdot (2\mu + 3\chi + 1) + 27y_0^2}. \quad (81d)$$

Видно, что  $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T > 0$  удовлетворяются автоматически; также  $c_T \equiv 1$  в нашем анзаце; в то же время ограничения  $\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S > 0, c_S^2 \leq 1$  нетривиальны (но не зависят от времени).

(iii) Еще одно ограничение на параметры возникает при обходе запрещающей теоремы из работ [87, 88]. Необходимым условием для получения устойчивого решения с отскоком в теории Хорндески и, далее, с не модифицированной



гравитацией на более поздних временах ( $t \rightarrow +\infty$ ), является (42) из работы [88]. Этот интеграл должен быть сходящимся на нижнем пределе интегрирования. При больших отрицательных временах в нашей модели происходит сжатие и масштабный фактор (согласно (76)), а также коэффициенты из действия второго порядка по возмущениям имеют вид

$$a \propto (-t)^\chi,$$

$$\mathcal{F}_T, \mathcal{F}_S \propto (-t)^{-2\mu},$$

поэтому интеграл (42) сходится при

$$\chi < 2\mu - 1. \quad (82)$$

(iv) Коэффициенты  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{F}_S$ ,  $\mathcal{G}_T$  и  $\mathcal{G}_S$  (эффективные планковские массы в квадрате) стремятся к нулю при  $t \rightarrow -\infty$  (смотреть прошлый пункт и формулы (81)). Это является наивным сигналом о том, что на ранних временах теория находится в режиме сильной связи. Условием того, что классическое полевоое описание модели законно на ранних временах, является

$$\mu < 1. \quad (83)$$

Мы детально обсуждаем анализ проблемы сильной связи<sup>7</sup> для выбранных в этом параграфе функций лагранжиана (72) в Приложении В. Заметим, что полученное ограничение (83) вместе с (82) дает

$$\chi < 1, \quad (84)$$

что означает, что скорость сжатия  $|\dot{a}|$  увеличивается с течением времени.

---

<sup>7</sup>Анализ проблемы сильной связи в данном случае немного отличается от того, что был нами проделан в главе 1 для модели генезиса, где масштабный фактор стремится к единице при  $t \rightarrow -\infty$ . Масштабный фактор на эпохе сжатия нетривиально зависит от времени и это необходимо учитывать в размерном анализе сильной связи.

(v) Наконец, существует еще одно ограничение на параметры теории, связанное с феноменом Белинского–Халатникова–Лифшица (далее — феномен БХЛ) [114–116]. В рамках нашей модели поведение тензорных (и скалярных) мод за горизонтом в сжимающейся Вселенной следующее<sup>8</sup>: для феномена БХЛ одно из двух решений для моды с заданным конформным импульсом за горизонтом растет с ростом  $t$  и расходится в пределе  $t \rightarrow 0$  (в то время как второе решение остается постоянным). Значит, Вселенная становится сильно анизотропной и неоднородной на более поздних временах (см. обсуждение в работе [117]). Чтобы обойти проблему феномена БХЛ, необходимо убедиться в том, что зависящее от времени решение за горизонтом падает (а не растет) при  $t \rightarrow 0$ . В рамках выбранной нами теории уравнение движения для тензорного возмущения  $h_{ij}$  за горизонтом получается варьированием соответствующего действия (35)

$$\frac{1}{a^3 \mathcal{G}_T} \frac{d}{dt} \left( a^3 \mathcal{G}_T \dot{h}_{ij} \right) = 0, \quad (85)$$

где мы пренебрегли слагаемыми с пространственными производными. Одно из решений — константа, в то время как второе имеет вид

$$h_{ij} \propto \int dt \frac{1}{a^3 \mathcal{G}_T} \propto (-t)^{2\mu-3\chi+1}. \quad (86)$$

Оно затухает при  $t \rightarrow 0$ , если выполняется условие

$$2\mu + 1 > 3\chi.$$

Это же условие гарантирует и то, что проблема феномена БХЛ отсутствует для скалярных возмущений. Отметим также, что учитывая  $\mu < 1$  из пункта (iv), полученное условие  $2\mu + 1 > 3\chi$  слабее, чем (82).

---

<sup>8</sup> Действие (35) для тензорных возмущений (с  $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T$ ) точно такое же, как и действие для тензорных мод в ОТО для фоновой метрики с  $a_{eff} = a \mathcal{G}_T^{1/2}$ ,  $N_{eff} = \mathcal{G}_T^{1/2}$ . Произведение  $|a_{eff} H_{eff} = \dot{a}_{eff} / N_{eff}|$  ведет себя как  $(-t)^{\chi-1}$ , то есть с учетом (84) стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$  и растет по мере того, как Вселенная сжимается. Таким образом, мода с достаточно малым конформным импульсом  $k$  находится под горизонтом в ранние времена,  $k/a_{eff} \gg H_{eff}$ , а на более поздних временах оказывается за горизонтом. Заметим, что согласно (82) и (83), Вселенная с эффективным масштабным фактором  $a_{eff} \propto (-t)^{\chi-\mu}$  расширяется, а не сжимается. Такими же свойствами обладают и скалярные возмущения.

Таким образом, параметр лагранжиана  $\mu$  и параметр решения  $\chi$  из (76) могут принимать следующие значения (объединяя полученные выше условия из (i), (iii) и (iv) пунктов):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \mu < 1 \\ 0 < \chi < 2\mu - 1 . \end{aligned}$$

Чтобы найти область допустимых значений параметров  $c, x_0, y_0, v_0$ , обсудим еще одно интересное свойство функций лагранжиана  $A_{2,3,4}, B_4$  и уравнений движения (21). Совершая следующее переопределение функций

$$A_2(t, N) \rightarrow \lambda^2 A_2(\lambda t, N) , \quad A_3(t, N) \rightarrow \lambda A_3(\lambda t, N) , \quad B_4(t, N) \rightarrow B_4(\lambda t, N) , \quad (87)$$

где  $\lambda$  — некоторая константа и также  $A_4(t, N) \rightarrow A_4(\lambda t, N)$ , нетрудно убедиться, что решения уравнений (21) переопределяются как

$$H(t) \rightarrow \lambda H(\lambda t) , \quad N(t) \rightarrow N(\lambda t) . \quad (88)$$

Кроме того, для коэффициентов действия второго порядка для возмущений  $\zeta$  и  $h_{ij}$ , используя (33), (34), (35), (A.5), можно получить

$$\mathcal{G}_T(t) \rightarrow \mathcal{G}_T(\lambda t) , \quad \dots , \quad \mathcal{F}_S(t) \rightarrow \mathcal{F}_S(\lambda t) . \quad (89)$$

Таким образом, даже после переопределения (87), условие отсутствия градиентных неустойчивостей, налагаемое на функции  $\mathcal{G}_T \dots$ , останется неизменным. Кроме того, согласно (87), (88) и (89), временной масштаб эволюции  $t$  может быть выбран произвольно (то есть оно может быть отмасштабировано константой  $\lambda$ ), но так, чтобы на стадиях, описываемых стандартным ОТО, этот выбранный произвольным образом временной масштаб был больше, чем планковское время  $t_{Pl}$ .

Наконец, в соответствии с (87), (88) и (89), и фоновые уравнения, и условия устойчивости модели вместе с  $c_{S,T}^2 \leq 1$ , инвариантны относительно переопределения  $c \rightarrow \lambda c, x_0 \rightarrow \lambda^2 x_0, v_0 \rightarrow \lambda^2 v_0, y_0 \rightarrow \lambda y_0$ , что видно из (79), (80) и (81).

Параметр  $v_0$  выражается через остальные параметры лагранжиана, см. (79). Таким образом, достаточно определить область допустимых значений параметров  $x_0, y_0$  для заданных значений  $\mu$  и  $c$ . Если положить массу Планка равной единице, то параметр  $c$ , грубо говоря, будет служить обратным характерным временным масштабом в планковских единицах. Поэтому параметр  $c$  должен быть достаточно мал.<sup>9</sup> Итак, пусть  $c = 4 \cdot 10^{-3}$ . Тогда области допустимых значений для  $x_0$  и  $y_0$  при нескольких выбранных значениях  $\mu$  показаны на Рис. 2. Оказывается, что для всех значений  $\mu$  из интервала  $1/2 < \mu < 1$  существует некоторая область допустимых значений  $x_0$  и  $y_0$ . Это также показано на Рис. 2.

Отметим, что асимптотики функций  $v(t)$  и  $x(t)$  могут быть выбраны таким образом, что

$$v_0 > 0, \quad x_0 < 0. \quad (90)$$

Это можно увидеть из Рис. 2. Такой выбор подходит для всех допустимых значений  $\mu$ . Ниже мы будем придерживаться такого выбора (90).

### *Инфляция после отскока*

Следующий шаг — это описание инфляционной стадии. Помимо этого, мы обсудим и нетривиальный переход от сжатия к инфляции — отскок. Модели инфляции в теории Хорндески были рассмотрены, например, в работах [18, 24, 75, 77, 118, 119]; мы же будем рассматривать модель, аналогичную модели из [88]. Итак, экспоненциальное расширение в нашей модели происходит, когда функции в лагранжиане принимают некоторые постоянные значения, например:

$$f = 1, \quad (91a)$$

$$x = x_1, \quad v = v_1, \quad y = y_1, \quad (91b)$$

---

<sup>9</sup>Параметр  $c$  можно было бы выбрать как  $c = 1$  и проделать все вычисления с таким  $c$ . Однако, в какой-то момент нужно будет воспользоваться свойствами (87), (88), и (89), для того, чтобы получить характерное время, которое было бы намного больше, чем  $t_{Pl}$ . Мы же выбираем более интуитивный подход и сразу полагаем, что параметр  $c$  достаточно мал.

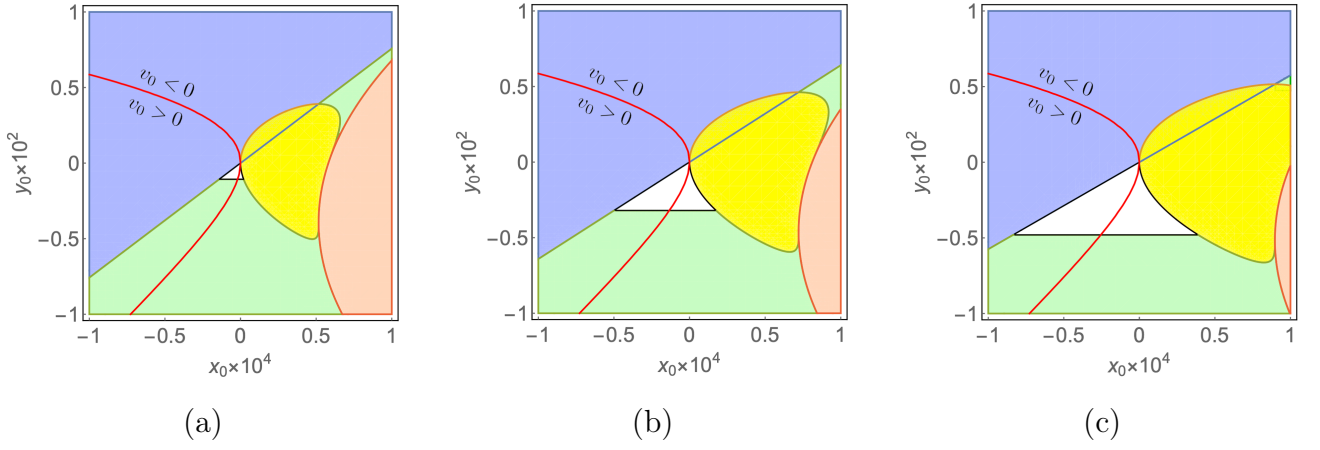


Рис. 2: Область параметров  $x_0$  и  $y_0$ , определяющих асимптотическое поведение (77) функций лагранжиана (72) при  $t \rightarrow -\infty$ . Цветами обозначены запрещенные условиями  $\chi > 0$  (синяя область),  $\mathcal{G}_S > 0$  (желтая область),  $\mathcal{F}_S > 0$  (зеленая область) и условием на корень  $v_0$  (положительность выражения под квадратным корнем в  $v_0$ ; красная область) области параметров. Существует также и ограничение от условия  $c_S \leq 1$ , но для выбранного масштаба на данных изображениях эту область видно не будет; на Рис. 3 мы показываем эту область отдельно. Все оставшиеся условия из этого раздела слабее и мы не приводим их на данных графиках. Красная сплошная линия соответствует  $v_0 = 0$ . Область справа от этой линии соответствует  $v_0 < 0$ , а слева  $v_0 > 0$ . Белая, выделенная черным контуром область дает область допустимых (удовлетворяющих всем условиям из данного раздела) значений  $x_0$  и  $y_0$ . Мы полагаем  $\mu = 0.6$  на левом изображении (Рис. 2а),  $\mu = 0.8$  — на центральном (Рис. 2б) и  $\mu = 0.95$  на правом изображении (Рис. 2с);  $c = 4 \cdot 10^{-3}$  на каждом из рисунков.

где (91а) выбрано так, чтобы восстановить стандартную ОТО уже на стадии инфляции (напомним, что в нашей модели  $G_4 = -A_4 = f/2$ ). В анзаце (91), уравнения движения (74) выглядят как

$$\left( -\frac{x_1}{N^2} - \frac{3v_1}{N^4} \right) - \frac{9y_1 \cdot H}{N^3} + 6H^2 = 0, \quad (92a)$$

$$\left( \frac{x_1}{N^2} + \frac{v_1}{N^4} \right) + 6H^2 = 0. \quad (92b)$$

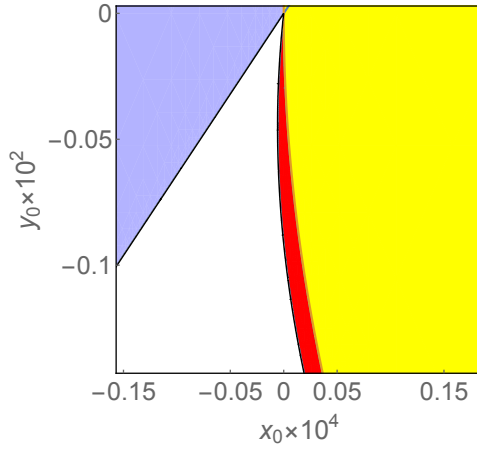


Рис. 3: Область параметров  $x_0$  и  $y_0$  (тех же, что и на Рис. 2b), другого масштаб (см. значения  $x_0$  и  $y_0$ , отложенные по осям). Условие  $c_S \leq 1$  теперь различимо. Голубой и желтый регионы снова обозначают запрещенные условиями  $\chi > 0$  и  $\mathcal{G}_S > 0$  области параметров, соответственно. Красный регион — запрещенная условием  $c_S \leq 1$  область параметров  $x_0$  и  $y_0$ : допустимая область значений (белый цвет) дополнительно “сужается” за счет ограничения  $c_S \leq 1$ . Ограничение от условия  $\mathcal{F}_S > 0$  на данном рисунке не показано.

Обозначим не зависящее от времени решение этих уравнений как  $H = H_1$  и  $N = N_1$ . Потребуем  $H_1 > 0$ ,  $N_1 > 0$ .

Нам удобно будет рассматривать  $H_1$ ,  $N_1$  и  $y_1$  как независимые параметры и выразить  $x_1$  и  $v_1$  через них, используя (92), как:

$$x_1 = -\frac{3(8H_1^2 \cdot N_1^3 - 3H_1 \cdot y_1)}{2N_1}, \quad (93a)$$

$$v_1 = \frac{3}{2}(4H_1^2 \cdot N_1^4 - 3H_1 \cdot N_1 \cdot y_1). \quad (93b)$$

Обратимся теперь к требованиям устойчивости и распространения возмущений со скоростями, не превышающими скорость света. Используя (75) и (93), получаем

$$\frac{3y_1}{4H_1 \cdot N_1^3 - 3y_1} > 0,$$

$$64H_1^2 \cdot N_1^6 - 36y_1 \cdot H_1 \cdot N_1^3 + 9y_1^2 > 0,$$

$$\frac{y_1 \cdot (4H_1 \cdot N_1^3 - 3y_1)}{64H_1^2 \cdot N_1^6 - 36y_1 \cdot H_1 \cdot N_1^3 + 9y_1^2} < 1.$$

Эти неравенства можно переписать как

$$y_1 > 0, \quad (94a)$$

$$3y_1 < 4H_1 \cdot N_1^3, \quad (94b)$$

что также дает

$$v_1 > 0, \quad x_1 < 0. \quad (95)$$

Отметим здесь, что значения  $y$  на стадии сжатия и на стадии инфляции имеют разные знаки:  $y_1 > 0$ , согласно (94a) и  $y_0 < 0$ , см. Рис. 2, соответственно. И наоборот,  $x$  (и  $v$ ) имеет одинаковые знаки на обеих стадиях сжатия и инфляции согласно формулам (90) и (95).

Наконец, обсудим возможный вид функций  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $y(t)$  и  $f(t)$  вблизи отскока. Поскольку  $x(t)$  и  $v(t)$  не меняют знака за переход от сжатия к инфляции, естественно выбрать их монотонно меняющимися от значения  $x_0$  к  $x_1$  и от  $v_0$  к  $v_1$ , соответственно. Функция  $f(t)$  с течением времени выходит на константу, причем  $\dot{f} < 0$  как на стадии сжатия, так и около отскока. Вблизи отскока  $H(t) \approx 0$  при  $t \approx t_b$ . Предполагая, что функции  $x(t) < 0$  и  $v(t) > 0$  медленно меняются по сравнению с  $f(t)$  в окрестности отскока, получим из первого уравнения движения (74a) с  $H(t_b) = 0$ :

$$N(t_b) \approx \sqrt{-\frac{3v(t_b)}{x(t_b)}}. \quad (96)$$

Заметим, что при нашем выборе знаков  $x$  и  $v$  на этапах сжатия, инфляции и отскока ( $x(t_b) < 0$ ,  $v(t_b) > 0$ ), выражение под корнем в (96) положительно. Далее, возьмем производную по времени от уравнения (74a) и решим это новое уравнение совместно с (74b), тогда получим

$$\dot{H}(t_b) \approx \frac{2v(t_b) \cdot x(t_b) \cdot \left( -2v(t_b) + \dot{f}(t_b) \cdot y(t_b) \cdot (2\mu + 1) \right)}{3\sqrt{3} \sqrt{-\frac{v(t_b)}{x(t_b)}} \cdot f^2(t_b) \cdot (8v^2(t_b) - 3x(t_b) \cdot y^2(t_b))},$$

где мы снова пренебрегаем производными  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{v}(t)$ , и  $\dot{y}(t)$  по сравнению с  $\dot{f}(t)$ . Так как  $\dot{H}(t_b) > 0$ , видно, что  $y(t_b)$  может быть отрицательным и определяется неравенством:

$$y(t_b) > \frac{2v(t_b)}{\dot{f}(t_b) \cdot (2\mu + 1)} .$$

Итак, учитывая все неравенства полученные выше, мы можем заключить, что большинство гладких функций, которые могут обеспечить переход от (77) к (91) действительно приведут к решению с отскоком. Мы продемонстрируем этот результат на конкретном численном примере в этом же пункте ниже.

### *Стадия расширения за счет безмассового скалярного поля после инфляции*

Для построения последней в нашей модели стадии, на которой динамика определяется стандартной ОТО и свободным безмассовым скалярным полем, мы воспользуемся ковариантным формализмом с лагранжианом (8). Используя свободу переопределения поля, выберем фоновое  $\phi$  как:

$$e^\phi = t, \quad t \rightarrow +\infty . \quad (97)$$

Такой выбор поля соответствует ковариантному лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{2}{3} X .$$

Действительно, можно убедиться, что уравнение движения для скалярного поля и уравнение Фридмана имеют решение (97) при  $a = \text{const} \cdot t^{1/3}$ ,  $N = \text{const}$ , и  $H = (3tN)^{-1}$ . Это и есть желаемое решение, соответствующее эпохе с безмассовым скалярным полем.

Также, по мере приближения к эпохе с безмассовым скалярным полем, другие слагаемые (кроме чисто кинетического члена для поля  $\phi$ ) в лагранжиане должны достаточно быстро стремиться к нулю. Для этого, например, можно потребовать, чтобы асимптотики функций в ковариантном лагранжиане (8) при



больших  $\phi$  (что соответствует далекому будущему; напомним, что не модифицированная гравитация с  $G_4 = 1/2$  восстанавливается уже на стадии инфляции) имели вид:

$$G_2(\phi, X) = \frac{2}{3}X + \omega_2(\phi) \cdot X^2, \quad (98a)$$

$$G_3(\phi, X) = \omega_3(\phi) \cdot X, \quad (98b)$$

где  $\omega_2(\phi)$  и  $\omega_3(\phi)$  как раз выполняют роль коэффициентов, которые подавляют слагаемые с производными высшего порядка. Зададим эти коэффициенты как:

$$\omega_2(\phi) = 4(v_2 \cdot e^{-\phi} - y_2 \cdot e^{-2\phi}), \quad \omega_3(\phi) = 3y_2 \cdot e^{-2\phi}.$$

Причина именно такого выбора обусловлена тем, что в таком анзаце функции  $A_2$  и  $A_3$  из АДМ формализма будут иметь достаточно простой вид. Действительно, используя формулы перехода (13)-(15), получаем:

$$A_2 = \frac{1}{3t^2 \cdot N^2} + \frac{v_2}{t^5 \cdot N^4},$$

$$A_3 = \frac{y_2}{t^5 \cdot N^3}.$$

Эти формулы можно обобщить, вводя некоторый временной сдвиг,  $t \rightarrow t - t_*$ , где  $t_*$  — новый параметр. Если использовать описание этапа сжатия, которое мы приводили ранее, то тогда инфляции начинается вскоре после момента  $t = 0$  и заканчивается в некоторый, гораздо более поздний, момент времени  $t_e$ . Временная сдвигка  $t_*$  (где  $t_*$  по порядку величины сопоставимо с  $t_e$ , но  $t_*$  меньше, чем  $t_e$ ) вводится для того, чтобы заложить в модель тот факт, что наша последняя стадия с безмассовым скалярным полем начинается где-то около  $t_e \neq 0$ . Таким образом, асимптотическое поведение функций  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$  при больших временах  $t$  (напомним, что  $f(t) = 1$  на инфляции и на более поздних временах)

может быть выбрано как

$$x(t) \rightarrow \frac{2}{3(t - t_*)^2}, \quad (99a)$$

$$v(t) \rightarrow \frac{v_2}{(t - t_*)^5}, \quad (99b)$$

$$y(t) \rightarrow \frac{y_2}{(t - t_*)^5}. \quad (99c)$$

Можно заметить, что, например, значения функции  $x(t)$  меняются от  $x_1 < 0$  на инфляции до  $2/3$  на стадии с безмассовым скалярным полем. Похожая модель выхода с инфляции на стадию, эволюция на которой определяется обычным безмассовым скалярным полем и ОТО, приводится в работах [120, 121]. Так, выбирая явный вид функций  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$  таким образом, чтобы они связывали значения  $x_1$ ,  $v_1$ , и  $y_1$  на инфляции с функциями (99) на поздних временах, можно получить гладкий переход от инфляции к стадии с безмассовым скалярным полем. Отметим, что анализ устойчивости (и скоростей распространения возмущений) затруднителен на тех временах, где происходит переход между стадиями. Построение полностью устойчивой модели эволюции ранней Вселенной с отскоком, в которой возмущения бы распространялись со скоростями, не превышающими скорость света — задача технического характера, сопряженная с подбором подходящих функций и параметров. Тем не менее построить модель без патологий возможно и мы явно демонстрируем это ниже на конкретном численном примере.

### ***Конкретный численный пример***

Рассмотрим теперь конкретную модель, которая будет удовлетворять всем условиям и требованиям, перечисленным в начале этой главы. Еще раз подчеркнем, что при “масштабировании” функций в лагранжиане согласно (87), можно сделать все характерные временные масштабы, такие как  $c^{-1}$ ,  $H_1^{-1}$  (обратный параметр Хаббла на инфляции) и т.д., произвольно большими и намного большими, чем планковское время. Этим свойством обладают и другие космологические

модели, рассматриваемые в данной работе.

Итак, наше построение начинается с выбора параметра  $\mu$ . Возьмем некоторое значение из допустимого интервала  $1/2 < \mu < 1$ , например:

$$\mu = 0.8 . \quad (100)$$

Ранее мы также обсуждали, что совершенно произвольно можно выбрать

$$c = 4 \cdot 10^{-3} . \quad (101)$$

Далее, параметры  $x_0$  и  $y_0$  выберем из разрешенной области на Рис. 2b; методом “проб и ошибок” были выбраны следующие значения, согласующиеся также и с выбором знаков (90):

$$x_0 = -1.6 \cdot 10^{-5}, \quad y_0 = -1.2 \cdot 10^{-3} . \quad (102)$$

Значения параметра  $v_0$  и коэффициента  $\chi$  на сжатии получаются из (79) и (80) и равны:

$$v_0 = 5.19 \cdot 10^{-6}, \quad \chi = 0.01 . \quad (103)$$

Таким образом, эпоха сжатия без патологий построена.

В какой-то момент сжатие сменится расширением, то есть произойдет отскок. Потребуем, чтобы он происходил в некоторый момент времени до  $t = 0$ ; также потребуем (хотя это необязательно, так как можно сделать масштабирование (87)), чтобы характерные временные масштабы были большими по сравнению с единицей (т.е. по сравнению с планковским временем). Сконструируем функцию  $f(t)$ , которая будет гладко соединять асимптотическое поведение этой функции  $f = -ct$  на сжатии и  $f = 1$  на инфляции, следующим образом:

$$f(t) = \frac{c}{2} \left[ -t + \frac{\ln(2 \cosh(st))}{s} \right] + 1 . \quad (104)$$

Здесь параметр  $s$  — это обратное характерное время перехода с одного поведения функции  $f(t)$  на другое, которое можно выбрать как

$$s = 2 \cdot 10^{-3} . \quad (105)$$

Пусть отскок происходит примерно в  $t \sim -s^{-1}$ , тогда максимальное значение  $|H|$  на сжатии можно оценить как

$$|H|_{max} \sim \chi \cdot s \sim 2 \cdot 10^{-5}. \quad (106)$$

После отскока происходит переход на стадию инфляции. Пусть параметр Хаббла  $H_1$  на инфляции будет по порядку величины сопоставим с максимальным значением  $|H|_{max}$  на сжатии. Кроме того, можно положить, что и функция хода  $N$  на инфляции не будет значительно отличаться от единицы. Итак, можно подобрать параметры следующим образом:

$$H_1 = 3.7 \cdot 10^{-5}, \quad N_1 = 0.82.$$

Далее, определим значение  $y_1$  на инфляции. Для простоты можно выбрать такой анзац, где функции  $x(t)$  и  $v(t)$  связаны как:

$$v(t) = x(t) \frac{v_0}{x_0}, \quad (107)$$

и комбинация  $v(t)/x(t)$  не зависит от времени при переходе от сжатия к инфляции. Отметим, что при выбранных значениях (102) и (103), наша оценка (96) согласована с  $N \sim 1$ . Из формулы (107) следует  $v_1/x_1 = v_0/x_0$ . Вместе с этим, также используя (93), находим

$$y_1 = \frac{4x_0 H_1^2 N_1^5 + 8v_0 H_1^2 N_1^3}{3x_0 H_1 N_1^2 + 3v_0 H_1},$$

а численно, подставляя все уже заданные параметры,

$$y_1 = 1.2 \cdot 10^{-6}.$$

Полученный в этом пункте набор параметров согласован с требованиями отсутствия градиентных неустойчивостей и ограничением на скорость распространения возмущений (94). Значения для  $x_1$  и  $v_1$  находятся из (93) и равны:

$$x_1 = -1.07 \cdot 10^{-8}, \quad v_1 = 3.47 \cdot 10^{-9}.$$

Отметим, что значения  $|x_1|$ ,  $v_1$  и  $y_1$  намного меньше, чем  $|x_0|$ ,  $v_0$  и  $|y_0|$ , соответственно. Это связано со следующими двумя свойствами эпох сжатия и инфляции. Во-первых, допустимая область параметров  $x_0$  и  $y_0$  на Рис. 2b соответствует довольно большим значениям  $|y_0|$ ; в нашем численном примере значение  $|y_0|$  также достаточно велико. С другой стороны, на инфляции параметр  $y_1$  ограничен значением  $H_1$ , см. неравенство (94b). Во-вторых, уравнение движения (74b) содержит слагаемое, пропорциональное  $\dot{f}y_0 = -cy_0$ , которое принимает достаточно большие значения на этапе сжатия; наличие этого слагаемого приводит к тому, что параметры  $|x_0|$  и  $v_0$  также принимают большие значения. Однако, это же слагаемое на инфляции зануляется. Кроме того, уравнение (74a) удовлетворяется на стадии сжатия благодаря нетривиальному сокращению между  $x_0$  и  $3v_0$ . Итак, эволюция от сжатия к инфляции через отскок описывается с помощью функций  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$ , гладко совершающих переход между значениями  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $y_0$  и  $x_1$ ,  $v_1$ ,  $y_1$  (где функция  $f(t)$  задается (104)). Весьма нетривиально получить модель, которая бы в каждый момент времени удовлетворяла условиям устойчивости  $\mathcal{F}_T, \dots > 0$  и  $c_{T,S}^2 \leq 1$ . Однако, были подобраны следующие функции

$$x(t) = x_0(1 - U_x(t)) + x_1U_x(t) , \quad (108a)$$

$$y(t) = y_0(1 - U_y(t)) + y_1U_y(t) , \quad (108b)$$

где

$$U_x(t) = \ln\left(\frac{e^{-1.5 \cdot s \cdot (t-80)} + e^2}{e^{-1.5 \cdot s \cdot (t-80)} + e}\right) \quad (109a)$$

$$U_y(t) = \ln\left(\frac{e^{-3.8 \cdot s \cdot (t+180)} + e^2}{e^{-3.8 \cdot s \cdot (t+180)} + e}\right) \quad (109b)$$

которые совершают переход от 0 к 1. Функция  $v(t)$  определяется выражением (107), а параметр  $s$  выбран как (105).

Поведение параметра Хаббла и функции хода во время сжатия, отскока, а также в начале инфляции показано на Рис. 4. Поведение функций  $\mathcal{F}_S$ ,  $\mathcal{G}_S$  и скорость звука  $c_S$  показаны на Рис. 5a, 5b и 6a, соответственно; таким образом,

мы видим, что модель на этих стадиях устойчива и условие  $c_{T,S}^2 \leq 1$  выполнено. Поведение функции  $\mathcal{F}_T$  также приводится на Рис. 6b (напомним также, что  $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T$  в нашем анзаце и  $c_T = 1$ ).

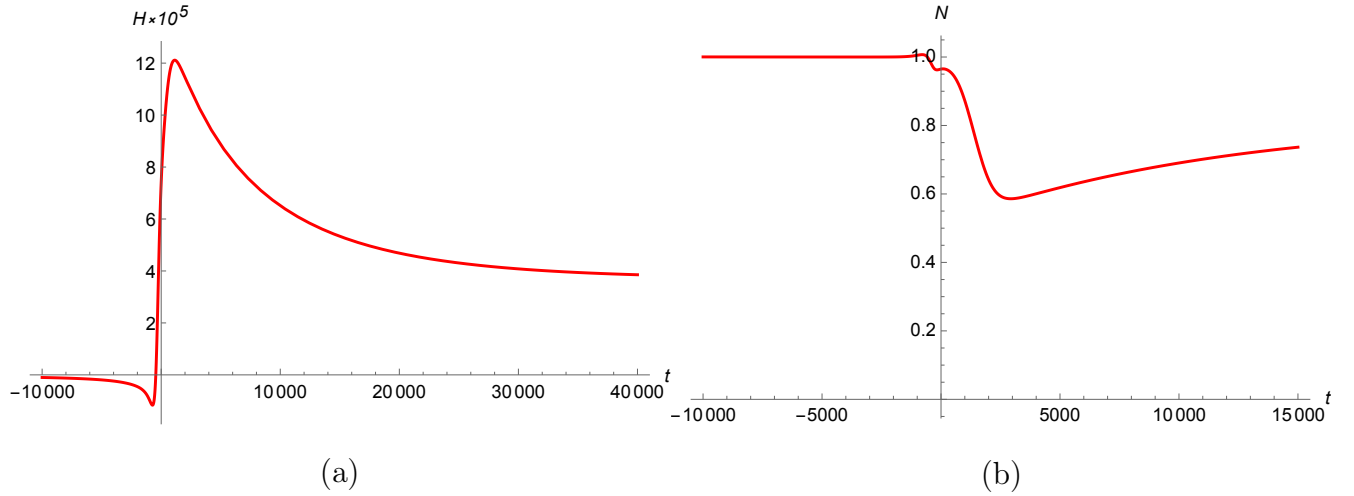


Рис. 4: Параметр Хаббла (слева) и функция хода (справа) для модели из параграфа 2.1 на стадии сжатия, в момент отскока и в начале инфляции. Параметр Хаббла построен для больших значений времени, чтобы показать выход на константу, то есть начало инфляции. Все остальные функции также могут быть построены и в начале инфляции и на самой инфляции. Напомним, что в наших моделях положено  $\frac{M_{Pl}^2}{2} = 1$ , единицы измерения — планковские.

Итак, после отскока через довольно короткий промежуток времени наступает инфляция. Выбирая параметры модели определенным образом, можно задать любую продолжительность инфляции. Такое свойство нашей модели представляет интерес с феноменологической точки зрения [119]. Мы произвольно выбираем продолжительность инфляции равной  $\Delta t_{inf} \approx 1.55 \cdot 10^6$  (в планковских единицах), что также соответствует числу  $e$ -фолдингов, равному  $N_e = N_1 H_1 \Delta t_{inf} \approx 46$ .

Чтобы получить переход от инфляции к последующей стадии с безмассовым скалярным полем, мы выбираем для более поздних моментов времени следую-

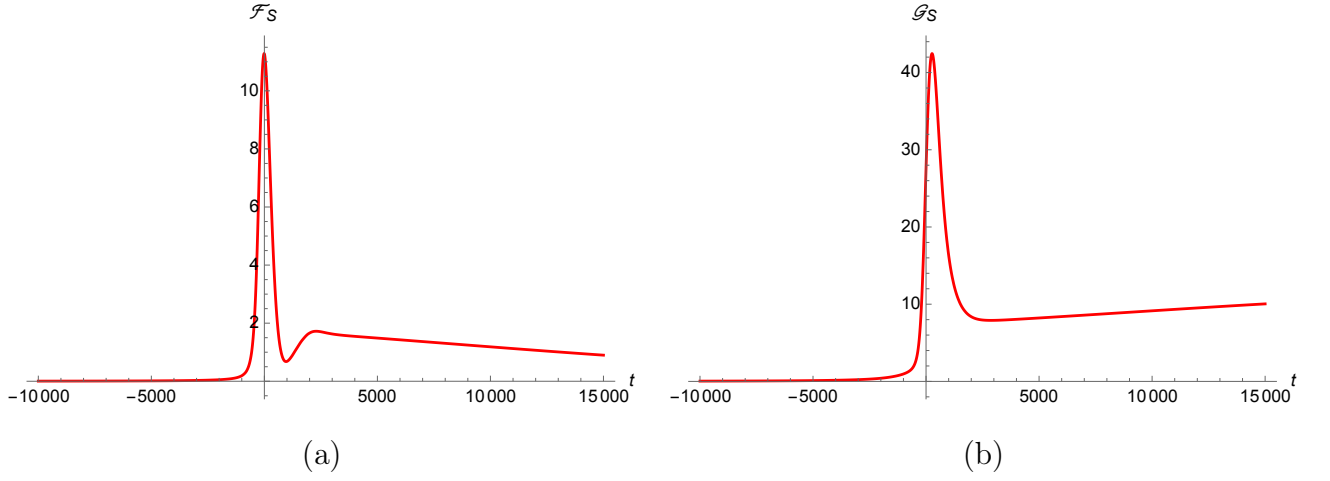


Рис. 5: Коэффициенты  $\mathcal{F}_S$  (слева) и  $\mathcal{G}_S$  (справа) действия второго порядка для скалярного возмущения  $\zeta$  на стадии сжатия, в момент отскока и в начале инфляции для модели из параграфа 2.1. Напомним, что в наших моделях положено  $\frac{M_{Pl}^2}{2} = 1$ , единицы измерения — планковские.

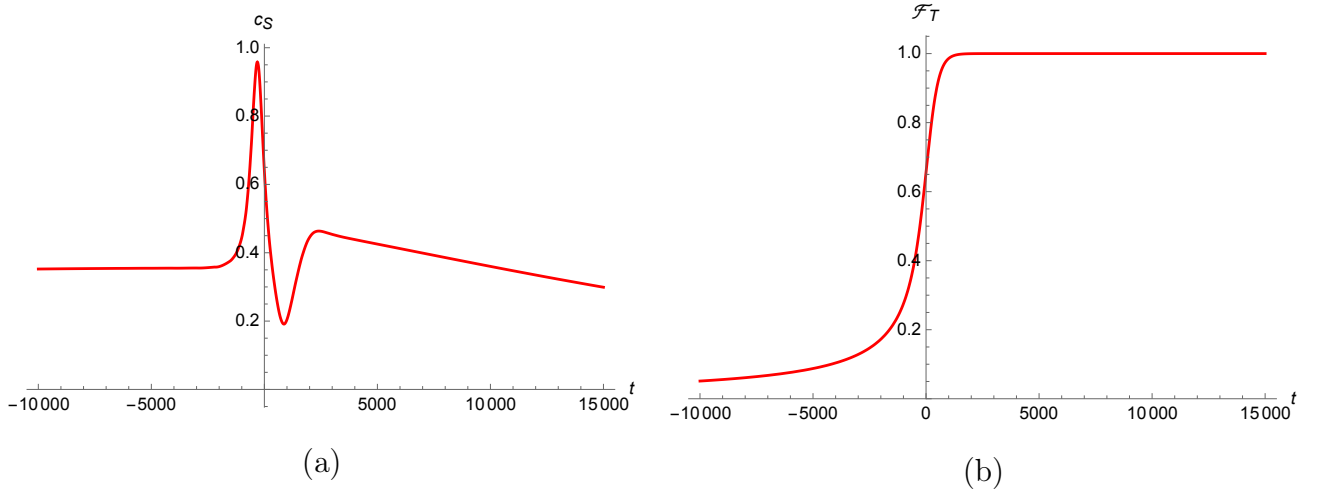


Рис. 6: Скорость  $c_S = \sqrt{\mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S}$  (слева) и функция  $\mathcal{F}_T$  (справа) для модели из параграфа 2.1 на стадии сжатия, в момент отскока и в начале инфляции. Напомним, что в наших моделях положено  $\frac{M_{Pl}^2}{2} = 1$ , единицы измерения — планковские.

щее поведение соответствующих функций:

$$x(t) = x_1(1 - V(t - t_*)) + x_2 \frac{V(t - t_*)}{(t - t_*)^2}, \quad (110a)$$

$$v(t) = v_1(1 - V(t - t_*)) + v_2 \frac{V(t - t_*)}{(t - t_*)^5}, \quad (110b)$$

$$y(t) = y_1(1 - V(t - t_*)) + y_2 \frac{V(t - t_*)}{(t - t_*)^5}, \quad (110c)$$

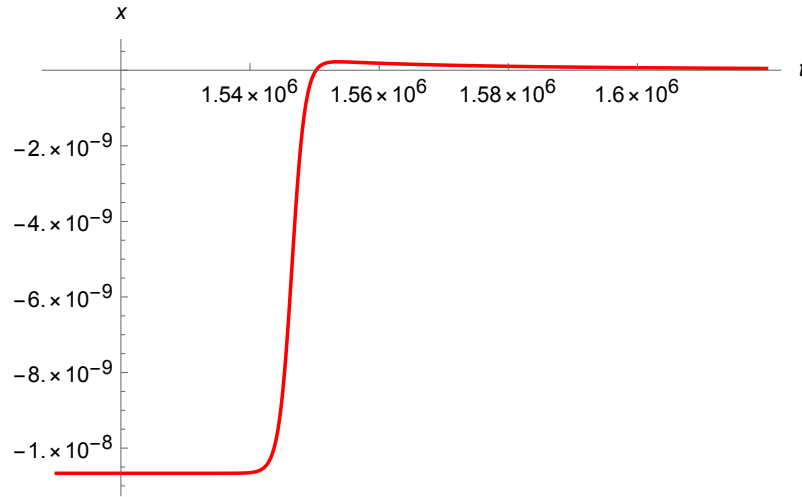


Рис. 7: Поведение функции  $x(t)$  при переходе с инфляции на эпоху с безмассовым скалярным полем.

где  $t_* = 1.5 \cdot 10^6$  — параметр, регулирующий продолжительность инфляции, и

$$x_2 = \frac{2}{3},$$

$$y_2 = -T^3 y_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} = 6.83 \cdot 10^{15},$$

$$v_2 = -T^3 v_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1.97 \cdot 10^{13},$$

с вспомогательным параметром  $T = 4.5 \cdot 10^4$ , а функция  $V(t)$  определяется как

$$V(t) = 1 + \ln\left(\frac{e^{0.5 \cdot s \cdot (t-T)} + e}{e^{0.5 \cdot s \cdot (t-T)} + e^2}\right),$$

и она также совершает переход между 0 и 1 (значение параметра  $s$  по-прежнему равно (105)). Параметры  $t_*$  и  $T$  выбираются таким образом, чтобы функции  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$  были гладкими во время перехода с одной стадии на другую, и также чтобы инфляция плавно заканчивалась чуть позже момента времени  $t_*$ . Так, в качестве примера на Рис. 7 мы приводим явное поведение функции  $x(t)$  на временах, где происходит смена одной эпохи на другую: инфляция заканчивается и далее наступает стадия, где за динамику отвечает безмассовое скалярное поле. Функции  $v(t)$  и  $y(t)$  ведут себя похожим образом. Итак, в рамках выбранного анзаца, на более поздних временах мы получаем правильные асимптотики (99), а параметр Хаббла сводится к  $H = (3(t - t_*)N)^{-1}$ . Поведение



ние параметра Хаббла и функции хода показано на Рис. 8, а поведение  $\mathcal{F}_S$  и  $c_S$  — на Рис. 9. Видно, что модель свободна от градиентных неустойчивостей и  $c_S^2 \leq 1$  при переходе от инфляции к эпохе с безмассовым скалярным полем. Отметим еще, что скорость распространения возмущений  $c_S$  стремится к единице довольно медленно, поскольку отношение  $v(t)/x(t)$  убывает медленно, как  $(t - t_*)^{-3}$  (а  $y(t)$  ведет себя как  $(t - t_*)^{-5}$ ).

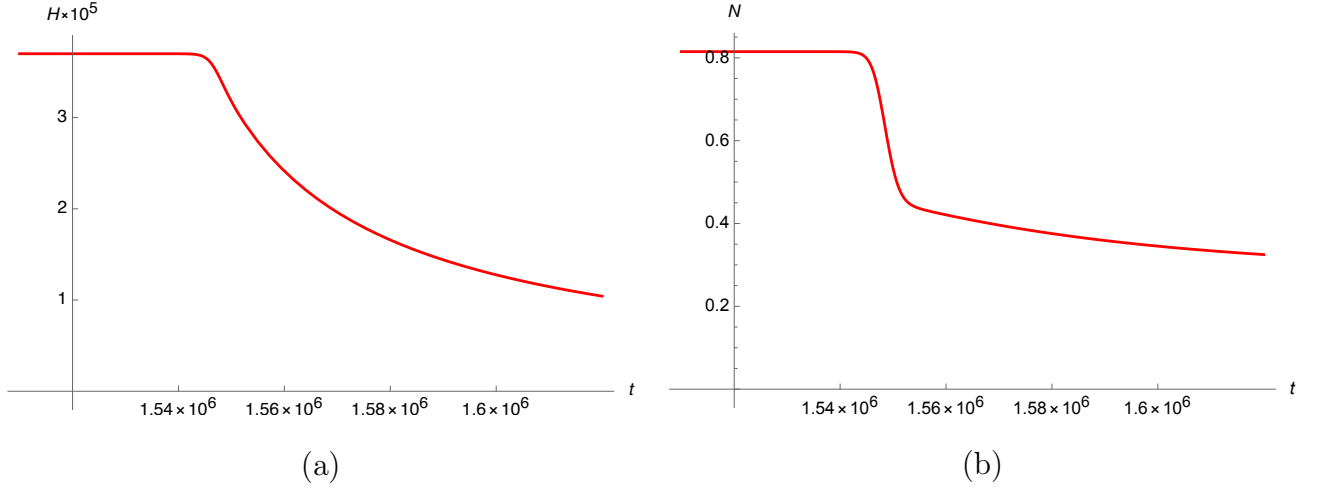


Рис. 8: Параметр Хаббла (слева) и функция хода (справа) в модели из параграфа 2.1 в конце инфляции и в начале стадии с безмассовым скалярным полем. Напомним, что в наших моделях положено  $\frac{M_{Pl}^2}{2} = 1$ , единицы измерения — планковские.

В заключение этого пункта отметим, что поскольку продолжительность инфляции достаточно велика, полные выражения для  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $y(t)$  (которые определяют эволюцию в каждый момент времени) — это просто сумма выражений (108) и (110), то есть, например,

$$x(t) = x_0(1 - U_x(t)) + x_1 U_x(t)(1 - V(t - t_*)) + x_2 \frac{V(t - t_*)}{(t - t_*)^2}, \quad (111)$$

и аналогично для других функций. На этом построение и обсуждение модели с отскоком, инфляцией, и стадией с безмассовым скалярным полем завершается.

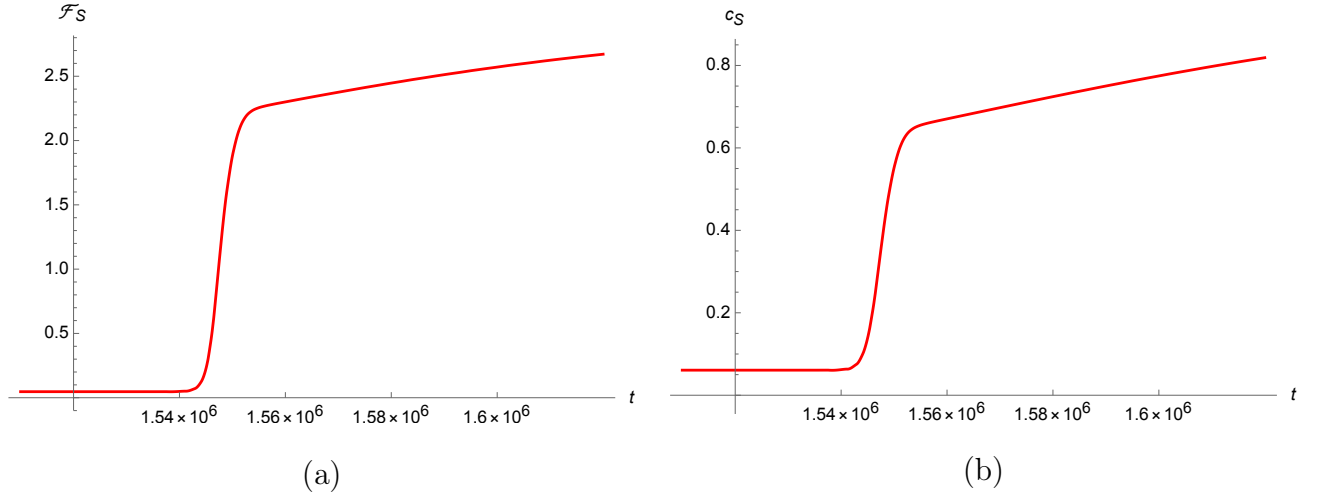


Рис. 9: Вид функции  $\mathcal{F}_S$  (слева) и  $c_S = \sqrt{\mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S}$  (справа) в модели из параграфа 2.1 в конце инфляции и в начале стадии с безмассовым скалярным полем. Напомним, что в наших моделях положено  $\frac{M_{Pl}^2}{2} = 1$ , единицы измерения — планковские.

## 2.2 Сжатие и отскок без инфляции

За сжатием с последующим отскоком не обязательно должна следовать инфляция: краткий переходный период после отскока может закончиться непосредственно и выходом на стадию с безмассовым скалярным полем. Построим такую модель. Отметим, что в таком случае, мы получаем альтернативный инфляции сценарий. В таком сценарии начальную стадию сжатия мы будем строить точно так же, как это было предложено ранее в параграфе 2.1; в этом же параграфе мы лишь подробно опишем, как можно реализовать эволюцию без инфляции после отскока. Ниже мы приведем численный пример, который явно показывает, что свободная от градиентных неустойчивостей и других патологий космологическая модель такого типа также реализуема.

Снова выберем  $\mu = 0.8$ , а соответствующие параметры на стадии сжатия — такие же, как (101), (102), и (103). Пусть функция  $f(t)$  задается (104), так чтобы на поздних временах восстанавливалась стандартная ОТО. На поздних же временах снова нужно восстановить асимптотическое поведение (99) для функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $v(t)$ . Перечисленным выше требованиям удовлетворяют,

например, функции вида:

$$x(t) = x_0(1 - U_x(t)) + \frac{4}{3((t + 2000)^2 + (t - 5000)^2)} \cdot U_x(t),$$

$$v(t) = v_0(1 - U_x(t)) + \frac{v_2}{(|t| + 2000)^5} \cdot U_x(t),$$

$$y(t) = y_0(1 - U_y(t)) + \frac{y_2}{(|t| + 2000)^5} \cdot U_y(t),$$

где  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$  определяются в (109), но теперь

$$v_2 = 1.04 \cdot 10^8, \quad y_2 = 9.6 \cdot 10^{10}.$$

Поведение параметра Хаббла и функции хода для модели без инфляции показано на Рис. 10; коэффициент  $\mathcal{F}_S$  и скорость скалярных возмущений — на Рис. 11. Таким образом, модель является устойчивой, иные патологии также отсутствуют.

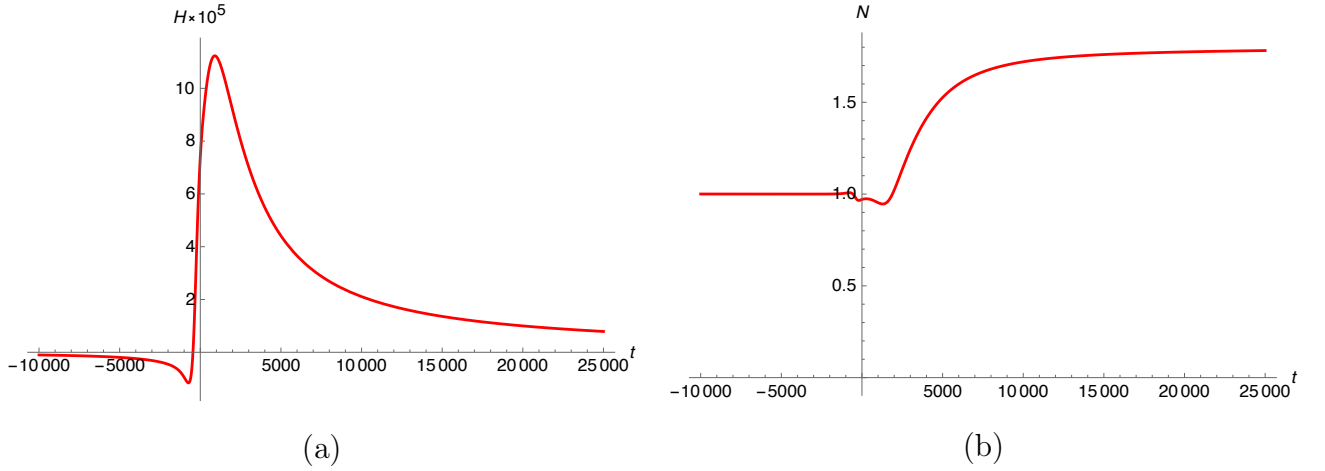


Рис. 10: Параметр Хаббла (слева) и функция хода (справа) для модели из параграфа 2.2: сжатие, отскок и стадия с безмассовым скалярным полем. Единицы измерения — планковские.

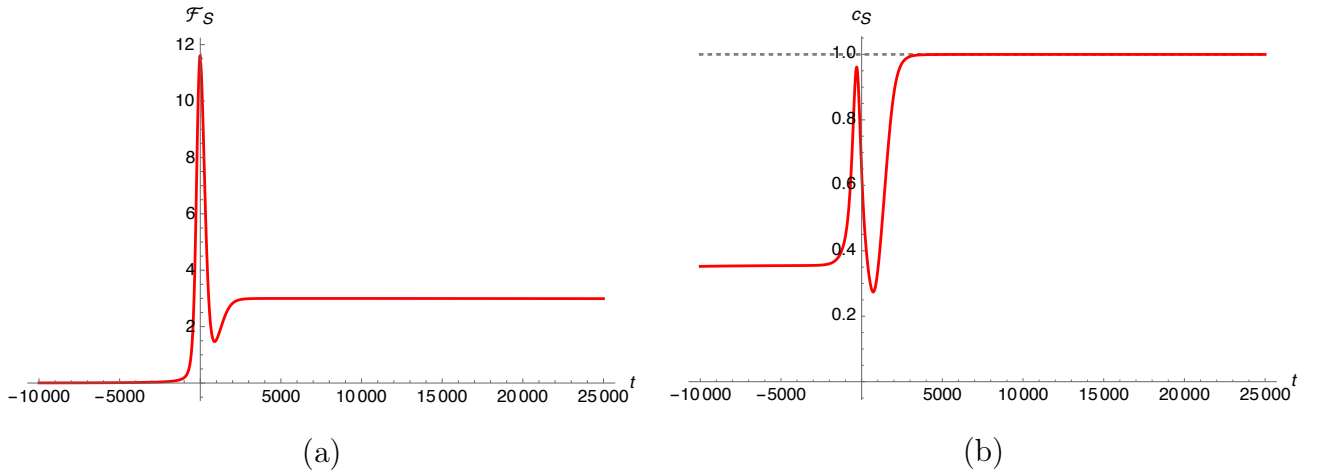


Рис. 11: Функция  $\mathcal{F}_S$  (слева) и  $c_S = \sqrt{\mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S}$  (справа) для модели из параграфа 2.2: сжатие, отскок и стадия с безмассовым скалярным полем. Единицы измерения — планковские.

### 2.3 Генезис с последующим сжатием и отскоком

Обратимся теперь к построению другой интересной возможности — модели с генезисом. Как и предложенные выше модели со сжатием и отскоком, теории с генезисом могут служить дополнением инфляционного решения, “освобождая” полную модель Вселенной от начальной сингулярности, или служить интересной альтернативой инфляционной парадигме. Напомним здесь кратко, что при генезисе эволюция Вселенной начинается с плоского пространства-времени Минковского, затем возможен переход на последующие эпохи. Мы представим ниже полную модель с генезисом, последующим сжатием, отскоком и выходом на инфляцию.

Итак, для того, чтобы построить не патологичную модель эволюции с генезисом на ранних временах, выберем в этом параграфе новый анзац для функций

лагранжиана  $A_{2,3,4}$ , и  $B_4$ :

$$A_2 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-2-\delta} a_2(N), \quad (112a)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-1-\delta} a_3(t, N), \quad (112b)$$

$$B_4 = \frac{1}{2} f^{-2\mu} b_4(t, N), \quad (112c)$$

$$A_4 = \frac{1}{2} f^{-2\mu} a_4(t, N). \quad (112d)$$

Параметр  $\mu > 0$  подобен одноименному параметру из предыдущего параграфа 2.1, а параметр  $\delta > 0$  — некоторый новый параметр лагранжиана (с подобным параметром мы, однако, имели дело в главе 1). В новом анзаце функции  $A_4$  и  $B_4$  зависят и от  $t$ , и от  $N$ ; функции  $a_2(N)$ ,  $a_3(t, N)$ ,  $a_4(t, N)$ , и  $b_4(t, N)$  выбираются следующим образом:

$$a_2(N) = x \left( \frac{1}{N^2} - \frac{1}{3N^4} \right), \quad x = \text{const}, \quad (113a)$$

$$a_3(t, N) = \frac{y(t)}{N^3}, \quad (113b)$$

$$a_4(t, N) = - \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2} \right), \quad (113c)$$

$$b_4(t, N) = \left( 1 - \frac{z(t)}{N^2} \right). \quad (113d)$$

Отметим, что параметр  $x$  теперь не зависит от времени, в отличие от ситуации из параграфа 2.1, где функции  $x(t)$  и  $v(t)$ , входящие в  $a_2$ , были своего рода ступенчатыми функциями.

В анзаце (112), уравнения движения (21) имеют вид

$$x f^{-2-\delta} \left( \frac{1}{N^4} - \frac{1}{N^2} \right) - 9y(t) \cdot f^{-1-\delta} \cdot \frac{H}{N^3} + 6H^2 \cdot \left( 1 + \frac{3z(t)}{N^2} \right) = 0, \quad (114a)$$

$$\begin{aligned} & x f^{-2-\delta} \left( \frac{1}{N^2} - \frac{1}{3N^4} \right) + 6 \cdot H^2 \cdot \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2} \right) \\ & - \frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left[ \frac{y(t)}{N^3} \cdot f^{-1-\delta} - 4 \cdot H \cdot \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2} \right) \right] \\ & + 2\mu \cdot \frac{\dot{f}}{f} \frac{1}{N} \left[ \frac{y(t)}{N^3} \cdot f^{-1-\delta} - 4 \cdot H \cdot \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (114b)$$

Все функции, входящие в (34), даются следующими выражениями

$$\mathcal{F}_T = f^{-2\mu} \cdot \left( 1 - \frac{z(t)}{N^2(t)} \right), \quad (115a)$$

$$\mathcal{G}_T = f^{-2\mu} \cdot \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2(t)} \right), \quad (115b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S = f^{-2\mu} \cdot & \frac{3y(t) \cdot z(t) - 3y(t) \cdot N^2 - 16f^{1+\delta} \cdot H \cdot N \cdot z^2(t)}{N^2 [3y(t) - 4f^{1+\delta} \cdot H \cdot N \cdot (N^2 + 3z(t))]} \\ & - \frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left( \frac{4f^{-2\mu+\delta+1} (N^2 + z(t))^2}{N \cdot [3y(t) - 4f^{1+\delta} \cdot H \cdot N \cdot (N^2 + 3z(t))]} \right), \end{aligned} \quad (115c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_S = f^{-2\mu} \cdot & \left( 1 + \frac{z(t)}{N^2} \right) \\ & \times \left( 8f^\delta \cdot (N^2 + z(t)) \right. \\ & \times \left. \frac{x \cdot (-2 + N^2) + 18f \cdot H \cdot N \cdot y(t) - 6f^{2+\delta} \cdot H^2 \cdot N^2 \cdot (N^2 + 6z(t))}{[3y(t) - 4f^{1+\delta} \cdot H \cdot N \cdot (N^2 + 3z(t))]^2} + 3 \right). \end{aligned} \quad (115d)$$

Вновь функции  $f(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  будут выбраны так, чтобы удовлетворить условиям  $\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S > 0$  и  $c_{T,S}^2 \leq 1$ .

Итак, займемся теперь построением модифицированной модели генезиса с последующим сжатием Вселенной. В таком сценарии эволюция начинается с плоского пространства-времени Минковского, затем Вселенная постепенно начинает сжиматься, а скорость сжатия нарастает. В какой-то момент времени происходит отскок: сжатие сменяется расширением. После отскока можно реализовать инфляционную эпоху, выход с которой описан в параграфе 2.1; в этом пункте мы будем придерживаться такого же описания инфляции и выхода с нее. Кроме того, можно снова построить модель без инфляции: после генезиса, сжатия и отскока сразу происходит выход на стадию, эволюция на которой определяется безмассовым скалярным полем и стандартной ОТО, как в параграфе 2.1. Мы ограничимся далее лишь построением модели с промежуточной инфляцией.

На ранних временах рассмотрим следующие асимптотики

$$f = -ct, \quad c > 0, \quad (116a)$$

$$y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0. \quad (116b)$$

Такой выбор приводит к степенному поведению параметра Хаббла. Действительно, подставляя (116) в уравнения движения (114), получаем

$$H = -\frac{\chi}{(-t)^{1+\delta}}, \quad N = 1, \quad t \rightarrow -\infty,$$

где

$$\chi = \frac{\frac{2}{3}x - (2\mu + \delta + 1) \cdot y_0 \cdot c}{4(2\mu + \delta + 1) \cdot (1 + z_0) \cdot c^{\delta+2}}. \quad (117)$$

Заметим, что в данной модели тоже выполняется  $N = 1$ . Но теперь это обусловлено выбором множителя  $(-1/3)$  при слагаемом  $N^{-4}$  в (113а); в параграфе 2.1  $N = 1$  определялось условием (79). Далее, при  $\delta > 0$ , масштабный фактор имеет вид:

$$a = \text{const} \cdot \left(1 - \frac{\chi}{\delta(-t)^\delta}\right), \quad (118)$$

и стремится к константе на  $t \rightarrow -\infty$ , что и требуется для модели генезиса. Генезис со сжатием реализуется при  $\chi > 0$ .

Отметим, что для достаточно малых значений  $\delta$  асимптотики решений при приближении к  $t \rightarrow -\infty$  имеют вид (с параметром расширения  $(-t)^{-\delta}$ ):

$$H(t) = -(-t)^{-1-\delta} \cdot (\chi + \chi_1 \cdot (-t)^{-\delta} + \dots), \quad (119a)$$

$$(119b)$$

$$N(t) = 1 + N_1 \cdot (-t)^{-\delta} + \dots, \quad (119c)$$

где, в частности, коэффициенты  $\chi_1$  и  $N_1$  не малы. Вообще говоря, такое асимптотическое поведение с малым  $\delta$  усложняет численные вычисления; мы обсуждаем сопряженные с этим проблемы и их решение в Приложении С. Это обсуждение релевантно и для модели из параграфа 2.4.

Асимптотическое поведение коэффициентов (115), входящих в действие второго порядка для возмущений, имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_T &\propto (-ct)^{-2\mu}, & \mathcal{G}_T &\propto (-ct)^{-2\mu}, \\ \mathcal{F}_S &\propto (-ct)^{-2\mu+\delta}, & \mathcal{G}_S &\propto (-ct)^{-2\mu+\delta}.\end{aligned}$$

Ограничения на параметры лагранжиана получаются из тех же соображений, что и в параграфе 2.1. Перечислим их ниже:

(i) Построение сжатия на ранних временах приводит к неравенству:

$$\chi > 0; \tag{120}$$

(ii) Отсутствие градиентных неустойчивостей и распространение возмущений со скоростями меньше, чем скорость света, дает:

$$\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S > 0, \tag{121a}$$

$$c_T^2 \leq 1, \quad c_S^2 \leq 1; \tag{121b}$$

(iii) Чтобы обойти условия запрещающей теоремы из работы [88] и построить устойчивую модель на всех временах, потребуем:

$$2\mu > 1 + \delta; \tag{122}$$

(iv) Далее, мы снова хотим построить такую модель, в которой было бы законно классическое полевое описание или, иными словами, мы требуем отсутствие режима сильной связи в прошлом. Этот вопрос был подробно изучен нами в главе 1 (см. также формулу (56)); итак:

$$\mu + \frac{3}{2}\delta < 1; \tag{123}$$

(v) Феномен Белинского–Халатникова–Лифшица. Проводя точно такой же анализ, как в параграфе 2.1, мы получаем решение для зависящих от времени возмущений за горизонтом

$$h_{ij} \propto \int dt \frac{1}{a^3 \mathcal{G}_T} \propto (-t)^{2\mu+1}, \tag{124}$$



и

$$\zeta \propto \int dt \frac{1}{a^3 \mathcal{G}_S} \propto (-t)^{2\mu-\delta+1}. \quad (125)$$

Эти решения убывают по мере увеличения времени от  $-\infty$  к 0, если положить  $2\mu + 1 > \delta$ . Однако, это условие слабее, чем (iii).

Все эти условия могут быть удовлетворены (практически) без тонкой настройки параметров (“fine-tuning”). Используя (122), ограничения выше дают

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T > 0 & : & z_0 < 1 ; \\ c_T^2 \leq 1 & : & z_0 \geq 0 ; \\ \mathcal{G}_S > 0 & : & x_0 < 0 ; \\ \chi > 0 & : & 3(2\mu + \delta + 1)c|y_0| > 2|x_0| ; & y_0 < 0 ; \end{aligned}$$

а условие  $c_S^2 \leq 1$  приводит к

$$3(2\mu - \delta - 1)(2\mu + \delta + 1)c|y_0| \leq [4(\mu + \delta + 1) + 6z_0(\delta + 1)]|x_0|.$$

Условие  $\mathcal{F}_S > 0$  выполняется автоматически. Для допустимых значений параметров  $\mu$  и  $\delta$  вышеперечисленным условиям можно удовлетворить; этап сжатия построен.

Теперь перейдем к обсуждению инфляционной эпохи. Как и в параграфе 2.1, инфляция реализуется на не зависящих от времени функциях в лагранжиане, а именно:

$$f = 1, \quad (126a)$$

$$y = y_1, \quad z = z_1. \quad (126b)$$

Уравнения движения (114) на инфляции выглядят как

$$x \left( \frac{1}{N^4} - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{9y_1 \cdot H}{N^3} + 6H^2 \cdot \left( 1 + \frac{3z_1}{N^2} \right) = 0, \quad (127a)$$

$$x \left( \frac{1}{N^2} - \frac{1}{3N^4} \right) + 6H^2 \cdot \left( 1 + \frac{z_1}{N^2} \right) = 0, \quad (127b)$$

и мы обозначим (не зависящее от времени) решение этих уравнений как  $H = H_1$  и  $N = N_1$ . Потребуем, чтобы  $H_1 > 0$ ,  $N_1 > 0$ .

Вновь по аналогии с анализом из параграфа 2.1, удобно взять  $H_1$  и  $N_1$  как независимые параметры и выразить через них параметры  $y_1$  и  $z_1$ , используя уравнения (127):

$$y_1 = -\frac{12H_1^2 \cdot N_1^4 - 2x + 4x \cdot N_1^2}{9H_1 \cdot N_1}, \quad (128a)$$

$$z_1 = \frac{-18H_1^2 \cdot N_1^4 + x - 3x \cdot N_1^2}{18H_1^2 \cdot N_1^2}. \quad (128b)$$

Подчеркнем, что в отличие от сценария с отскоком из параграфа 2.1, инфляционная эпоха в нашей текущей модели не описывается стандартной ОТО, поскольку теперь  $z_1 \neq 0$ . Условия отсутствия градиентных неустойчивостей и ограничение на скорость распространения возмущений (не выше скорости света), при использовании выражений (115), записываются на стадии инфляции как

$$\mathcal{F}_T = 2 + \frac{x \cdot (3N_1^2 - 1)}{18H_1^2 \cdot N_1^4} > 0, \quad \mathcal{G}_T = \frac{x \cdot (1 - 3N_1^2)}{18H_1^2 \cdot N_1^4} > 0, \quad (129a)$$

$$c_T^2 = -1 + \frac{36H_1^2 \cdot N_1^4}{x \cdot (1 - 3N_1^2)} \leq 1, \quad (129b)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{-648H_1^4 \cdot N_1^8 + 18x \cdot H_1^2 \cdot N_1^4 \cdot (1 - 9N_1^2) + x^2 \cdot (-1 + 9N_1^2 - 18N_1^4)}{54H_1^2 \cdot N_1^6 \cdot (6H_1^2 \cdot N_1^2 + x)} > 0, \quad (129c)$$

$$\mathcal{G}_S = -\frac{x \cdot (-1 + 3N_1^2)}{18H_1^2 \cdot N_1^6 \cdot (6H_1^2 \cdot N_1^2 + x)^2} \times (108H_1^4 \cdot N_1^6 + 6x \cdot H_1^2 \cdot N_1^2(1 + 3N_1^2) + x^2 \cdot (-1 + 6N_1^2)) > 0, \quad (129d)$$

$$c_S^2 = \frac{1}{3} - \frac{12H_1^2 \cdot N_1^4}{x \cdot (1 - 3N_1^2)} + \frac{72H_1^4 \cdot N_1^6 - 4x \cdot H_1^2 \cdot N_1^2}{108H_1^4 \cdot N_1^6 + 6x \cdot H_1^2 \cdot N_1^2 \cdot (1 + 3N_1^2) + x^2 \cdot (-1 + 6N_1^2)} \leq 1. \quad (129e)$$

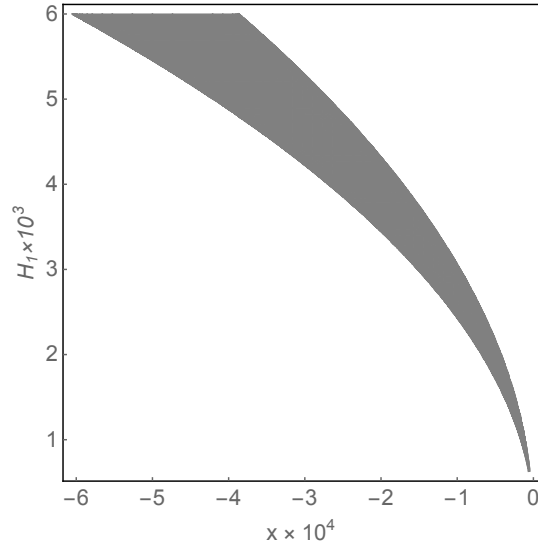


Рис. 12: Область параметров  $x$  и  $H_1$ , характеризующие инфляционную стадию из параграфа 2.3. Значения параметров  $x$  и  $H_1$ , которые образуют серую область, удовлетворяют неравенствам (129). Остальные параметры выбраны как  $\mu = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$  и  $N_1 = 0.74$ .

Вновь можно так подобрать параметры теории, чтобы вышеперечисленные условия выполнялись (почти без тонкой подстройки параметров). Например, допустимая область параметров  $x$  и  $H_1$  приводится на Рис. 12 при произвольно выбранных  $\mu = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$  и  $N_1 = 0.74$ . Можно построить такие области параметров и для других значений  $N_1$ , но при условии, что  $N_1 \lesssim 1$ . То, что  $x$  отрицателен и  $|x|$  мал при малых  $H_1$  (характерный классический масштаб, скорость расширения  $H_1$  намного меньше планковского масштаба) становится очевидно, например, из уравнения (129b).

Перейдем теперь к конкретной численной модели, чтобы показать, что эволюция Вселенной, начинающаяся с генезиса с последующим сжатием может без патологий перейти на стадию инфляции после отскока. Напомним, что мы выбрали  $\mu = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$ . Еще один параметр, относящийся к начальным эпохам генезиса и сжатия, выберем как  $c = 1.7545 \cdot 10^{-2}$ . Выберем и значения для других параметров лагранжиана на ранних временах  $t \rightarrow -\infty$ , которые также

согласуются с системой неравенств (120)-(123) и (129):

$$x = -2.097 \cdot 10^{-4}, \quad y_0 = -2.481 \cdot 10^{-2}, \quad z_0 = 0.905. \quad (130)$$

Значение коэффициента  $\chi$  на стадии сжатия определяется из (117) и равно  $\chi = 0.25$ . Построим функцию  $f(t)$ , которая должна совершать переход с  $f = -ct$  (при сжатии) на  $f = 1$  (во время инфляции). Чтобы обеспечить отсутствие градиентных неустойчивостей и  $c_{T,S}^2 \leq 1$  в любой момент времени, мы выбираем эту функцию как (в несколько более сложном виде, чем (104)):

$$f(t) = \frac{c}{2} \left[ -t + \frac{\ln(2\cosh(st))}{s} \right] + 0.89 \cdot U_f(t) + 1,$$

где

$$U_f(t) = \ln \left( \frac{e^{4 \cdot s \cdot (t-600)} + e}{e^{4 \cdot s \cdot (t-600)} + e^2} \right),$$

то есть совершает переход между  $-1$  и  $0$ . Параметр  $s$  точно такой же, как и в (105), то есть  $s = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Определим параметры на инфляции и опишем переход к этой стадии через отскок. Пусть не зависящие от времени параметр Хаббла и функция хода на инфляции равны:

$$H_1 = 3.71 \cdot 10^{-3}, \quad N_1 = 0.74.$$

Этот выбор согласуется с условиями (129). Далее, из выражений (128), с заданным значением  $x$  в (130), получим

$$y_1 = -4.01 \cdot 10^{-4}, \quad z_1 = 0.445. \quad (131)$$

Переход от сжатия к инфляции определяется функциями  $y(t)$  и  $z(t)$ , которые плавно совершают переход со значений  $y_0, z_0$  к значениям  $y_1, z_1$ . Подходящие на эту роль функции имеют, например, следующий вид

$$y(t) = y_0(1 - U_y(t)) + y_1 U_y(t), \quad (132a)$$

$$z(t) = z_0(1 - U_z(t)) + z_1 U_z(t), \quad (132b)$$

где

$$U_y(t) = 1 + \ln\left(\frac{e^{3.8 \cdot s \cdot (t+150)} + e}{e^{3.8 \cdot s \cdot (t+150)} + e^2}\right),$$

$$U_z(t) = \ln\left(\frac{e^{-5.8 \cdot s \cdot (t-605)} + e^2}{e^{-5.8 \cdot s \cdot (t-605)} + e}\right)$$

и изменяются от 0 до 1. Условия отсутствия градиентных неустойчивостей и ограничение на скорости распространения возмущений в каждый момент времени и приводят нас к весьма нетривиальному виду функций (132).

Поведение параметра Хаббла и функции хода на этапах генезиса, сжатия, в момент отскока и в начале инфляции приводятся на Рис. 13. Поведение функции  $\mathcal{F}_S$  и скорости звука  $c_S$  показаны на Рис. 14: мы действительно добились устойчивости и выполнения условия  $c_{T,S}^2 \leq 1$  в каждый момент времени (хотя это может быть не очевидно для  $\mathcal{F}_S$  с Рис. 14а: однако же, этот коэффициент строго положителен в любой момент времени).

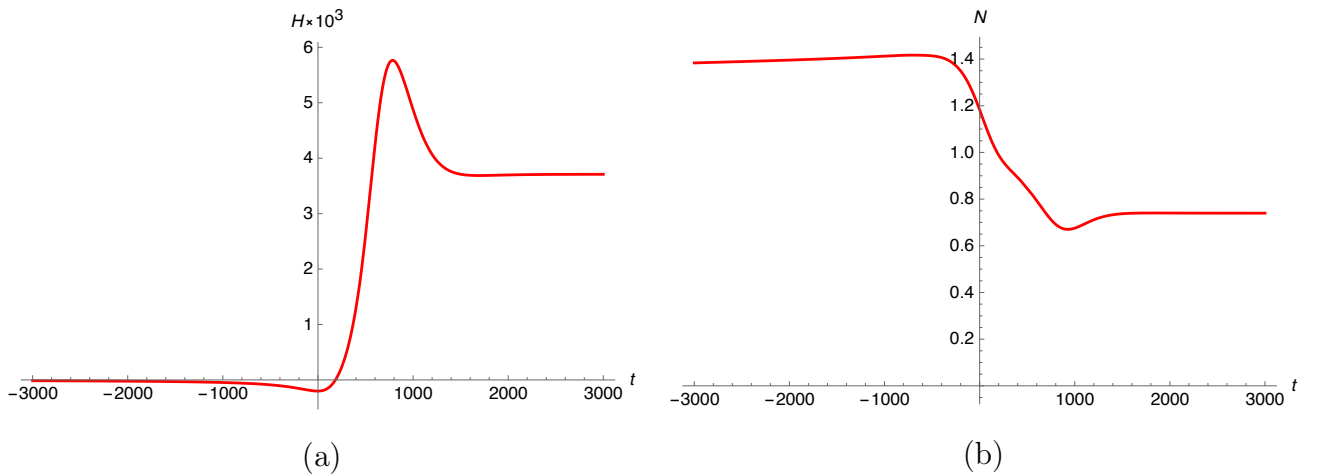


Рис. 13: Параметр Хаббла (слева) и функция хода (справа) для модели из параграфа 2.3: генезис, сжатие и отскок. Единицы измерения — планковские.

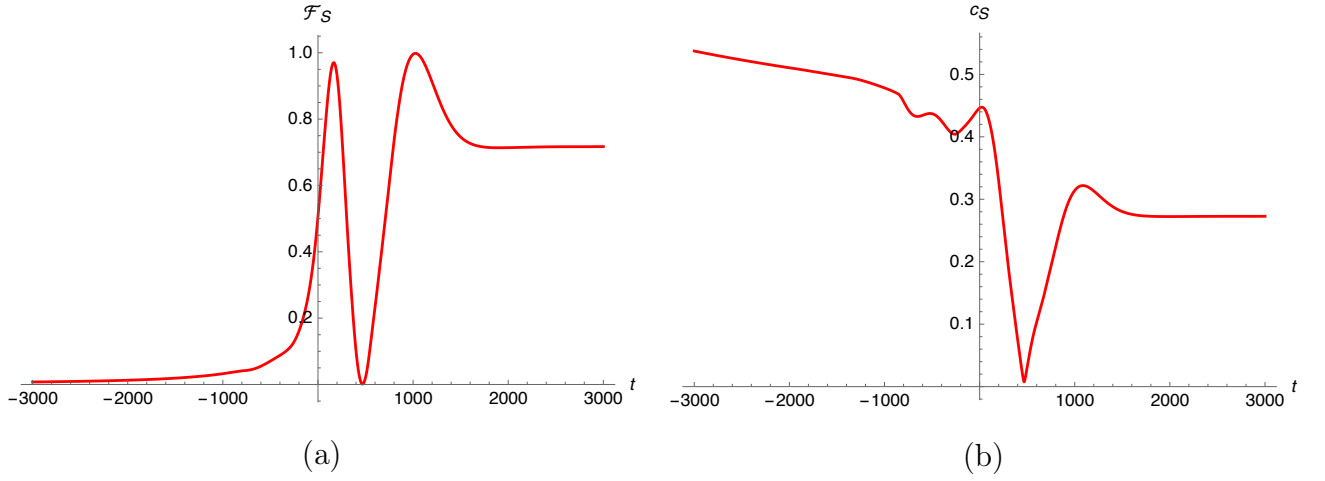


Рис. 14: Коэффициент  $\mathcal{F}_S$  (слева) и скорость скалярных возмущений  $c_S = \sqrt{\mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S}$  (слева) для модели из параграфа 2.3: генезис, сжатие и отскок. Единицы измерения — планковские.

В завершение этого пункта сделаем следующее замечание. Как мы указывали выше, гравитация в инфляционную эпоху еще не описывается обычной ОТО, поскольку  $z_1 \neq 0$  и, следовательно,  $A_4 \neq -B_4$ , см. уравнения (113с), (113d). Чтобы получить окончание инфляции, описываемое ОТО, нужно выбрать такое поведение функции  $z(t)$ , которое бы обеспечивало плавный переход с  $z = z_1$  на  $z = 0$ . Функция  $y(t)$  также имеет нетривиальный вид, поскольку она должна переходить с отрицательного значения  $y_1$  (см. (131)) на некоторое положительное значение  $y_2$ . Положительность  $y_2$  следует из выражения для  $\mathcal{F}_S$ , которое для  $z = 0$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}_S = \frac{3y_2}{4H_2 \cdot N_2^3 - 3y_2} > 0,$$

где  $N_2 > 0$  и  $H_2 > 0$  — функция хода и параметр Хаббла на инфляции, где уже работает обычная ОТО. Итак, примером соответствующих функции  $z(t)$  и  $y(t)$ , которые удовлетворяют всем изложенным выше требованиям, может быть

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1 \cdot (1 - U_{z_1}(t - t_{**})) , \\ y(t) &= y_1 \cdot (1 - U_{y_1}(t - t_{**})) + y_2 \cdot U_{y_1}(t - t_{**}) , \end{aligned}$$

где  $y_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $t_{**} = 1.8 \cdot 10^4$  и

$$U_{z_1}(t) = \ln\left(\frac{e^{-5.8 \cdot s \cdot (t-500)} + e^2}{e^{-5.8 \cdot s \cdot (t-500)} + e}\right),$$

$$U_{y_1}(t) = 1 + \ln\left(\frac{e^{3.8 \cdot s \cdot t} + e}{e^{3.8 \cdot s \cdot t} + e^2}\right).$$

Наконец, переход с инфляции, которая по завершении уже описывается ОТО, к эпохе с безмассовым скалярным полем, может быть реализован так же, как и в параграфе 2.1.

## 2.4 Стандартный генезис

Рассмотрим теперь такую модель Вселенной, в которой после генезиса сразу начинается инфляция. Во введении мы обсуждали, что такая конструкция позволяет дополнить модель инфляции, избавляя полную теорию от начальной сингулярности.

Обратимся к модели генезиса, предложенной в работе [88]. Как мы указали во введении и в главе 1, эта модель наивно находится в режиме сильной связи в далеком прошлом. В данном параграфе мы покажем, что она может быть свободна от патологий и что в более поздние времена может быть реализован устойчивый выход на инфляцию. Лагранжиан конструируемой модели будет практически такой же, как в [88] и в главе 1, но с другими параметрами (которые потребовалось ввести для успешного перехода на инфляцию). Итак, выберем для функции лагранжиана анзац (112), но с  $x = const$ ,  $y = const$  и  $z = 0$ , то есть

$$A_2 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-2-\delta} a_2(N), \quad (133a)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} f^{-2\mu-1-\delta} a_3(N), \quad (133b)$$

$$A_4 = -B_4 = -\frac{1}{2} f^{-2\mu}, \quad (133c)$$

где  $\mu > 0$ ,  $\delta > 0$  и

$$a_2(N) = x \cdot \left( \frac{1}{N^2} - \frac{1}{3N^4} \right),$$

$$a_3(N) = \frac{y}{N^3}.$$

Как и раньше, мы выбираем асимптотическое поведение функции  $f(t)$  как  $f = -ct$  ( $c > 0$ ) при  $t \rightarrow -\infty$ , и, используя уравнения движения (114), получаем генезис вида

$$H = \frac{\xi}{(-t)^{1+\delta}}, \quad N = 1, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (134)$$

где  $\xi$  задается как

$$\xi = \frac{3(2\mu + \delta + 1) \cdot c \cdot y - 2x}{12(2\mu + \delta + 1) \cdot c^{\delta+2}}.$$

Асимптотики коэффициентов из действия второго порядка по возмущениям, а также выражение для скорости скалярных возмущений имеют вид

$$\mathcal{F}_S = -(-c \cdot t)^{-2\mu+\delta} \cdot \frac{6c^2 \cdot (2\mu - \delta - 1) \cdot (2\mu + \delta + 1)}{x + 3c \cdot y \cdot (2\mu + \delta + 1)}, \quad (135)$$

$$\mathcal{G}_S = -(-c \cdot t)^{-2\mu+\delta} \cdot \frac{18 \cdot c^2 \cdot x \cdot (2\mu + \delta + 1)^2}{(x + 3c \cdot y \cdot (2\mu + \delta + 1))^2}, \quad (136)$$

$$c_S^2 = \frac{(2\mu - \delta - 1)(x + 3c \cdot y \cdot (2\mu + \delta + 1))}{3x \cdot (2\mu + \delta + 1)}. \quad (137)$$

Значения параметров выбираются из следующих соображений. Во-первых, необходимо обойти условия запрещающей теоремы из работы [88], а это возможно при

$$2\mu > 1 + \delta. \quad (138)$$

Во-вторых, мы требуем, чтобы классическое полевое описание модели было законно [103]. Это требование выполнено при

$$\mu + \frac{3}{2}\delta < 1. \quad (139)$$

В-третьих, Вселенная постепенно расширяется с ходом времени, а это обеспечивается следующим неравенством:

$$\xi > 0. \quad (140)$$



Наконец, модель должна быть свободна от градиентных неустойчивостей, а скорость возмущений не должна превышать скорость света. Для  $y > 0$  (что необходимо для выхода на инфляцию, см. обсуждение ниже), все эти условия удовлетворяются, если  $x < 0$  и

$$x < -3c \cdot y(2\mu + \delta + 1) . \quad (141)$$

Переход от генезиса к инфляции определяется поведением функции  $f(t)$ : она должна гладко перейти от асимптотического поведения  $-ct$  на  $t \rightarrow -\infty$  к  $f = 1$  на более поздних временах. Для  $f = 1$  уравнения движения (114) имеют вид:

$$x \left( \frac{1}{N^4} - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{9y \cdot H}{N^3} + 6H^2 = 0, \quad (142a)$$

$$x \left( \frac{1}{N^2} - \frac{1}{3N^4} \right) + 6H^2 = 0 , \quad (142b)$$

где мы снова обозначили не зависящее от времени решение этих уравнений как  $H = H_1$  и  $N = N_1$ . Потребуем для этих параметров  $H_1 > 0$ ,  $N_1 > 0$ . Условие отсутствия градиентных неустойчивостей и ограничение на скорость возмущений (не должна превышать скорость света), могут быть найдены из выражений (115). На стадии инфляции в данной модели эти условия выглядят как

$$\mathcal{F}_S = \frac{3y}{4H_1 \cdot N_1^3 - 3y} > 0, \quad (143a)$$

$$\mathcal{G}_S = \frac{8N_1^2 \cdot x \cdot (N_1^2 - 2) + 72H_1 \cdot N_1^3 \cdot y + 27y^2}{(4H_1 \cdot N_1^3 - 3y)^2} > 0, \quad (143b)$$

$$c_S^2 = \frac{3y \cdot (4H_1 \cdot N_1^3 - 3y)}{8N_1^2 \cdot x \cdot (N_1^2 - 2) + 72H_1 \cdot N_1^3 \cdot y + 27y^2} \leq 1, \quad (143c)$$

Как и в случае моделей, которые мы строили ранее, снова будем рассматривать  $H_1$  и  $N_1$  как независимые параметры и выразим  $x$  и  $y$  через них, используя (142);

получим тогда:

$$x = \frac{18H_1^2 \cdot N_1^4}{1 - 3N_1^2}, \quad (144a)$$

$$y = \frac{4H_1 \cdot N_1^3 \cdot (3N_1^2 - 2)}{(9N_1^2 - 3)}. \quad (144b)$$

Наконец, ограничения (141) и (143) сводятся к

$$N_1 > \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad (145a)$$

$$H_1 > \frac{2c \cdot (2\mu + \delta + 1) \cdot (3N_1^2 - 2)}{9N_1}. \quad (145b)$$

Используя выражения (144), из неравенств (145) можно получить ограничения на  $x$  и  $y$ . Легко убедиться в том, что (145) удовлетворяются, если  $y > 0$  и если  $x$  удовлетворяет (141).

Обратимся к конкретной численной модели. Пусть

$$\mu = 0.65, \quad \delta = 0.2.$$

Этот выбор согласован с неравенствами (138) и (139). Далее, выбираем

$$f(t) = \frac{c}{2} \left[ -t + \frac{\ln(2\cosh(st))}{s} \right] + 1,$$

$$c = 10^{-4}, \quad s = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Подходящие значения  $x$  и  $y$  мы получим, рассматривая инфляционную стадию.

Итак, выбираем  $H_1$  и  $N_1$  на инфляции как:

$$H_1 = 3.3 \cdot 10^{-3}, \quad N_1 = 1.02,$$

что согласуется с неравенствами (145). Выражения (144) дают

$$x = -10^{-4}, \quad y = 2.5 \cdot 10^{-3},$$

и неравенство (141) выполняется. Поведение параметра Хаббла, функции хода, функции  $\mathcal{F}_S$ , и скорость скалярных возмущений показаны на Рис. 15 и 16. В тензорном секторе для данной модели  $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T = f^{-2\mu} > 0$ ,  $ct = 1$ . Таким

образом, наша модель генезиса с последующей инфляцией полностью устойчива, не находится в режиме сильной связи на ранних временах; возмущения распространяются со скоростями, не превышающими скорость света.

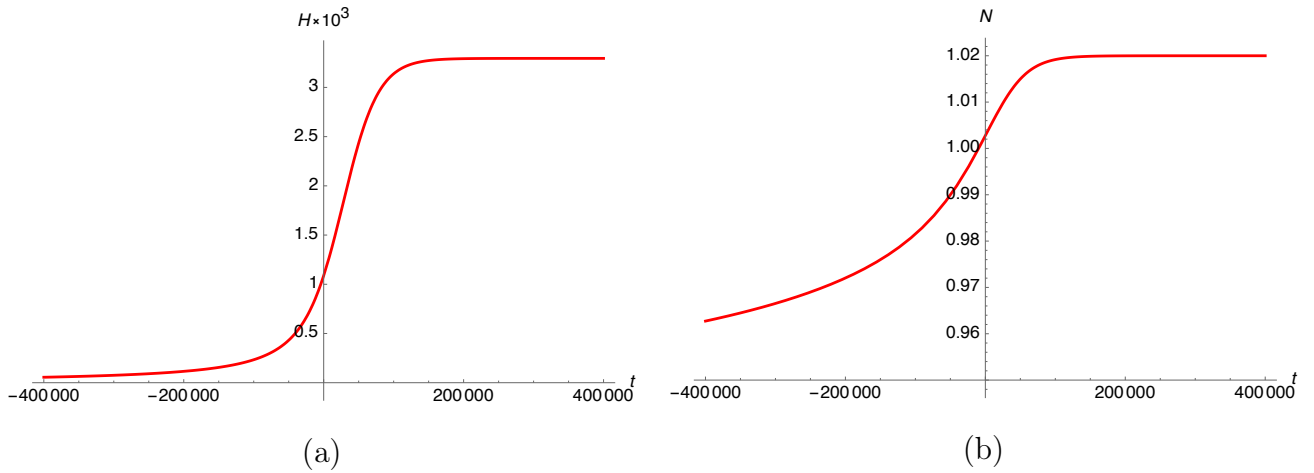


Рис. 15: Параметр Хаббла (слева) и функция хода (справа) для модели генезиса с выходом на инфляцию из параграфа 2.4.

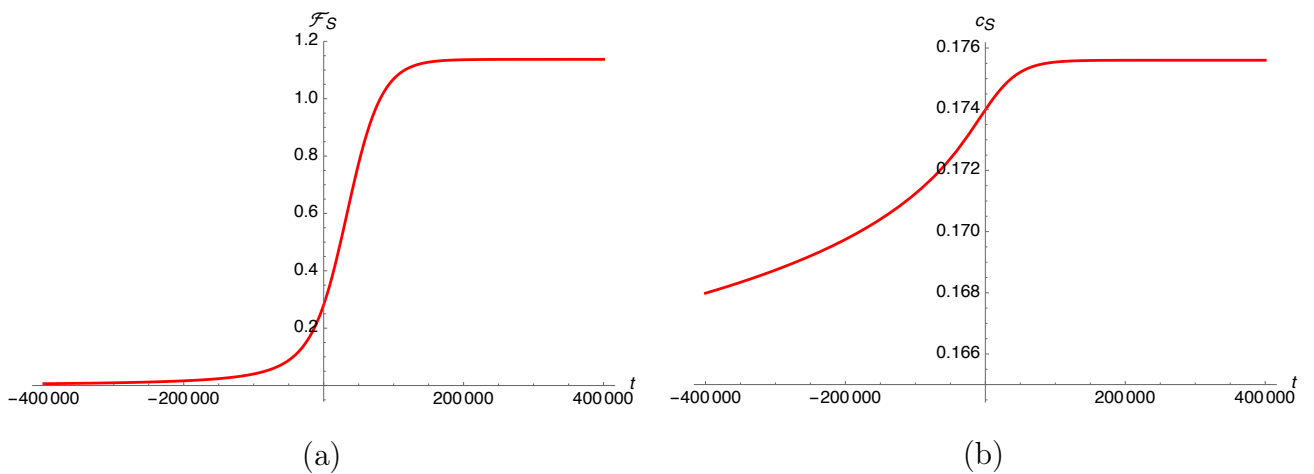


Рис. 16: Функция  $\mathcal{F}_S$  (слева) и скорость  $c_S = \sqrt{\mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S}$  (справа) для модели генезиса с выходом на инфляцию из параграфа 2.4.

### 3 Проблемы размерного анализа сильной связи

В предыдущих главах, в различных космологических моделях мы проводили размерный анализ проблемы сильной связи: находили и сравнивали характер-

ные энергетические масштабы — классический и энергию сильной связи. Наиболее подробно это было сделано нами в главе 1. Тем не менее такой подход может давать завышенную оценку энергетического масштаба сильной связи, что в свою очередь приводит к сильным ограничениям на параметры модели, хотя в реальности ограничения более слабые. Ниже мы покажем, что более того, размерный анализ проблемы сильной связи может приводить и к неправильным выводам. Для этого рассмотрим такой класс космологических моделей, в котором эволюция Вселенной начинается со сжатия (в системе координат Йордана, от англ. “Jordan frame”); пусть эти модели сжатия конформно связаны с инфляцией (в системе координат Эйнштейна, “Einstein frame”) [104]. Действие для модели со сжатием в системе координат Йордана имеет вид

$$\mathcal{S}_b = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ P(\phi, X) + \frac{M_P^2 f^2(\phi)}{2} R \right], \quad (146)$$

где

$$P(\phi, X) = \omega(\phi)X - V(\phi),$$

и  $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1/2}$  — масса Планка,  $R$  — скаляр Риччи и также

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi,$$

$$\omega(\phi) = f^2 - 6M_P^2 \left( \frac{df}{d\phi} \right)^2, \quad V(\phi) = f^4(\phi)V_I(\phi).$$

Здесь  $f(\phi)$  — еще неопределенная функция поля, а  $V_I(\phi)$  — потенциал поля в системе координат Эйнштейна. Все обозначения данной главы согласуются с обозначениями из работы [122], с точностью до переопределения  $F(\phi) = f^2(\phi)$ .

Совершая конформное преобразование метрики

$$g_{\mu\nu} = f^{-2}(\phi)g_{I\mu\nu}$$

теория с действием (146) переходит в Эйнштейновскую систему координат и действие там имеет вид:

$$S_I = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_I} \left[ M_P^2 R_I - g_I^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V_I(\phi) \right],$$

которое в свою очередь описывает инфляционную эпоху (в системе координат Эйнштейна); индекс “ $I$ ” относится к величинам в системе координат Эйнштейна.

### 3.1 Инфляция в системе координат Эйнштейна

Будем рассматривать в нашей модели такой потенциал, который при больших значениях поля выходит на некоторое постоянное значение, то есть

$$V_I(\phi) \rightarrow V_\infty, \quad \text{при } \phi \rightarrow \infty; \quad V_\infty \ll M_{Pl}^4, \quad (147)$$

так что *плотность энергии всегда меньше планковской* и проблемы сильной связи здесь не возникает. Другими словами, в системе координат Эйнштейна классическое полевое описание фонового решения расширяющейся Вселенной (так же как и стандартное квантово-полевое описание космологических возмущений над фоновым решением) законно. Инфляция происходит в режиме медленного скатывания на ранних временах, то есть имеем  $\epsilon \ll 1$ ,  $\eta \ll 1$ , где использованы стандартные обозначения:

$$\epsilon = \frac{(V'_I)^2 M_P^2}{2V^2}, \quad \eta = \frac{V''_I M_P^2}{V}. \quad (148)$$

Соответствующие уравнения движения приводят к известным в теории инфляции результатам

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = -\frac{M_P V'_I}{\sqrt{3V_I}}, \quad H_I = \sqrt{\frac{V_I}{3}} \frac{1}{M_P}, \quad (149)$$

где  $\tau$  — космическое время в системе Эйнштейна.

### 3.2 Сжатие в системе координат Йордана

Далее для наших целей нужно перейти из системы координат Эйнштейна в систему координат Йордана. Для этого совершим конформное преобразование метрики. Последнее определяется функцией  $f$ , которую выберем как в работе

[104], а именно:

$$f(\phi) = f_0 \exp \left[ -\frac{(\alpha + 1)}{M_P^2} \int d\phi \frac{V_I}{V_I'} \right], \quad \alpha > 0,$$

где  $f_0$  — некоторая константа (ее конкретное значение не играет никакой роли для дальнейших рассуждений). Тогда метрика в системе координат Йордана имеет вид

$$ds^2 = f^{-2}(\phi(\tau))d\tau^2 - f^{-2}(\phi(\tau))a_I^2(\tau)d\mathbf{x}^2,$$

а параметр Хаббла

$$H = \frac{1}{(f^{-1}a_I)} \frac{d}{f^{-1}d\tau}(f^{-1}a_I) = f \frac{d}{d\tau} \ln(a_I f^{-1}) = -f \cdot \frac{\alpha}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{V_I}{3}}, \quad (150)$$

где мы воспользовались уравнениями (149). В системе координат Йордана масштабный фактор имеет вид  $a_J \equiv f^{-1}a_I$ , то есть расстояние между двумя удаленными объектами в такой Вселенной пропорционально  $a_J$ ; также  $f^{-2}d\tau^2$  — это квадрат дифференциала космического времени в системе Йордана. Вселенная в системе координат Йордана сжимается.

Стоит подчеркнуть, что  $f \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, согласно (150), в асимптотическом прошлом параметр Хаббла стремится к нулю в системе координат Йордана. Эффективная масса Планка в этой системе равна  $M_{Pl}^{(eff)} = fM_{Pl}$  также стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . Это является сигналом о том, что на очень ранних временах теория может находиться в режиме сильной связи и классическое описание решения неприменимо. В следующих параграфах мы рассматриваем эту проблему подробнее.

### 3.3 Проблема сильной связи: размерный анализ

Теперь будем проводить все рассуждения и вычисления в системе координат Йордана.

Рассмотрим для простоты только скалярные возмущения над фоновым решением (150). Будем работать в унитарной калибровке:

$$\delta\phi = 0,$$

и тогда возмущенная метрика <sup>10</sup> имеет вид

$$ds^2 = -[(1 + \alpha)^2 - a^{-2}e^{-2\zeta}(\partial\psi)^2]dt^2 + 2\partial_i\psi dt dx^i + a^2 e^{2\zeta} d\mathbf{x}^2 ,$$

где  $\alpha$  и  $\psi$  — возмущения для функции хода и сдвига. Действие второго порядка по возмущениям содержит слагаемые с  $\alpha$ ,  $\psi$  и  $\zeta$ ; в данной модели снова можно проварьировать это действие по  $\alpha$  и  $\psi$ , получить уравнения связи, выразить из них эти  $\alpha$  и  $\psi$  (то есть получить аналог (32)), подставить назад в действие и прийти к действию только для возмущения  $\zeta$ . Последнее имеет вид [106, 122]:

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \mathcal{G}_S \left[ \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} \right] ,$$

где

$$\mathcal{G}_S = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H_I^2} = \frac{f^2}{2H_I^2} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 . \quad (151)$$

Эти выражения точные, здесь не используются какие-либо приближения. Формула (151) аналогична известному результату для инфляционной модели, но здесь она содержит множитель  $f^2$ , который и указывает на то, что мы работаем в системе координат Йордана. Подставляя решения (149) в режиме медленного скатывания, получим

$$\mathcal{G}_S = f^2 \cdot \frac{M_P^4 (V_I')^2}{2V_I^2} .$$

Заметим, что возмущения распространяются со скоростями, меньшими, чем скорость света. Это вновь указывает на то, что мы лишь переформулируем известные результаты для инфляции в системе координат Эйнштейна в выражения для системы координат Йордана (где Вселенная сжимается).

Рассмотрим теперь действие третьего порядка для скалярных возмущений. Для модели (146) такое действие имеет вид

$$\mathcal{S}^{(3)} = \int dt d^3x a^3 \left\{ c_1 \zeta \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{a^2} c_2 \zeta (\partial\zeta)^2 + c_4 \dot{\zeta} (\partial_i \zeta) (\partial_i \mathcal{X}) + c_5 \partial^2 \zeta (\partial \mathcal{X})^2 \right\} , \quad (152)$$

---

<sup>10</sup>В данном параграфе нам удобнее придерживаться обозначений из работы [122], но метрика в таком виде эквивалентна возмущенной метрике (9) с (17)

и оно содержит существенно меньше слагаемых, чем действие (48) из главы 1. Это связано как с простотой текущей модели (146), так и с тем, что часть коэффициентов в действии третьего порядка равны нулю на уравнениях движения. Также часть слагаемых можно упростить и объединить за счет переопределения поля, см. [106, 122, 123]. В выражении (152)  $\partial^2 = \partial_i \partial_i$  и  $\partial^2 \mathcal{X} = \dot{\zeta}$ . Используя формулы из работы [122], можно получить выражения для всех коэффициентов  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ . Мы сразу выписываем формулы в ведущем по параметрам медленного скатывания порядке:

$$\mathcal{C}_1 = f^2 \cdot \frac{M_P^6 (V_I')^2}{4V_I^4} (4V_I V_I'' - 3(V_I')^2), \quad (153a)$$

$$\mathcal{C}_2 = f^2 \cdot \frac{M_P^6 (V_I')^2}{4V_I^4} (5(V_I')^2 - 4V_I V_I''), \quad (153b)$$

$$\mathcal{C}_4 = f^2 \frac{M_P^6 (V_I')^4}{16V_I^6} (M_P^2 (V_I')^2 - 8V_I^2), \quad (153c)$$

$$\mathcal{C}_5 = f^2 \frac{M_P^8 (V_I')^6}{32V_I^6}. \quad (153d)$$

Используя полученные формулы для действий квадратичного и кубического порядков по возмущениям, проведем далее размерный анализ (аналогичный тому, что проводился в прошлых главах) проблемы сильной связи в текущей модели.

Запишем сперва классический масштаб энергий, который определяется параметром Хаббла (150) и имеет вид:

$$|E^{(class)}| = |H| \sim \frac{f \sqrt{V_I}}{M_P}. \quad (154)$$

Далее, чтобы получить из размерного анализа характерный масштаб энергии сильной связи, мы зададим для простоты, что в каждый момент времени  $a = 1$  и также введем канонически нормированное поле как

$$\zeta_c = \sqrt{2\mathcal{G}_S} \zeta.$$

В терминах канонически нормированного поля  $\zeta_c$ , действие третьего порядка



по-прежнему имеет вид (152), но с заменой коэффициентов на

$$\tilde{\mathcal{C}}_i = (2\mathcal{G}_S)^{-3/2} \mathcal{C}_i .$$

Новые коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_1 &= \frac{1}{f} \cdot \frac{(-3(V'_I)^2 + 4V_I V''_I)}{4V_I V'_I}, \\ \tilde{\mathcal{C}}_2 &= \frac{1}{f} \cdot \frac{(5(V'_I)^2 - 4V_I V'_I)}{4V_I V'_I}, \end{aligned}$$

и, также

$$\tilde{\mathcal{C}}_4 \sim \frac{1}{f} \cdot \frac{V'_I}{V_I}, \quad \tilde{\mathcal{C}}_5 \sim \frac{1}{f} \cdot M_P^2 \left( \frac{V'_I}{V_I} \right)^3 . \quad (155)$$

Легко убедиться в том, что все операторы в действии третьего порядка для канонически нормированного поля  $\zeta_c$  имеют размерность 5, поэтому соответствующие масштабы энергии сильной связи можно “наивно” оценить как

$$E_i^{(naive)} \sim |\tilde{\mathcal{C}}_i|^{-1} .$$

Как и раньше, мы полагаем, что самые сильные ограничения будут получаться от самых низких энергетических масштабов (которые связаны с наибольшими  $\mathcal{C}_i$ ).

Для потенциала скалярного поля на инфляции (147), который выходит на постоянное значение при больших значениях поля, как правило, выполняется  $\eta \gg \epsilon$ . Поэтому самые большие коэффициенты из (153) — это  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$ . Связанный с ними масштаб энергии (одинаковый для  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$ ) равен

$$E^{(naive)} \sim f \frac{V'_I}{V''_I}. \quad (156)$$

В зависимости от конкретного вида потенциала  $V_I$ , классический масштаб (154) может и превышать энергию сильной связи (156). В качестве такого примера рассмотрим

$$V_I = V_\infty \left( 1 - e^{\phi^2/\mu^2} \right) ,$$

и тогда, используя (154) и (156) получаем отношение масштабов в виде

$$\frac{E^{(naive)}}{E^{(class)}} \sim \frac{\mu^2}{\phi H_I},$$

что становится меньше единицы при больших значениях поля  $\phi$ , что означает то, что теория находится в режиме сильной связи на соответствующих большому полю временах.

Итак, мы увидели, что “наивный” размерный анализ в системе координат Йордана предполагает, что теория (в зависимости от конкретного вида потенциала  $V_I$ ) может находиться в режиме сильной связи, то есть характерный энергетический масштаб сильной связи может оказаться ниже, чем классический. Можно было бы сразу закрыть такую модель сжимающейся Вселенной, если бы не наши рассуждения в параграфе 3.1 о том, что рассмотренная модель инфляции никогда не попадает в режим сильной связи. Мы также указывали, что эта модель инфляции связана конформно с рассмотренной выше моделью сжимающейся Вселенной (в системе координат Йордана), и значит никакого режима сильной связи в ней быть не может. Тем не менее размерный анализ дает противоположный результат.

В заключение этого параграфа заметим, что коэффициенты  $\tilde{\mathcal{C}}_4$  и  $\tilde{\mathcal{C}}_5$  в любом случае меньше, чем  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{C}}_2$ , см. (155). Связанные с ними масштабы энергии сильной связи при больших значениях поля  $\phi$  будут намного выше, чем масштаб (154), полученный по  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{C}}_2$ . Иными словами, третье и четвертое слагаемые в действии (152) сами по себе не приводят к проблеме сильной связи, даже из размерного анализа. Поэтому далее, в точном анализе проблемы сильной связи по амплитудам рассеяния, эти слагаемые ( $\mathcal{C}_4$  и  $\mathcal{C}_5$ ) рассмотрены не будут.

### 3.4 Проблема сильной связи: анализ амплитуд рассеяния

Так как размерный анализ в параграфе 3.3 привел нас к заведомо неправильному результату, необходимо найти точные характерные масштабы энергии сильной связи. Рассматривая слагаемые с коэффициентами  $\mathcal{C}_{1,2}$  в действии третьего

порядка (152) (где  $\mathcal{C}_{1,2}$  заменяются на  $\tilde{\mathcal{C}}_{1,2}$  и возмущение  $\zeta$  — на канонически нормированное  $\zeta_c$ ), легко можно вычислить амплитуду рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в такой теории. Прежде чем перейти к правильным вычислениям, где мы учтем оба слагаемых, рассмотрим сперва  $\tilde{\mathcal{C}}_2 = 0$ ; матричный элемент в таком случае записывается как

$$M_{\tilde{\mathcal{C}}_1; \tilde{\mathcal{C}}_2=0} = -\frac{E^2}{f^2} \cdot \frac{(9x^2 - 5)(3(V_I')^2 - 4V_I V_I'')^2}{64(x^2 - 1)V_I^2(V_I')^2},$$

где  $x = \cos \theta$ , а  $\theta$  — угол рассеяния. Если бы это был правильный матричный элемент, то наш результат из размерного анализа подтвердился бы и здесь: парциальные амплитуды, определяемые выражением

$$a^{(l)} = \frac{1}{32\pi} \int dx P_l(x) M_{\tilde{\mathcal{C}}_1; \tilde{\mathcal{C}}_2=0},$$

где  $P_l$  — полиномы Лежандра, при  $E \sim E^{(naive)}$  могли бы достичь границы унитарности  $|a^{(l)}| = 1/2$ , см. [102] и главу 4. Точно такой же результат получается, если положить теперь  $\tilde{\mathcal{C}}_1 = 0$ .

Однако, тонкость заключается в том, что в теории присутствуют серьезные сокращения между определенными слагаемыми в выражениях ниже. Действительно, рассмотрим элементы матрицы рассеяния в  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -каналах; они равны, соответственно

$$\begin{aligned} M_s &= -\frac{E^2}{4}(3\tilde{\mathcal{C}}_1 + \tilde{\mathcal{C}}_2)^2, \\ M_t &= \frac{E^2}{2(1-x)} \left[ \tilde{\mathcal{C}}_1 + \tilde{\mathcal{C}}_2(2-x) \right]^2, \\ M_u &= \frac{E^2}{2(1+x)} \left[ \tilde{\mathcal{C}}_1 + \tilde{\mathcal{C}}_2(2+x) \right]^2. \end{aligned}$$

Итоговый матричный элемент равен

$$M = M_s + M_t + M_u = \frac{E^2}{f^2} \cdot \frac{(41x^2 - 45)(V_I')^2 - 40(x^2 - 1)V_I V_I''}{16(x^2 - 1)V_I^2}, \quad (157)$$

откуда получаем, что энергетический масштаб сильной связи на самом деле

равен <sup>11</sup>

$$E^{(strong)} \sim f \cdot \left( \frac{V_I}{V_I''} \right)^{1/2} \sim f \cdot \frac{M_P}{\eta^{1/2}},$$

где  $\eta$  — параметр медленного скатывания (148). Как и ожидалось, этот масштаб намного выше, чем классический (154) при  $V_I \ll M_P^4$ .

Итак, вычисления амплитуд рассеяния и соответствующих энергий подтверждают, что в теории, которая конформно связана с моделью инфляции из параграфа 3.1, проблема сильной связи отсутствует. Более детально получение унитарных соотношений и унитарных границ, которые мы использовали выше для нахождения точного энергетического масштаба сильной связи обсуждаются в главе 4.

---

<sup>11</sup>Мы по-прежнему считаем, что  $V_I V_I'' \gg (V_I')^2$  (что следует из  $\eta \gg \epsilon$ ); слагаемое с множителем  $(V_I')^2$  в (157) в числителе требует дополнительного исследования, ведь мы также пренебрегли и слагаемыми с коэффициентами  $C_{4,5}$  в действии третьего порядка (152), а они могут внести дополнительные сокращения.

## 4 Соотношение унитарности и унитарные ограничения и их применение для анализа проблемы сильной связи

В данной главе мы получим соотношения унитарности для парциальных амплитуд процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$  с учетом вклада промежуточных двухчастичных состояний. Используя эти соотношения, получим также унитарные ограничения (границы) как в самом общем случае, так и в случае, уже рассмотренном в литературе, со скоростью звука, равной единице. Данные ограничения можно использовать для оценки масштаба сильной связи в соответствующей эффективной теории поля.

Итак, будем придерживаться обозначений как в работе [98] и получим соотношения унитарности для процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в теориях скалярных полей  $\phi_i$  с различными скоростями звука  $u_i$ . Рассмотрим безмассовую теорию (либо пренебрегаем массами, если они есть у частиц). Пусть квадратичное действие для скалярных полей в нашей теории имеет

$$S = \sum_i S_{\phi_i}, \quad S_{\phi_i} = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2 - \frac{1}{2} u_i^2 (\vec{\nabla} \phi_i)^2 \right).$$

Линеаризованное уравнение движения для  $\phi_i$  имеет вид

$$\ddot{\phi}_i - u_i^2 \Delta \phi_i = 0,$$

и его решение может быть записано как

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{p}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_i}}} \left( a_{\vec{p}_i} e^{-iE_{p_i}t + i\vec{p}_i\vec{x}} + a_{\vec{p}_i}^\dagger e^{iE_{p_i}t - i\vec{p}_i\vec{x}} \right),$$

где

$$E_{p_i} = u_i p_i, \tag{158}$$

и операторы уничтожения и рождения  $a_{\vec{p}_i}$  и  $a_{\vec{p}_i}^\dagger$ , соответственно, подчиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[a_{\vec{p}'_i}, a_{\vec{p}_j}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'_i - \vec{p}_j) \delta_{ij}, \tag{159}$$

а все остальные коммутаторы равны нулю. Определим одночастичное состояние как

$$|\vec{p}_i\rangle \equiv \sqrt{2E_{p_i}} a_{\vec{p}_i}^\dagger |0\rangle ,$$

так что можно записать следующее соотношение

$$\langle 0|\phi_i(\vec{x}, t)|\vec{p}_j\rangle = e^{-iE_{p_j}t+i\vec{p}_j\vec{x}}\delta_{ij} .$$

Нормировка одночастичного состояния равна

$$\langle \vec{p}'_j|\vec{p}_i\rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2E_{p'_j}2E_{p_i}}\delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}'_j)\delta_{ij} , \quad (160)$$

кроме того, для  $i$ -ого одночастичного состояния запишем еще разложение

$$\mathbb{1} = \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_{p_i}} |\vec{p}_i\rangle \langle \vec{p}_i| .$$

Напомним, что  $S$ -матрица равна

$$S = \mathbb{1} + iT ,$$

где  $T$ -матрица обычно выражается через формально записанный через дельта-функцию закон сохранения энергии-импульса и  $M$ -матрицу (матричный элемент) как

$$T = (2\pi)^4 \delta^4(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) M , \quad (161)$$

где  $\mathcal{P}^\mu = \sum p_{in}^\mu$  и  $\mathcal{P}^{\mu'} = \sum p_{out}^\mu$  — суммарный 4-импульс начального и конечного состояний, соответственно.

Введем начальное состояние как

$$|\psi, \beta\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle , \quad (162)$$

в котором две частицы с импульсами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , и конечное состояние  $|\psi', \beta'\rangle$  с двумя частицами с импульсами  $\vec{p}_1'$  и  $\vec{p}_2'$ . Здесь  $\beta$  обозначает тип частиц, то есть  $\beta = \{\phi_i, \phi_j\}$ , в то время как  $\psi$  — это обозначение для пары импульсов частиц,  $\psi = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ . Таким образом, можем записать

$$|\psi, \beta\rangle = |\phi_i, \vec{p}_1\rangle \otimes |\phi_j, \vec{p}_2\rangle . \quad (163)$$

В формуле (162) мы также не указываем явно тип частиц и для простоты вводим  $a_{p_1}^\dagger \equiv a_{i p_1}^\dagger$ .

Итак, наша дальнейшая цель — вывести соотношения унитарности для парциальных амплитуд процессов.

## 4.1 Соотношения унитарности: различные частицы

Пусть частицы в паре  $\beta = \{\phi_i, \phi_j\}$  различимы. Ниже мы также рассмотрим и случай одинаковых частиц.

Скалярное произведение состояний  $|\psi', \beta'\rangle$  и  $|\psi, \beta\rangle$  имеет вид

$$\langle \psi', \beta' | \psi, \beta \rangle = (2\pi)^6 2E_{p_1} 2E_{p_2} \delta^{(3)}(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \delta_{\beta'\beta}, \quad (164)$$

что следует из нормировки одночастичного состояния (160). Далее будем работать в системе центра масс. Обозначим  $\vec{p} \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ,  $p \equiv |\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ . Пусть также  $\hat{p} = \vec{p}/p$  — это единичный вектор по направлению  $\vec{p}$  и  $\theta, \phi$  — соответствующие углы. Сделаем замену переменных: от  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  из формулы (164) перейдем к  $\mathcal{P}^\mu \equiv p_1^\mu + p_2^\mu$ ,  $\theta$  и  $\phi$ . В системе центра масс можно записать, что  $\mathcal{P}^\mu \approx (E, 0)$ , где  $E = (u_{1\beta} + u_{2\beta})p$  и  $u_{1\beta} \equiv u_i$ ,  $u_{2\beta} \equiv u_j$  являются скоростями звука двух частиц из пары  $\beta = \{\phi_i, \phi_j\}$ . Далее, запишем элемент объема в импульсном пространстве как

$$d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 = d^3\vec{\mathcal{P}} p^2 dp d\hat{p} = \frac{p^2}{(u_{1\beta} + u_{2\beta})} d^4\mathcal{P}^\mu d\hat{p},$$

откуда получаем, что

$$\delta^{(3)}(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \delta_{\beta\beta'} = \frac{(u_{1\beta} + u_{2\beta})}{p^2} \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \delta_{\beta\beta'},$$

и, следовательно,

$$\langle \psi', \beta' | \psi, \beta \rangle = (2\pi)^6 \cdot 4u_{1\beta} u_{2\beta} (u_{1\beta} + u_{2\beta}) \cdot \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \delta_{\beta\beta'}. \quad (165)$$

Теперь введем двухчастичное состояние с определенным угловым моментом в системе центра масс. Мы хотим рассмотреть именно такое состояние, так

как известно, что соотношения унитарности имеют особенно простой вид для парциальных амплитуд, см. [98–101]. Итак, соответствующее состояние задается как

$$|l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{p} Y_l^m(\hat{p}) |\psi, \beta\rangle, \quad (166)$$

где интегрирование ведется по единичной сфере, а  $Y_l^m$  — это сферическая функция, которая имеет вид

$$Y_l^m(\hat{p}) = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} e^{im\phi} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_{l|m|}(\cos\theta),$$

и для этих функций выполняется условие ортонормированности

$$\int d\hat{p} Y_l^m(\hat{p}) Y_{l'}^{m'*}(\hat{p}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (167)$$

Также отметим, что  $l$  — это стандартное обозначение углового момента, а  $m$  — его проекция на некоторую ось. Скалярное произведение введенных выше состояний можно найти, используя (165); тогда получаем

$$\langle l', m', \mathcal{P}^{\mu'}, \beta' | l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta \rangle = 4\pi u_{1\beta} u_{2\beta} (u_{1\beta} + u_{2\beta}) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\beta\beta'}.$$

Таким образом, разложение единичного оператора имеет вид

$$\mathbb{1} = \int d^4\mathcal{P} \sum_{l,m,\beta} |l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta\rangle \langle l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta| \frac{1}{N(\beta)} + \dots, \quad (168)$$

где суммирование идет по всем двухчастичным состояниям, и

$$N(\beta) \equiv 2(2\pi)^5 u_{1\beta} u_{2\beta} (u_{1\beta} + u_{2\beta}). \quad (169)$$

Многоточие в разложении (168) означает слагаемые с многочастичными состояниями. Мы не учитываем эти слагаемые в дальнейших рассуждениях и вычислениях; тем не менее, ниже мы обсудим, как именно такие слагаемые влияют на соотношения унитарности.

Рассмотрим теперь следующий матричный элемент процесса рассеяния [124, 125]

$$T_{m'\beta'; m\beta}^{(l)} = \langle l, m', \mathcal{P}^{\mu'}, \beta' | T | l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta \rangle,$$



который равен

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{p} \int d\hat{p}' Y_l^m(\hat{p}) Y_l^{m'*}(\hat{p}') \langle \psi', \beta' | T | \psi, \beta \rangle .$$

В силу вращательной симметрии,  $T$ -матрица не равна нулю только в случае  $m' = m$  и сама не зависит от  $m$ , см. [124, 125]. Значит, мы можем записать, что

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = \delta_{m'm} \sum_{\tilde{m}=-l}^l \frac{T_{\tilde{m}\beta';\tilde{m}\beta}^{(l)}}{2l+1}.$$

Воспользуемся теперь теоремой сложения для сферических гармоник, которая гласит, что полином Лежандра  $l$ -го порядка, зависящий от угла  $\gamma$ , выражается через произведения сферических функций следующим образом [126]

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\hat{p}') Y_l^m(\hat{p}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma) ,$$

где угол  $\gamma$  определяется как  $\gamma \equiv \angle(\hat{p}', \hat{p})$ , то есть это угол между импульсами.

Тогда получим

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = \frac{\delta_{m'm}}{16\pi^2} \int d\hat{p} \int d\hat{p}' P_l(\cos \gamma) \langle \psi', \beta' | T | \psi, \beta \rangle ,$$

где опять же в силу вращательной симметрии выражение  $\langle \psi', \beta' | T | \psi, \beta \rangle$  не зависит от углов (кроме  $\gamma$ ). Благодаря этому свойству, проинтегрируем последнее выражение по углам; приходим к

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = \frac{\delta_{m'm}}{2} \int d(\cos \gamma) \cdot P_l(\cos \gamma) \langle \psi', \beta' | T | \psi, \beta \rangle .$$

Используя (161), получаем

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \frac{\delta_{m'm}}{2} \int d(\cos \gamma) \cdot P_l(\cos \gamma) M_{\beta'\beta} .$$

Наконец, парциальная амплитуда определяется как

$$a_{l,\beta'\beta} = \frac{1}{32\pi} \int d(\cos \gamma) \cdot P_l(\cos \gamma) M_{\beta'\beta}, \quad (170)$$

а  $T$ -матрицу можно записать как

$$T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = 16\pi \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta_{m'm} a_{l,\beta'\beta}. \quad (171)$$

Получим теперь соотношения унитарности. Унитарность  $S$ -матрицы,  $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$ , приводит к соотношению

$$T - T^\dagger = iTT^\dagger = iT^\dagger T.$$

Вставляя в правую часть разложение (168), получим

$$-i \left( T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} - T_{m\beta;m'\beta'}^{(l)*} \right) = \int d^4\mathcal{P}'' \sum_{m'',\beta''} \frac{1}{N(\beta'')} T_{m'\beta';m''\beta''}^{(l)} T_{m\beta;m''\beta''}^{(l)*}. \quad (172)$$

Чтобы получить соотношение унитарности в терминах парциальных амплитуд  $a_l$ , воспользуемся формулой (171), а также определением  $N(\beta)$ , заданного в (169); приходим окончательно к

$$-\frac{i}{2} (a_{l,\alpha\beta} - a_{l,\beta\alpha}^*) = \sum_{\gamma} \frac{2}{u_{1\gamma} u_{2\gamma} (u_{1\gamma} + u_{2\gamma})} a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\beta\gamma}^*,$$

где  $u_{1\gamma}$  и  $u_{2\gamma}$  — скорости звука частиц в промежуточном состоянии  $\gamma$ .

Весьма часто также предполагается и инвариантность относительно времени, что приводит к  $T_{m'\beta';m\beta}^{(l)} = T_{m\beta;m'\beta'}^{(l)}$ , и значит  $a_{l,\alpha\beta} = a_{l,\beta\alpha}$ . (см. Приложение D, а также работы [124, 125]). В этом случае соотношение унитарности приобретает вид

$$\text{Im } a_{l,\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \frac{2}{u_{1\gamma} u_{2\gamma} (u_{1\gamma} + u_{2\gamma})} a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\gamma\beta}^*.$$

Для  $u_{1\gamma} = u_{2\gamma} = 1$  это соотношение совпадает с известным (смотреть например, работы [98, 127]).

## 4.2 Соотношение унитарности: неразличимые частицы

Теперь мы рассмотрим случай одинаковых частиц в паре  $\beta$ . Определим состояние с двумя частицами следующим образом:

$$|\psi, \beta\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle,$$

где  $\beta = \{\phi_i, \phi_i\}$ , а коммутационное соотношение дается (159). В случае одинаковых частиц нормировка двухчастичного состояния отличается от (164) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \psi', \beta' | \psi, \beta \rangle &= (2\pi)^6 2E_{p_1} 2E_{p_2} \left( \delta^{(3)}(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \right. \\ &\left. + \delta^{(3)}(\vec{p}_2' - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_1' - \vec{p}_2) \right) \delta_{\beta\beta'}. \end{aligned} \quad (173)$$

Проделаем тогда вычисления, аналогичные тем, что были сделаны в параграфе 4.1. Соответствующая замена переменных в (173) приводит к выражению

$$\langle \psi', \beta' | \psi, \beta \rangle = (2\pi)^6 \cdot 8u_\beta^3 \cdot \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \left( \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) + \delta^{(2)}(\hat{p}' + \hat{p}) \right) \delta_{\beta\beta'},$$

где  $u_\beta \equiv u_i$  — скорость звука частицы  $\phi_i$ . Состояния с определенным угловым моментом были определены как (166), а скалярное произведение этих состояний в случае одинаковых частиц имеет вид

$$\begin{aligned} \langle l', m', \mathcal{P}^{\mu'}, \beta' | l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int d\hat{p} (2\pi)^2 \cdot 8u_\beta^3 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta_{\beta\beta'} \\ &\times \left( Y_l^m(\hat{p}) Y_l^{m'*}(\hat{p}) + Y_l^m(\hat{p}) Y_l^{m'*}(-\hat{p}) \right). \end{aligned} \quad (174)$$

Так как для идентичных скалярных частиц величина  $l$  всегда принимает четное значение<sup>12</sup>, будем рассматривать только четные  $l$  в этом параграфе. Используя свойства сферических функций, а именно формулы (167) и (D.2a), получаем

$$\langle l', m', \mathcal{P}^{\mu'}, \beta' | l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta \rangle = 2\pi \cdot 8u_\beta^3 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{\mu'} - \mathcal{P}^\mu) \delta_{l'l'} \delta_{mm'} \delta_{\beta\beta'},$$

а вклад двухчастичных состояний с одинаковыми частицами в разложение единичного оператора имеет вид

$$\mathbb{1} = \int d^4\mathcal{P} \sum_{l,m,\beta} |l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta\rangle \langle l, m, \mathcal{P}^\mu, \beta| \frac{1}{N_{\text{identical}}(\beta)} + \dots,$$

где  $N_{\text{identical}}(\beta)$  равно

$$N_{\text{identical}}(\beta) \equiv (2\pi)^5 \cdot 8u_\beta^3.$$

<sup>12</sup>Это можно увидеть также из формулы (174): интеграл в правой части равен нулю для нечетных  $l$ .

Заметим, что  $N_{\text{identical}}(u_\beta) = 2N(u_{1\beta}, u_{2\beta})|_{u_{1\beta}=u_{2\beta}=u_\beta}$ , где  $N$  определяется (169); таким образом, если скорости частиц равны, то нормировочный коэффициент будет вдвое больше для одинаковых частиц по сравнению со случаем различных частиц. Повторяя вычисления из параграфа 4.1, находим, что вклад в соотношение унитарности для парциальных амплитуд от промежуточных состояний  $\gamma$  с двумя идентичными частицами имеет вид

$$-\frac{i}{2} (a_{l,\alpha\beta} - a_{l,\beta\alpha}^*) = \sum_{\gamma} \frac{1}{2u_\gamma^3} a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\beta\gamma}^* + \dots$$

Если теория  $T$ -инвариантна (инверсия времени), то

$$\text{Im } a_{l,\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \frac{1}{2u_\gamma^3} a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\gamma\beta}^* + \dots$$

Это согласуется с результатами из работ [101, 127]: если скорости частиц равны, то вклад одинаковых частиц в промежуточные состояния содержит дополнительный множитель  $1/2$  по сравнению со случаем различных частиц.

### 4.3 Унитарные ограничения

Объединим результаты параграфов 4.1 и 4.2 и запишем соотношение унитарности следующим образом:

$$-\frac{i}{2} (a_{l,\alpha\beta} - a_{l,\beta\alpha}^*) = \sum_{\gamma} g_\gamma a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\beta\gamma}^*, \quad (175)$$

где

$$g_\gamma = \frac{2}{u_{5\gamma} u_{6\gamma} (u_{5\gamma} + u_{6\gamma})} \quad \text{различные частицы,} \quad (176a)$$

$$g_\gamma = \frac{1}{2u_\gamma^3} \quad \text{идентичные частицы,} \quad (176b)$$

где выражения (176a) и (176b) соответствуют различным и идентичным частицам в двухчастичном промежуточном состоянии, соответственно. Вклады, обусловленные многочастичными промежуточными состояниями мы пока опускаем. Заметим также, что выражение (175) может быть записано в матричном

виде, а именно

$$-\frac{i}{2}(a_l - a_l^\dagger) = a_l g a_l^\dagger, \quad (177)$$

где  $g$  — диагональная матрица с элементами  $g_\gamma$ .

Теперь, чтобы получить унитарные ограничения, введем сперва переопределенные парциальные амплитуды  $\tilde{a}_{l,\alpha\beta}$  как

$$a_{l,\alpha\beta} = \frac{\tilde{a}_{l,\alpha\beta}}{\sqrt{g_\alpha g_\beta}}. \quad (178)$$

Для этих переопределенных парциальных амплитуд соотношение унитарности (175) принимает более простой вид

$$-\frac{i}{2}(\tilde{a}_{l,\alpha\beta} - \tilde{a}_{l,\beta\alpha}^*) = \sum_\gamma \tilde{a}_{l,\alpha\gamma} \tilde{a}_{l,\beta\gamma}^* + \sum_M A_{l,\alpha M} A_{l,M\alpha}^*, \quad (179)$$

а в матричном виде

$$-\frac{i}{2}(\tilde{a}_l - \tilde{a}_l^\dagger) = \tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger + A_l A_l^\dagger, \quad (180)$$

где теперь мы восстановили вклад многочастичных промежуточных состояний  $M$  в правой части и обозначили схематически (переопределенную) амплитуду процесса  $2 \rightarrow M$  как  $A_{l,\alpha M}$ .

Введем следующие эрмитовые матрицы

$$P_l = -\frac{i}{2}(\tilde{a}_l - \tilde{a}_l^\dagger),$$

$$Q_l = \frac{1}{2}(\tilde{a}_l + \tilde{a}_l^\dagger).$$

Можно также написать через эти матрицы и переопределенную парциальную амплитуду как

$$\tilde{a}_l = Q_l + iP_l. \quad (181)$$

Соотношение унитарности можно записать как

$$P_l = P_l^2 + Q_l^2 + A_l A_l^\dagger - i[P, Q]. \quad (182)$$

Далее, выберем некоторый ортонормированный базис в пространстве двухчастичных состояний таким образом, чтобы эрмитова матрица  $P_l$  была диагональной, то есть

$$P_{l,\alpha\beta} = p_{l,\alpha} \delta_{\alpha\beta} .$$

Этот базис состоит из линейных комбинаций двухчастичных состояний, которые являются собственными векторами  $P_l$ . Значит, диагональный  $\alpha\alpha$ -элемент из (182) равен

$$p_{l,\alpha} = p_{l,\alpha}^2 + (Q_l^2)_{\alpha\alpha} + (A_l A_l^\dagger)_{\alpha\alpha} ,$$

где нет суммирования по  $\alpha$ . Диагональные элементы матриц  $Q_l^2 \equiv Q_l Q_l^\dagger$  и  $A_l A_l^\dagger$  неотрицательны<sup>13</sup>, поэтому получаем

$$p_{l,\alpha}^2 - p_{l,\alpha} \leq 0 ,$$

и, следовательно,

$$0 \leq p_{l,\alpha} \leq 1 .$$

Наконец, вернемся к соотношению (180), запишем его в обкладках произвольных состояний  $|\psi\rangle$  (с единичной нормировкой) и получим, по-прежнему используя базис собственных векторов  $P_l$ ,

$$\langle \psi | \tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger | \psi \rangle = \sum_{\alpha} p_{l,\alpha} |\psi_{\alpha}|^2 - \langle \psi | A_l A_l^\dagger | \psi \rangle . \quad (183)$$

Это приводит нас к

$$\langle \psi | \tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger | \psi \rangle \leq 1 ,$$

для всех  $|\psi\rangle$ ; итого, получаем, что

$$\text{все собственные значения } \tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger \text{ не больше } 1 . \quad (184)$$

До сих пор все вычисления были сделаны без потери общности. Насколько известно, предыдущие исследования унитарных соотношений и границ, например, ограничивались единичной скоростью звука. В других работах (смотреть,

<sup>13</sup>Это верно, потому что, например,  $0 \leq \langle \psi^{(\alpha)} | A_l A_l^\dagger | \psi^{(\alpha)} \rangle = (A_l A_l^\dagger)_{\alpha\alpha}$ , где  $\psi_{\beta}^{(\alpha)} = \delta_{\alpha\beta}$ .

например, [127–130]) также прослеживалась следующая потеря общности рассуждений. Во-первых, матрица  $\tilde{a}_{l,\alpha\beta}$  предполагалась симметричной в силу  $T$ -инвариантности, то есть предполагалось, что  $\tilde{a}_{l,\alpha\beta} = \tilde{a}_{l,\beta\alpha}$ . Тогда  $Q_l$  и  $P_l$  — это ее действительная и мнимая части, соответственно. Во-вторых, предполагалось, что  $P_l$  и  $Q_l$  являются одновременно диагонализуемыми матрицами. Последнее имеет место, когда, например, имеется только один сорт частиц, а также, когда вклад многочастичных состояний в (180) пренебрежимо мал: в последнем случае мнимая часть выражения (182) приводит к  $[P, Q] = 0$ . В таком случае результат (184) говорит о том, что любое собственное значение  $\tilde{a}_{\alpha\alpha}$  матрицы  $\tilde{a}$  подчиняется соотношению  $|\tilde{a}_{\alpha\alpha}| \leq 1$ . На самом же деле, в таком случае просто получается более сильное ограничение, см. [102]. В базисе собственных векторов  $\tilde{a}$  (и собственных векторов  $Q$  и  $P$ ), можно записать диагональную часть соотношения унитарности (179) для любого  $\alpha$  (без суммирования по  $\alpha$ ) как

$$\text{Im } \tilde{a}_{l,\alpha\alpha} = \tilde{a}_{l,\alpha\alpha} \tilde{a}_{l,\alpha\alpha}^* + \sum_M A_{l,\alpha M} A_{l,M\alpha}^* .$$

Здесь вновь вклад многочастичных промежуточных состояний неотрицателен, поэтому

$$\text{Im } \tilde{a}_{l,\alpha\alpha} \geq |\tilde{a}_{l,\alpha\alpha}|^2 ,$$

что, в свою очередь, приводит к

$$\left( \text{Im } \tilde{a}_{l,\alpha\alpha} - \frac{1}{2} \right)^2 + (\text{Re } \tilde{a}_{l,\alpha\alpha})^2 \leq \frac{1}{4} ,$$

и, следовательно,

$$|\text{Re } \tilde{a}_{l,\alpha\alpha}| \leq \frac{1}{2}, \quad (185)$$

для любого собственного значения  $\tilde{a}$ .

Последний рассмотренный случай представляет особый интерес, когда речь идет о пертурбативной унитарности и оценке энергетического масштаба *сильной связи* [102, 128–130]. В этом случае многочастичные промежуточные состояния (почти) всегда дают вклады в (180); однако же эти вклады подавлены

константами связи, а матрица  $\tilde{a}$  является вещественной на древесном уровне. Тогда условие пертурбативной унитарности заключается в том, чтобы для древесных амплитуд выполнялось неравенство (185). Заметим, однако, что даже в этой ситуации результаты (184) и (185) эквивалентны.

#### 4.4 Пример: теория с двумя действительными скалярными полями

В этом параграфе мы явно продемонстрируем, что для модели двух действительных скалярных полей соотношение унитарности (175) действительно выполняется в первом нетривиальном порядке по константам связи. Итак, лагранжиан рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{\phi}_1^2 - u_1^2 (\vec{\nabla} \phi_1)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \dot{\phi}_2^2 - u_2^2 (\vec{\nabla} \phi_2)^2 \right) + \frac{\lambda_1}{4!} \phi_1^4 + \frac{\lambda_2}{4!} \phi_2^4 + \frac{\lambda_3}{4} \phi_1^2 \phi_2^2, \quad (186)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — скорости звука полей. Отметим сразу, что эта модель не имеет никакого масштаба сильной связи и не представляет интереса для описания космологических возмущений. Наша цель — на данном простом и наглядном примере (186) показать, как вычисляется соотношение унитарности (175) для конкретной модели в первом нетривиальном порядке по константам связи. Потенциал в лагранжиане (186) является полиномом четвертого порядка, он также симметричен относительно преобразования  $\phi_{1,2} \rightarrow -\phi_{1,2}$ . В этой теории матрица  $a_{\alpha\beta}$  является симметричной в силу  $T$ -инвариантности, поэтому соотношение унитарности имеет вид

$$\text{Im } a_{l,\alpha\beta} = \sum_{\gamma} g_{\gamma} a_{l,\alpha\gamma} a_{l,\gamma\beta}^*,$$

а в матричной форме

$$\text{Im } a_l = \sum_{\gamma} a_l g a_l^{\dagger}, \quad (187)$$

где элементы диагональной матрицы  $g$  определяются (176).



Сперва выпишем известные результаты для древесных амплитуд в такой теории. У нас есть три двухчастичных состояния:  $\alpha = (\phi_1, \phi_1)$ ,  $\beta = (\phi_1, \phi_2)$ , и  $\gamma = (\phi_2, \phi_2)$ . На древесном уровне, соответствующие матричные элементы различных процессов можно записать в виде следующей матрицы

$$M_{\text{tree}} = \begin{pmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} & M_{\alpha\gamma} \\ M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} & M_{\beta\gamma} \\ M_{\gamma\alpha} & M_{\gamma\beta} & M_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку эти матричные элементы не зависят от угла рассеяния  $\gamma$ , единственной ненулевой парциальной амплитудой, согласно (170), является  $a_0$ . Рассеяние происходит в  $s$ -волне.

Итак, ненулевая парциальная амплитуда имеет вид

$$a_{0,\text{tree}} = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_0(\cos\theta) M_{\text{tree}} = \frac{M_{\text{tree}}}{16\pi} = \frac{1}{16\pi} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (188)$$

Из квантовой теории поля известно, что правая часть (187) имеет порядок  $\lambda_i \lambda_j$ , поэтому первый нетривиальный вклад в  $\text{Im } a_l$  получается от диаграмм с одной петлей. Этот вклад можно получить, вычисляя соответствующие матричные элементы по диаграммам для  $s$ -канала, показанных на Рис. 17;  $t$ - и  $u$ -каналы в одной петле не дают никакого вклада в искомую мнимую часть.

Рассмотрим первую диаграмму на Рис. 17. Соответствующий матричный элемент равен

$$iM_{1\text{-loop}}^{(1)} = \frac{\lambda_3^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(\frac{E}{2} - q^0)^2 - u_2^2 \vec{q}^2 + i\epsilon] [(\frac{E}{2} + q^0)^2 - u_2^2 \vec{q}^2 + i\epsilon]},$$

где  $E$  — это полная энергия в системе центра масс. Совершая замену  $u_2 \vec{q} \rightarrow \vec{q}$ , получаем известный результат

$$\text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(1)} = \frac{\lambda_3^2}{32\pi u_2^3}.$$

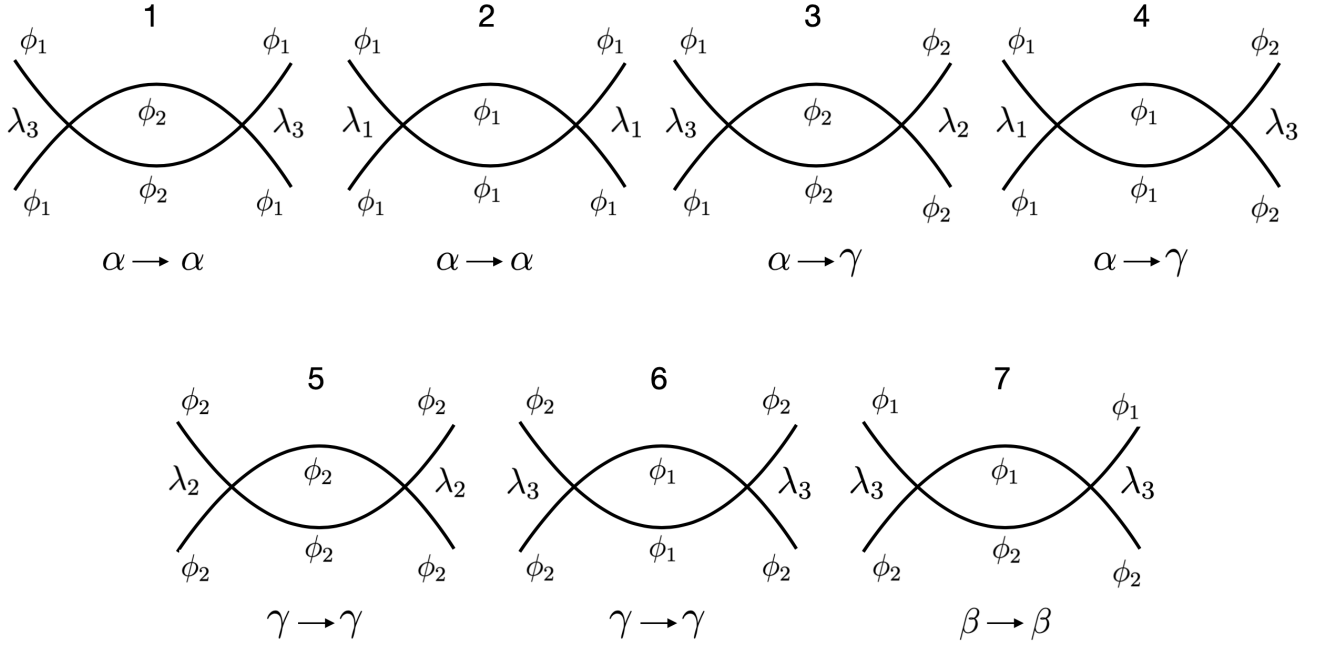


Рис. 17: Однопетлевые диаграммы в  $s$ -канале для теории с лагранжианом (186).

Аналогично получаем следующие выражения для всех остальных диаграмм на Рис. 17

$$\begin{aligned} \text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(2)} &= \frac{\lambda_1^2}{32\pi u_1^3}, & \text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(3)} &= \frac{\lambda_2 \lambda_3}{32\pi u_2^3}, \\ \text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(4)} &= \frac{\lambda_1 \lambda_3}{32\pi u_1^3}, & \text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(5)} &= \frac{\lambda_2^2}{32\pi u_2^3}, & \text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(6)} &= \frac{\lambda_3^2}{32\pi u_1^3}. \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим диаграмму под номером 7 на Рис. 17. В отличие от остальных, она содержит две разные частицы в петле. Действительно, запишем

$$iM_{1\text{-loop}}^{(7)} = \lambda_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ \left( \frac{E}{2} - q^0 \right)^2 - u_1^2 \vec{q}^2 + i\epsilon \right] \left[ \left( \frac{E}{2} + q^0 \right)^2 - u_2^2 \vec{q}^2 + i\epsilon \right]}. \quad (189)$$

У подынтегрального выражения есть четыре полюса

$$\begin{aligned} q_{1,2}^0 &= \frac{E}{2} \pm u_1 |\vec{q}| \mp i\epsilon, \\ q_{3,4}^0 &= -\frac{E}{2} \pm u_2 |\vec{q}| \mp i\epsilon. \end{aligned}$$

Без потери общности, положим для определенности, что

$$u_1 \geq u_2.$$

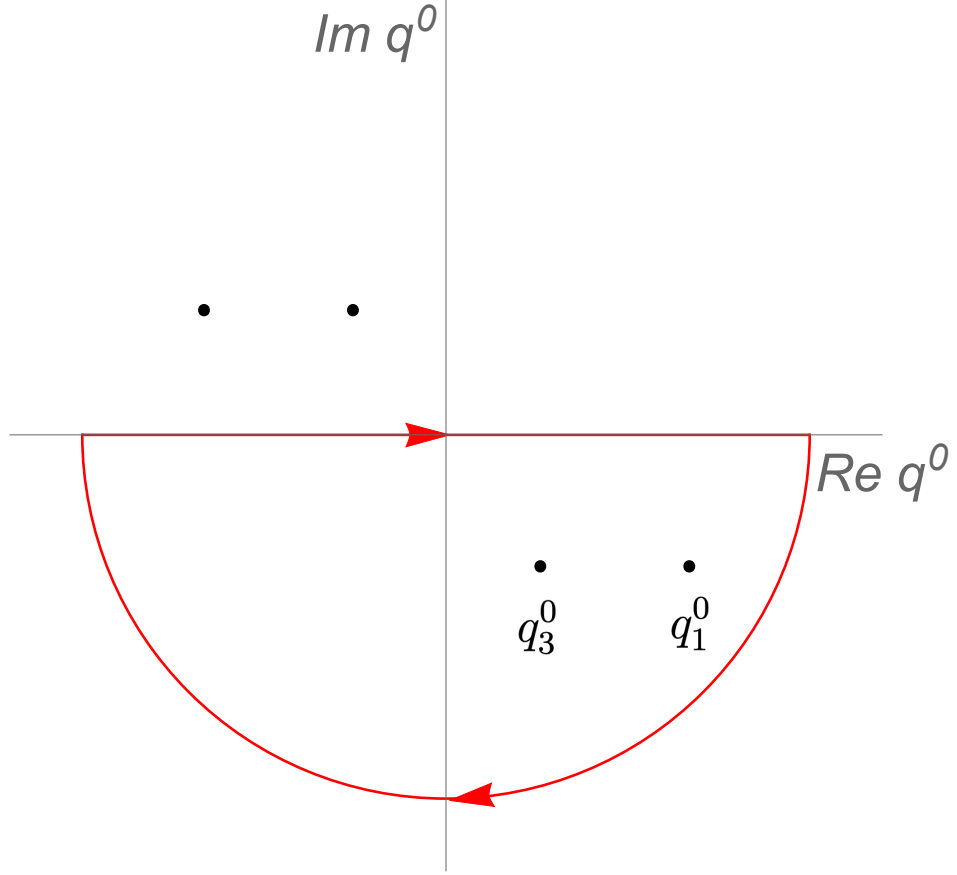


Рис. 18: Контур интегрирования для интеграла в (189).

Замкнем контур интегрирования как показано на Рис. 18; полюса  $q_1^0$  и  $q_3^0$  находятся внутри этого контура. Интегрируя по  $q^0$ , получаем

$$iM_{1\text{-loop}}^{(7)} = \lambda_3^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^4} (-2\pi i) \left[ \frac{1}{2qu_1(E + q(u_1 - u_2))(E + q(u_1 + u_2))} + \frac{1}{(-2qu_2)(-E + q(u_1 + u_2) - i\epsilon)(E + q(u_1 - u_2))} \right],$$

Первое слагаемое в этом выражении не дает вклада в  $\text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(7)}$ . Чтобы получить нужный вклад в  $\text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(7)}$  от второго слагаемого, воспользуемся формулой Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x \pm i\epsilon} \right) = \mp i\pi\delta(x) + P \left( \frac{1}{x} \right),$$

где  $P$  — главное значение интеграла. Итак,

$$\text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(7)} = \lambda_3^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2qu_2(E + q(u_1 - u_2))} \cdot \pi\delta(-E + q(u_1 + u_2)),$$

и, наконец, приходим к выражению

$$\text{Im } M_{1\text{-loop}}^{(7)} = \frac{\lambda_3^2}{8\pi u_1 u_2 (u_1 + u_2)}.$$

Все полученные выше результаты можно записать как

$$\text{Im } a_{0,1\text{-loop}} = \frac{1}{16\pi} \text{Im } M_{1\text{-loop}} = \frac{1}{16\pi} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2}{32\pi u_1^3} + \frac{\lambda_3^2}{32\pi u_2^3} & 0 & \frac{\lambda_1 \lambda_3}{32\pi u_1^3} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{32\pi u_2^3} \\ 0 & \frac{\lambda_3^2}{8\pi u_1 u_2 (u_1 + u_2)} & 0 \\ \frac{\lambda_1 \lambda_3}{32\pi u_1^3} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{32\pi u_2^3} & 0 & \frac{\lambda_2^2}{32\pi u_2^3} + \frac{\lambda_3^2}{32\pi u_1^3} \end{pmatrix}. \quad (190)$$

Используя (176), находим для элементов матрицы  $g$  (187)

$$g = \text{diag} \left( \frac{1}{2u_1^3}, \frac{2}{u_1 u_2 (u_1 + u_2)}, \frac{1}{2u_2^3} \right). \quad (191)$$

Наконец, собирая вместе полученные результаты (188), (190) и (191), находим

$$\text{Im } a_{0,1\text{-loop}} = a_{0,\text{tree}} g a_{0,\text{tree}},$$

то есть соотношение унитарности (187) действительно выполняется в первом нетривиальном порядке по константам связи.

В заключение мы хотели бы отметить, что, например, при относительно больших отрицательных значениях  $\lambda_3$  условие (184) не выполняется. Однако, это не является сигналом о наличии проблемы сильной связи в теории. Причина нарушения условия (184) заключается в том, что потенциал в лагранжиане (186) для относительно больших отрицательных значений  $\lambda_3$  неограничен снизу и теория становится физически неприемлемой.

## Заключение

В диссертации изучались классические космологические решения без начальной сингулярности в рамках подкласса теории Хорндески. Центральным вопросом при исследовании указанных решений являлась проблема режима сильной связи на самых ранних временах эволюции Вселенной. Были получены следующие результаты:

1. В рамках указанной теории была изучена несингулярная модель ранней Вселенной — устойчивый на протяжении всего времени эволюции генезис. Казалось бы, при обходе условий запрещающей теоремы (что в свою очередь открывает возможность построения устойчивого на всех временах космологического решения) наивно возникает режим сильной связи на ранних временах. Однако, было продемонстрировано, что в такой модели, согласно проделанному размерному анализу действия третьего порядка по возмущениям метрики, энергетический масштаб сильной связи превышает классический на ранних временах, а значит классическое описание построенной модели генезиса на указанных временах законно.
2. Для конкретного анзаца функций лагранжиана подкласса теории Хорндески были построены различные варианты полной эволюции ранней Вселенной. Эволюция в построенных примерах начинается с конкретных несингулярных эпох — сжатия с отскоком, генезиса, а также их модификаций. Было показано, что эти модели устойчивы в каждый момент времени, возмущения над фоном распространяются со скоростями меньшими, чем скорость света; модели находятся вне режима сильной связи на больших отрицательных временах. Построен и устойчивый переход между указанными ранними эпохами и последующей эпохой инфляции, а далее — переход на стадию, где динамика определяется безмассовым действительным скалярным полем, а гравитация описывается ОТО. Приведены и конкрет-

ные численные примеры эволюции ранней Вселенной без промежуточной инфляции.

3. Было обнаружено и показано на конкретном примере модели сжимающейся Вселенной, которая конформно связан с моделью инфляции, что наивный размерный анализ проблемы сильной связи проблематичен. Действительно, такой анализ не всегда дает правильный ответ и для того, чтобы определить применимость классического описания в некоторых моделях требуется проводить более точный анализ проблемы сильной связи с помощью диаграммной техники, условия унитарности и унитарных ограничений. Так, сперва был проведен размерный анализ в модели со сжатием; он привел к выводу, что масштаб энергии сильной связи в такой теории есть и для конкретных моделей сжатия он, вообще говоря, может быть ниже классического. Однако, рассматриваемая модель Вселенной со сжатием конформно связана с моделью инфляции, и потому единственный возможный масштаб энергии сильной связи — это масса Планка, а все классические масштабы в такой теории, разумеется, ниже планковского. Из вычислений соответствующих матричных элементов и при использовании условия унитарности было показано, что в модели сжатия действительно отсутствует режим сильной связи, как и должно быть.
4. Были получены соотношения унитарности для парциальных амплитуд для процессов рассеяния  $2 \rightarrow 2$  с учетом вклада промежуточных двухчастичных состояний в теории скалярных полей с разными скоростями звука. Мотивировкой для получения этих унитарных ограничений была необходимость оценивать масштаб сильной связи в соответствующей эффективной теории поля более точным способом, нежели с помощью размерного анализа. Явными однопетлевыми вычислениями (в первом нетривиальном порядке по константам связи) в простой модели двух скалярных полей с разными скоростями звука было показано, что полученные соотношения

ношения унитарности выполняются.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю Валерию Анатольевичу Рубакову за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указание, неиссякаемые идеи и неизменную поддержку. Автор выражает и огромную признательность научному руководителю Сергею Андреевичу Миронову за постоянную помощь в работе, частые и содержательные обсуждения научных вопросов, готовность помочь и всестороннюю поддержку.

Автор выражает признательность своему соавтору и коллеге Павлу Петрову как за совместную работу, так и за прочтение данной рукописи и ценные замечания. Автор признателен своим соавторам и коллегам Олегу Меличеву и Олегу Евсееву за плодотворную работу и поддержку, а также своим коллегам Виктории Волковой, Владиславу Баринову, Булату Фархтдинову, Петру Сатунину, Павлу Демидову за обсуждения, в ходе которых всегда удавалось разобраться в поставленных вопросах, глубже понять физику обсуждаемых явлений и процессов, а также за дружескую атмосферу в коллективе. Автор отдельно благодарит Дмитрия Агеева за прочтение данной рукописи и ценные указания.

Автор также благодарит Владимира Викторовича Белокурова за постоянную и всестороннюю поддержку, за содержательные обсуждения научных и учебных вопросов, за готовность всегда прийти на помощь.

Автор выражает огромную признательность Максиму Валентиновичу Либанову и Сергею Владимировичу Демидову, из переписки и обсуждений с которыми автор узнал много тонкостей, связанных со специальными вопросами квантовой теории поля.

Автор благодарен всем сотрудникам Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

## Список литературы

- [1] Guth A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — P. 347–356.
- [2] Starobinsky A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 91. — P. 99–102.
- [3] Sato K. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1981. — Vol. 195. — P. 467–479.
- [4] Linde A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 108. — P. 389–393.
- [5] Albrecht A., Steinhardt P. J. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — P. 1220–1223.
- [6] Rubakov V. A., Gorbunov D. S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory. — Singapore : World Scientific, 2017. — ISBN: 978-981-320-987-9, 978-981-320-988-6, 978-981-322-005-8.
- [7] Hawking S. W. The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 115. — P. 295.
- [8] Starobinsky A. A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 117. — P. 175–178.
- [9] Guth A. H., Pi S. Y. Fluctuations in the New Inflationary Universe // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49. — P. 1110–1113.



- [10] Bardeen J. M., Steinhardt P. J., Turner M. S. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe // Phys. Rev. D. — 1983. — Vol. 28. — P. 679.
- [11] Adams F. C., Freese K. Double field inflation // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol. 43. — P. 353-361. — hep-ph/0504135.
- [12] Adams F. C. et al. Natural inflation: Particle physics models, power law spectra for large scale structure, and constraints from COBE // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 47. — P. 426-455. — hep-ph/9207245.
- [13] Peebles P. J. E., Vilenkin A. Quintessential inflation // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 063505. — astro-ph/9810509.
- [14] Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F. k - inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — P. 209-218. — hep-th/9904075.
- [15] Dvali G. R., Shafi Q., Solganik S. D-brane inflation // 4th European Meeting From the Planck Scale to the Electroweak Scale. — 2001. — 5. — hep-th/0105203.
- [16] Alishahiha M., Silverstein E., Tong D. DBI in the sky // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70. — P. 123505. — hep-th/0404084.
- [17] Boussekeur L., Lyth D. H. Hilltop inflation // JCAP. — 2005. — Vol. 07. — P. 010. — hep-ph/0502047.
- [18] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. G-inflation: Inflation driven by the Galileon field // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 231302. — 1008.0603.
- [19] Kamada K. et al. Higgs G-inflation // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 83. — P. 083515. — 1012.4238.

- [20] Bezrukov F. et al. Higgs inflation: consistency and generalisations // JHEP. — 2011. — Vol. 01. — P. 016. — 1008.5157.
- [21] Germani C., Kehagias A. New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 011302. — 1003.2635.
- [22] Germani C., Kehagias A. Cosmological Perturbations in the New Higgs Inflation // JCAP. — 2010. — Vol. 05. — P. 019. — [Erratum: JCAP 06, E01 (2010)]. 1003.4285.
- [23] Germani C., Kehagias A. UV-Protected Inflation // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 161302. — 1012.0853.
- [24] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations // Prog. Theor. Phys. — 2011. — Vol. 126. — P. 511–529. — 1105.5723.
- [25] Aghanim N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. — 2020. — Vol. 641. — P. A6. — [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)]. 1807.06209.
- [26] Rubakov V. A., Wetterich C. Geodesic (in) Completeness in General Metric Frames // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, no. 12. — P. 2557. — 2210.11198.
- [27] Penrose R. Gravitational collapse and space-time singularities // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Vol. 14. — P. 57–59.
- [28] Hawking S. W. Singularities in the universe // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Vol. 17. — P. 444–445.
- [29] Borde A., Vilenkin A. Eternal inflation and the initial singularity // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72. — P. 3305–3309. — gr-qc/9312022.

- [30] Borde A., Vilenkin A. Singularities in inflationary cosmology: A Review // Int. J. Mod. Phys. D. — 1996. — Vol. 5. — P. 813–824. — gr-qc/9612036.
- [31] Borde A., Guth A. H., Vilenkin A. Inflationary space-times are incomplete in past directions // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — P. 151301. — gr-qc/0110012.
- [32] Yoshida D., Quintin J. Maximal extensions and singularities in inflationary spacetimes // Class. Quant. Grav. — 2018. — Vol. 35, no. 15. — P. 155019. — 1803.07085.
- [33] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — Cambridge University Press, 2023. — 2. — ISBN: 978-1-00-925316-1, 978-1-00-925315-4, 978-0-521-20016-5, 978-0-521-09906-6, 978-0-511-82630-6, 978-0-521-09906-6.
- [34] Tipler F. J. Energy conditions and spacetime singularities // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 17. — P. 2521–2528.
- [35] Aref'eva I. Y., Volovich I. V. On the null energy condition and cosmology // Theor. Math. Phys. — 2008. — Vol. 155. — P. 503–511. — hep-th/0612098.
- [36] Rubakov V. A. The Null Energy Condition and its violation // Phys. Usp. — 2014. — Vol. 57. — P. 128–142. — 1401.4024.
- [37] Garriga J., Mukhanov V. F. Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — P. 219–225. — hep-th/9904176.
- [38] Horndeski G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // Int. J. Theor. Phys. — 1974. — Vol. 10. — P. 363–384.
- [39] Charmousis C. et al. General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 051101. — 1106.2000.

- [40] Ostrogradsky M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres // Mem. Acad. St. Petersburg. — 1850. — Vol. 6, no. 4. — P. 385–517.
- [41] Woodard R. P. Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity // Lect. Notes Phys. — 2007. — Vol. 720. — P. 403–433. — astro-ph/0601672.
- [42] Motohashi H., Suyama T. Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91, no. 8. — P. 085009. — 1411.3721.
- [43] Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 62. — P. 023511. — astro-ph/9912463.
- [44] Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. J. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85. — P. 4438–4441. — astro-ph/0004134.
- [45] Deffayet C. et al. Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding // JCAP. — 2010. — Vol. 10. — P. 026. — 1008.0048.
- [46] Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E. The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 064036. — 0811.2197.
- [47] Deffayet C., Esposito-Farese G., Vikman A. Covariant Galileon // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 084003. — 0901.1314.
- [48] Deffayet C. et al. From k-essence to generalised Galileons // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84. — P. 064039. — 1103.3260.
- [49] Deffayet C., Deser S., Esposito-Farese G. Arbitrary  $p$ -form Galileons // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 82. — P. 061501. — 1007.5278.

- [50] de Rham C., Tolley A. J. DBI and the Galileon reunited // JCAP. — 2010. — Vol. 05. — P. 015. — 1003.5917.
- [51] Goon G., Hinterbichler K., Trodden M. A New Class of Effective Field Theories from Embedded Branes // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 231102. — 1103.6029.
- [52] Goon G., Hinterbichler K., Trodden M. Symmetries for Galileons and DBI scalars on curved space // JCAP. — 2011. — Vol. 07. — P. 017. — 1103.5745.
- [53] Padilla A., Sivanesan V. Covariant multi-galileons and their generalisation // JHEP. — 2013. — Vol. 04. — P. 032. — 1210.4026.
- [54] Deffayet C., Esposito-Farese G., Steer D. A. Counting the degrees of freedom of generalized Galileons // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — P. 084013. — 1506.01974.
- [55] Sotiriou T. P., Faraoni V.  $f(R)$  Theories Of Gravity // Rev. Mod. Phys. — 2010. — Vol. 82. — P. 451–497. — 0805.1726.
- [56] De Felice A., Tsujikawa S.  $f(R)$  theories // Living Rev. Rel. — 2010. — Vol. 13. — P. 3. — 1002.4928.
- [57] Kobayashi T. Horndeski theory and beyond: a review // Rept. Prog. Phys. — 2019. — Vol. 82, no. 8. — P. 086901. — 1901.07183.
- [58] De Felice A., Kobayashi T., Tsujikawa S. Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations // Phys. Lett. B. — 2011. — Vol. 706. — P. 123–133. — 1108.4242.
- [59] De Felice A., Tsujikawa S. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models // JCAP. — 2012. — Vol. 02. — P. 007. — 1110.3878.

- [60] Amendola L. et al. Observables and unobservables in dark energy cosmologies // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Vol. 87, no. 2. — P. 023501. — 1210.0439.
- [61] Gubitosi G., Piazza F., Vernizzi F. The Effective Field Theory of Dark Energy // *JCAP.* — 2013. — Vol. 02. — P. 032. — 1210.0201.
- [62] Bloomfield J. K. et al. Dark energy or modified gravity? An effective field theory approach // *JCAP.* — 2013. — Vol. 08. — P. 010. — 1211.7054.
- [63] Gleyzes J. et al. Essential Building Blocks of Dark Energy // *JCAP.* — 2013. — Vol. 08. — P. 025. — 1304.4840.
- [64] Charmousis C., Gouteraux B., Kiritsis E. Higher-derivative scalar-vector-tensor theories: black holes, Galileons, singularity cloaking and holography // *JHEP.* — 2012. — Vol. 09. — P. 011. — 1206.1499.
- [65] Rinaldi M. Black holes with non-minimal derivative coupling // *Phys. Rev. D.* — 2012. — Vol. 86. — P. 084048. — 1208.0103.
- [66] Babichev E., Charmousis C. Dressing a black hole with a time-dependent Galileon // *JHEP.* — 2014. — Vol. 08. — P. 106. — 1312.3204.
- [67] Abbott B. P. et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 119, no. 16. — P. 161101. — 1710.05832.
- [68] Kase R., Tsujikawa S. Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2019. — Vol. 28, no. 05. — P. 1942005. — 1809.08735.
- [69] Veneziano G. A Model for the big bounce // *JCAP.* — 2004. — Vol. 03. — P. 004. — hep-th/0312182.

- [70] Aref'eva I. Y., Joukovskaya L. V., Vernov S. Y. Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models // JHEP. — 2007. — Vol. 07. — P. 087. — hep-th/0701184.
- [71] Creminelli P., Nicolis A., Trincherini E. Galilean Genesis: An Alternative to inflation // JCAP. — 2010. — Vol. 11. — P. 021. — 1007.0027.
- [72] Creminelli P. Subluminal Galilean Genesis // JHEP. — 2013. — Vol. 02. — P. 006. — 1209.3768.
- [73] Hinterbichler K. et al. DBI Realizations of the Pseudo-Conformal Universe and Galilean Genesis Scenarios // JCAP. — 2012. — Vol. 12. — P. 030. — 1209.5742.
- [74] Elder B., Joyce A., Khoury J. From Satisfying to Violating the Null Energy Condition // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 89, no. 4. — P. 044027. — 1311.5889.
- [75] Pirtskhalava D. et al. Inflation from Minkowski Space // JHEP. — 2014. — Vol. 12. — P. 151. — 1410.0882.
- [76] Nishi S., Kobayashi T. Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2015. — Vol. 03. — P. 057. — 1501.02553.
- [77] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. Galilean Creation of the Inflationary Universe // JCAP. — 2015. — Vol. 07. — P. 017. — 1504.05710.
- [78] Qiu T. et al. Bouncing Galileon Cosmologies // JCAP. — 2011. — Vol. 10. — P. 036. — 1108.0593.
- [79] Easson D. A., Sawicki I., Vikman A. G-Bounce // JCAP. — 2011. — Vol. 11. — P. 021. — 1109.1047.
- [80] Cai Y.-F., Easson D. A., Brandenberger R. Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology // JCAP. — 2012. — Vol. 08. — P. 020. — 1206.2382.

- [81] Osipov M., Rubakov V. Galileon bounce after ekpyrotic contraction // JCAP. — 2013. — Vol. 11. — P. 031. — 1303.1221.
- [82] Qiu T., Gao X., Saridakis E. N. Towards anisotropy-free and nonsingular bounce cosmology with scale-invariant perturbations // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 043525. — 1303.2372.
- [83] Koehn M., Lehnert J.-L., Ovrut B. A. Cosmological super-bounce // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 90, no. 2. — P. 025005. — 1310.7577.
- [84] Battarra L. et al. Cosmological Perturbations Through a Non-Singular Ghost-Condensate/Galileon Bounce // JCAP. — 2014. — Vol. 07. — P. 007. — 1404.5067.
- [85] Qiu T., Wang Y.-T. G-Bounce Inflation: Towards Nonsingular Inflation Cosmology with Galileon Field // JHEP. — 2015. — Vol. 04. — P. 130. — 1501.03568.
- [86] Ijjas A., Steinhardt P. J. Classically stable nonsingular cosmological bounces // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 12. — P. 121304. — 1606.08880.
- [87] Libanov M., Mironov S., Rubakov V. Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis // JCAP. — 2016. — Vol. 08. — P. 037. — 1605.05992.
- [88] Kobayashi T. Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 94, no. 4. — P. 043511. — 1606.05831.
- [89] Ijjas A., Steinhardt P. J. Fully stable cosmological solutions with a nonsingular classical bounce // Phys. Lett. B. — 2017. — Vol. 764. — P. 289–294. — 1609.01253.



- [90] Zumalacárregui M., García-Bellido J. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Vol. 89. — P. 064046. — 1308.4685.
- [91] Gleyzes J. et al. Healthy theories beyond Horndeski // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114, no. 21. — P. 211101. — 1404.6495.
- [92] Gleyzes J. et al. Exploring gravitational theories beyond Horndeski // *JCAP.* — 2015. — Vol. 02. — P. 018. — 1408.1952.
- [93] Kolevatov R. et al. Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski // *JCAP.* — 2017. — Vol. 08. — P. 038. — 1705.06626.
- [94] Mironov S., Volkova V. Properties of perturbations in beyond Horndeski theories // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2018. — Vol. 33, no. 27. — P. 1850155. — 1712.09909.
- [95] Mironov S., Rubakov V., Volkova V. Bounce beyond Horndeski with GR asymptotics and  $\gamma$ -crossing // *JCAP.* — 2018. — Vol. 10. — P. 050. — 1807.08361.
- [96] Volkova V. E., Mironov S. A., Rubakov V. A. Cosmological Scenarios with Bounce and Genesis in Horndeski Theory and Beyond // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2019. — Vol. 129, no. 4. — P. 553–565.
- [97] Mironov S., Rubakov V., Volkova V. Genesis with general relativity asymptotics in beyond Horndeski theory // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 8. — P. 083521. — 1905.06249.
- [98] Oller J. A. Coupled-channel approach in hadron–hadron scattering // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 2020. — Vol. 110. — P. 103728. — 1909.00370.

- [99] Oller J. A. A Brief Introduction to Dispersion Relations. With modern Applications. — Springer Briefs in Physics, 2019. — ISBN: 978-3-030-13581-2.
- [100] Lacour A., Oller J. A., Meissner U. G. Non-perturbative methods for a chiral effective field theory of finite density nuclear systems // Annals Phys. — 2011. — Vol. 326. — P. 241–306. — 0906.2349.
- [101] Gülmez D., Meißner U. G., Oller J. A. A chiral covariant approach to  $\rho\rho$  scattering // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77, no. 7. — P. 460. — 1611.00168.
- [102] Grojean C. New approaches to electroweak symmetry breaking // Phys. Usp. — 2007. — Vol. 50. — P. 1–35.
- [103] Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V. Horndeski genesis: consistency of classical theory // JHEP. — 2020. — Vol. 12. — P. 107. — 2009.05071.
- [104] Nandi D. Bounce from Inflation // Phys. Lett. B. — 2020. — Vol. 809. — P. 135695. — 2003.02066.
- [105] Fasiello M., Renaux-Petel S. Non-Gaussian inflationary shapes in  $G^3$  theories beyond Horndeski // JCAP. — 2014. — Vol. 10. — P. 037. — 1407.7280.
- [106] Gao X. et al. Full bispectra from primordial scalar and tensor perturbations in the most general single-field inflation model // PTEP. — 2013. — Vol. 2013. — P. 053E03. — 1207.0588.
- [107] Nishi S., Kobayashi T. Scale-invariant perturbations from null-energy-condition violation: A new variant of Galilean genesis // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 064001. — 1611.01906.
- [108] Gao X., Steer D. A. Inflation and primordial non-Gaussianities of 'generalized Galileons' // JCAP. — 2011. — Vol. 12. — P. 019. — 1107.2642.

- [109] De Felice A., Tsujikawa S. Inflationary non-Gaussianities in the most general second-order scalar-tensor theories // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84. — P. 083504. — 1107.3917.
- [110] Ageeva Y. A. et al. Horndeski Genesis: strong coupling and absence thereof // *EPJ Web Conf.* — 2018. — Vol. 191. — P. 07010. — 1810.00465.
- [111] Ageeva Y. et al. Toward evading the strong coupling problem in Horndeski genesis // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 023519. — 2003.01202.
- [112] Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V. Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Vol. 104, no. 6. — P. 063530. — 2104.13412.
- [113] Gao X. et al. Primordial non-Gaussianities of gravitational waves in the most general single-field inflation model // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 211301. — 1108.3513.
- [114] Lifshitz E. M., Khalatnikov I. M. Investigations in relativistic cosmology // *Adv. Phys.* — 1963. — Vol. 12. — P. 185–249.
- [115] Belinsky V. A., Khalatnikov I. M., Lifshitz E. M. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology // *Adv. Phys.* — 1970. — Vol. 19. — P. 525–573.
- [116] Belinskii V. A., Lifshitz E. M., Khalatnikov I. M. On a general cosmological solution of the einstein equations with a time singularity // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1972. — Vol. 62. — P. 1606–1613.
- [117] Erickson J. K. et al. Kasner and mixmaster behavior in universes with equation of state  $w \geq 1$  // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 69. — P. 063514. — hep-th/0312009.

- [118] Hirano S., Kobayashi T., Yokoyama S. Ultra slow-roll G-inflation // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 94, no. 10. — P. 103515. — 1604.00141.
- [119] Tahara H. W. H., Kobayashi T. Nanohertz gravitational waves from a null-energy-condition violation in the early universe // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 102, no. 12. — P. 123533. — 2011.01605.
- [120] Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F. k - inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — P. 209–218. — hep-th/9904075.
- [121] Bazrafshan Moghaddam H., Brandenberger R., Yokoyama J. Note on Reheating in G-inflation // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 063529. — 1612.00998.
- [122] De Felice A., Tsujikawa S. Primordial non-Gaussianities in general modified gravitational models of inflation // JCAP. — 2011. — Vol. 04. — P. 029. — 1103.1172.
- [123] Maldacena J. M. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models // JHEP. — 2003. — Vol. 05. — P. 013. — astro-ph/0210603.
- [124] Martin A., Spearman T. D. Elementary Particle Theory. — North-Holland Publishing Company, 1970. — ISBN: 978-0-720-40157-8.
- [125] Oller J. A., Entem D. R. The exact discontinuity of a partial wave along the left-hand cut and the exact  $N/D$  method in non-relativistic scattering // Annals Phys. — 2019. — Vol. 411. — P. 167965. — 1810.12242.
- [126] Jackson J. D. Classical Electrodynamics. — Wiley, 1998. — ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [127] De Curtis S., Dominici D., Pelaez J. R. Strong tree level unitarity violations in

- the extra dimensional standard model with scalars in the bulk // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 67. — P. 076010. — hep-ph/0301059.
- [128] Lee B. W., Quigg C., Thacker H. B. The Strength of Weak Interactions at Very High-Energies and the Higgs Boson Mass // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38. — P. 883–885.
- [129] Lee B. W., Quigg C., Thacker H. B. Weak Interactions at Very High-Energies: The Role of the Higgs Boson Mass // Phys. Rev. D. — 1977. — Vol. 16. — P. 1519.
- [130] Chanowitz M. S., Gaillard M. K. The TeV Physics of Strongly Interacting  $W$ 's and  $Z$ 's // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 261. — P. 379–431.

# А Явные формулы для коэффициентов в действиях второго и третьего порядков

Данное приложение содержит явные выражения для коэффициентов, входящих в формулы главы 1. Итак, коэффициенты из квадратичного действия (30) имеют следующий вид

$$\mathcal{F}_T = 2 \left[ G_4 - X \left( \frac{\ddot{\phi}}{N^2} G_{5X} + G_{5\phi} \right) \right], \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathcal{G}_T = 2 \left[ G_4 - 2XG_{4X} - X \left( H \frac{\dot{\phi}}{N} G_{5X} - G_{5\phi} \right) \right], \quad (\text{A.1b})$$

а также

$$\begin{aligned} \Sigma = & XG_{2X} + 2X^2G_{2XX} \\ & + 12H \frac{\dot{\phi}}{N} XG_{3X} + 6H \frac{\dot{\phi}}{N} X^2G_{3XX} - 2XG_{3\phi} - 2X^2G_{3\phi X} \\ & - 6H^2G_4 + 6 \left[ H^2 (7XG_{4X} + 16X^2G_{4XX} + 4X^3G_{4XXX}) \right. \\ & \left. - H \frac{\dot{\phi}}{N} (G_{4\phi} + 5XG_{4\phi X} + 2X^2G_{4\phi XX}) \right] \\ & + 30H^3 \frac{\dot{\phi}}{N} XG_{5X} + 26H^3 \frac{\dot{\phi}}{N} X^2G_{5XX} + 4H^3 \frac{\dot{\phi}}{N} X^3G_{5XXX} \\ & - 6H^2X (6G_{5\phi} + 9XG_{5\phi X} + 2X^2G_{5\phi XX}), \end{aligned} \quad (\text{A.2a})$$

и

$$\begin{aligned} \Theta = & -\frac{\dot{\phi}}{N} XG_{3X} + 2HG_4 - 8H XG_{4X} - 8H X^2G_{4XX} \\ & + \frac{\dot{\phi}}{N} G_{4\phi} + 2X \frac{\dot{\phi}}{N} G_{4\phi X} \\ & - H^2 \frac{\dot{\phi}}{N} (5XG_{5X} + 2X^2G_{5XX}) + 2HX (3G_{5\phi} + 2XG_{5\phi X}). \end{aligned} \quad (\text{A.2b})$$

Для лагранжиана подкласса теории Хорндески (8), соответствующие коэффициенты из квадратичного действия (30) имеют вид:

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T = 2G_4, \quad (\text{A.3})$$

и

$$\begin{aligned} \Sigma &= XG_{2X} + 2X^2G_{2XX} + 12H\frac{\dot{\phi}}{N}XG_{3X} + 6H\frac{\dot{\phi}}{N}X^2G_{3XX} \\ &\quad - 2XG_{3\phi} - 2X^2G_{3\phi X} - 6H^2G_4 - 6H\frac{\dot{\phi}}{N}G_{4\phi}, \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

$$\Theta = -\frac{\dot{\phi}}{N}XG_{3X} + 2HG_4 + \frac{\dot{\phi}}{N}G_{4\phi}. \quad (\text{A.4b})$$

Используя формулы перехода между ковариантным и АДМ формализмами (13)-(15), а также (A.3), (A.4), можно получить выражения для  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{G}_T$ ,  $\Sigma$  и  $\Theta$  в терминах функций лагранжиана АДМ (10) (формулы ниже написаны для случая  $A_4(t) = -B_4(t)$ ):

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T = 2B_4 \quad (\text{A.5})$$

и

$$\Sigma = -3H^2 \left[ B_4 - \frac{1}{6H^2} (A_2 + 3NA_{2N} + N^2A_{2NN}) - \frac{1}{2H} (NA_{3N} + N^2A_{3NN}) \right], \quad (\text{A.6a})$$

$$\Theta = 2H \left( \frac{NA_{3N}}{4H} + B_4 \right). \quad (\text{A.6b})$$

Запишем также асимптотики коэффициентов  $\Sigma$  и  $\Theta$  на ранних временах в рамках выбранного анзаца для функций лагранжиана (22), (23)

$$\Sigma \propto (-t)^{-2\alpha-\delta-2}, \quad \Theta \propto (-t)^{-2\alpha-\delta-1}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.7})$$

## Скалярный сектор

Лагранжиан действия третьего порядка для всех скалярных возмущений —  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\zeta$  — имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{scalar}}^{(3)} = & -\frac{a^3}{3} (\Sigma + 2X\Sigma_X + H\Xi) \alpha^3 \\
& + a^3 \left[ 3\Sigma\zeta + \Xi \frac{\dot{\zeta}}{N} + (\Gamma - \mathcal{G}_T) \frac{\zeta_{,ii}}{a^2} - \frac{\Xi}{3a^2} \beta_{,ii} \right] \alpha^2 \\
& - 2a\Theta\alpha\zeta_{,i}\beta_{,i} + 18a^3\Theta\alpha\zeta \frac{\dot{\zeta}}{N} + 4a\mu\alpha \frac{\dot{\zeta}}{N} \zeta_{,ii} - \frac{\Gamma}{2a} \alpha (\beta_{,ij}\beta_{,ij} - \beta_{,ii}\beta_{,jj}) \\
& + \frac{2\mu}{a} \alpha (\beta_{,ij}\zeta_{,ij} - \beta_{,ii}\zeta_{,jj}) - 2a\Theta\alpha\beta_{,ii}\zeta - 2a\Gamma\alpha\beta_{,ii} \frac{\dot{\zeta}}{N} \\
& - 2a\mathcal{G}_T\alpha\zeta\zeta_{,ii} - a\mathcal{G}_T\alpha\zeta_{,i}\zeta_{,i} \\
& + 3a^3\Gamma\alpha \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} + 2a^3\mu \frac{\dot{\zeta}^3}{N^3} + a\mathcal{F}_T\zeta\zeta_{,i}\zeta_{,i} - 9a^3\mathcal{G}_T \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} \zeta \\
& + 2a\mathcal{G}_T\beta_{,i}\zeta_{,i} \frac{\dot{\zeta}}{N} - 2a\mu\beta_{ii} \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} \\
& + 2a\mathcal{G}_T\beta_{,ii} \frac{\dot{\zeta}}{N} \zeta + \frac{1}{a} \left( \frac{3}{2}\mathcal{G}_T\zeta - \mu \frac{\dot{\zeta}}{N} \right) (\beta_{,ij}\beta_{,ij} - \beta_{,ii}\beta_{,jj}) \\
& - 2\frac{\mathcal{G}_T}{a} \beta_{,ii}\beta_{,j}\zeta_{,j}, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Xi = & 12 \frac{\dot{\phi}}{N} X G_{3X} + 6 \frac{\dot{\phi}}{N} X^2 G_{3XX} - 12 H G_4 \\
& + 6 \left[ 2H (7X G_{4X} + 16X^2 G_{4XX} + 4X^3 G_{4XXX}) \right. \\
& \left. - \frac{\dot{\phi}}{N} (G_{4\phi} + 5X G_{4\phi X} + 2X^2 G_{4\phi XX}) \right] \\
& + 90H^2 \frac{\dot{\phi}}{N} X G_{5X} + 78H^2 \frac{\dot{\phi}}{N} X^2 G_{5XX} + 12H^2 \frac{\dot{\phi}}{N} X^3 G_{5XXX} \\
& - 12HX (6G_{5\phi} + 9X G_{5\phi X} + 2X^2 G_{5\phi XX}), \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma = & 2G_4 - 8X G_{4X} - 8X^2 G_{4XX} \\
& - 2H \frac{\dot{\phi}}{N} (5X G_{5X} + 2X^2 G_{5XX}) + 2X (3G_{5\phi} + 2X G_{5\phi X}), \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\dot{\phi}}{N} X G_{5X}. \tag{A.11}$$



Подставляя связи (32) в (A.8), получаем действие (48) в терминах единственно-го возмущения  $\zeta$ .<sup>14</sup> Выражения для коэффициентов каждого из 17 слагаемых в формуле (48) даются (для удобства в квадратных скобках ниже мы также указываем вид взаимодействия):

$$\Lambda_1[\dot{\zeta}^3/N^3] = -\frac{\mathcal{G}_T^3}{3\Theta^3}(\Sigma + 2X\Sigma_X + H\Xi) + \frac{\mathcal{G}_T^2\Xi}{\Theta^2} - \frac{\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S\Xi}{3\Theta^2} + \frac{\Gamma\mathcal{G}_S^2}{2\Theta\mathcal{G}_T} - \frac{2\Gamma\mathcal{G}_S}{\Theta} + \frac{3\Gamma\mathcal{G}_T}{\Theta},$$

$$\Lambda_2[(\dot{\zeta}^2/N^2)\zeta] = \frac{3\mathcal{G}_T^2\Sigma}{\Theta^2} + 9\mathcal{G}_T - \frac{3\mathcal{G}_S^2}{2\mathcal{G}_T},$$

$$\Lambda_3[(\dot{\zeta}^2/N^2)\partial^2\zeta] = \frac{\mathcal{G}_T^3\Xi}{3a^2\Theta^3} - \frac{\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S\Gamma}{a^2\Theta^2} + \frac{2\Gamma\mathcal{G}_T^2}{a^2\Theta^2},$$

$$\Lambda_4[(\dot{\zeta}/N)\zeta\partial^2\zeta] = \frac{3\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S}{a^2\Theta} - \frac{2\mathcal{G}_T^2}{a^2\Theta}, \quad \Lambda_5[(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\zeta)^2] = -\frac{\mathcal{G}_T^2}{a^2\Theta} + \frac{2\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S}{a^2\Theta},$$

$$\Lambda_6[\zeta(\partial_i\zeta)^2] = \frac{\mathcal{F}_T}{a^2}, \quad \Lambda_7[(\dot{\zeta}/N)(\partial^2\zeta)^2] = \frac{\Gamma\mathcal{G}_T^3}{2a^4\Theta^3},$$

$$\Lambda_8[\zeta(\partial^2\zeta)^2] = -\frac{3\mathcal{G}_T^3}{2a^4\Theta^2}, \quad \Lambda_9[\partial^2\zeta(\partial_i\zeta)^2] = -\frac{2\mathcal{G}_T^3}{a^4\Theta^2},$$

$$\Lambda_{10}[(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\partial_j\zeta)^2] = -\frac{\Gamma\mathcal{G}_T^3}{2a^4\Theta^3}, \quad \Lambda_{11}[\zeta(\partial_i\partial_j\zeta)^2] = \frac{3\mathcal{G}_T^3}{2a^4\Theta^2},$$

$$\Lambda_{12}[(\dot{\zeta}/N)\partial_i\zeta\partial^i\psi] = -\frac{2\mathcal{G}_S^2}{\mathcal{G}_T}, \quad \Lambda_{13}[\partial^2\zeta\partial_i\zeta\partial^i\psi] = \frac{2\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S}{a^2\Theta},$$

$$\Lambda_{14}[(\dot{\zeta}/N)(\partial_i\partial_j\psi)^2] = -\frac{\Gamma\mathcal{G}_S^2}{2\Theta\mathcal{G}_T}, \quad \Lambda_{15}[\zeta(\partial_i\partial_j\psi)^2] = \frac{3\mathcal{G}_S^2}{2\mathcal{G}_T},$$

$$\Lambda_{16}[(\dot{\zeta}/N)\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi] = \frac{\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S\Gamma}{a^2\Theta^2}, \quad \Lambda_{17}[\zeta\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi] = -\frac{3\mathcal{G}_T\mathcal{G}_S}{a^2\Theta},$$

---

<sup>14</sup>Уравнения связи (31) законно подставлять как в действие второго порядка, так и в действие третьего порядка. Это так в силу того, что учтенные поправки в уравнениях связи от вариации действия уже третьего порядка будут сокращаться, либо давать превышение точности (будут возникать более высокие порядки по  $\zeta$ ).

где мы сразу записали эти выражения для лагранжиана подкласса теории Хорндески (8) (то есть  $\mu$ , или другими словами —  $G_5$ , равна нулю, а  $G_4$  является функцией только поля  $\phi$ ), а функций  $\Xi$  и  $\Gamma$  равны:

$$\begin{aligned}\Xi &= 12\frac{\dot{\phi}}{N}XG_{3X} + 6\frac{\dot{\phi}}{N}X^2G_{3XX} - 12HG_4 - 6\frac{\dot{\phi}}{N}G_{4\phi}, \\ \Gamma &= \mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T = 2G_4.\end{aligned}\tag{A.12a}$$

и в АДМ формализме

$$\Xi = A_3 + \frac{3}{2}N^2A_{3NN} - 12HB_4, \quad \Gamma = 2B_4,\tag{A.13}$$

с асимптотическим поведением, согласно (22), (23)

$$\Xi \propto (-t)^{-2\alpha-1-\delta}, \quad \Gamma \propto (-t)^{-2\alpha}, \quad t \rightarrow -\infty.\tag{A.14}$$

Используя выписанные выше выражения и асимптотики, можно получить асимптотическое поведение всех коэффициентов  $\Lambda_i$  на ранних временах, которое приведено в таблице 1.

### *Смешанный сектор*

Сперва обратимся к лагранжиану (57), содержащему взаимодействия двух тензорных и одного скалярного возмущений. Соответствующие коэффициенты из

этого лагранжиана имеют вид [106]

$$d_1 = \frac{3\mathcal{G}_T}{8} \left[ 1 - \frac{H\mathcal{G}_T^2}{\Theta\mathcal{F}_T} + \frac{\mathcal{G}_T}{3} \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mathcal{G}_T}{\Theta\mathcal{F}_T} \right) \right], \quad (\text{A.15a})$$

$$d_2 = \frac{\mathcal{F}_S}{8}, \quad (\text{A.15b})$$

$$d_3 = -\frac{\mathcal{G}_S}{4}, \quad (\text{A.15c})$$

$$d_4 = \frac{\mathcal{G}_T}{8\Theta\mathcal{F}_T} (\mathcal{G}_T^2 - \Gamma\mathcal{F}_T) + \frac{\mathcal{G}_T^2}{4} \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mu}{\Theta\mathcal{F}_T} \right) + \frac{\mu}{4} \left[ \frac{\mathcal{G}_S}{\mathcal{G}_T} - 1 - \frac{H\mathcal{G}_T^2}{\Theta\mathcal{F}_T} \left( 6 + \frac{\dot{\mathcal{G}}_S}{NH\mathcal{G}_S} \right) \right], \quad (\text{A.15d})$$

$$d_5 = \frac{\mu\mathcal{G}_T}{4\Theta} \left( \frac{\mathcal{F}_S\mathcal{G}_T}{\mathcal{F}_T\mathcal{G}_S} - 1 \right), \quad (\text{A.15e})$$

$$d_6 = -\frac{\mu\mathcal{G}_S}{2\mathcal{G}_T}, \quad (\text{A.15f})$$

$$d_7 = \frac{\mu\mathcal{G}_T}{2\Theta}. \quad (\text{A.15g})$$

В подклассе (8) часть коэффициентов равна нулю (так как  $G_5$  и, следовательно,  $\mu$  равны нулю)

$$d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 0.$$

Для лагранжиана взаимодействия (65) двух скалярных и одного тензорного

возмущений соответствующие коэффициенты равны [106]:

$$c_1 = \mathcal{F}_S, \quad (\text{A.16a})$$

$$c_2 = \frac{\Gamma}{4\Theta} (\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_T) + \frac{\mathcal{G}_T^2}{\Theta} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{H\Gamma}{4\Theta} \left( 3 + \frac{\dot{\mathcal{G}}_T}{NH\mathcal{G}_T} \right) - \frac{1}{4} \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\Gamma}{\Theta} \right) \right] + \frac{\mu\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_T} + \frac{2H\mathcal{G}_T\mu}{\Theta} - \mathcal{G}_T \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mu}{\Theta} \right), \quad (\text{A.16b})$$

$$c_3 = \mathcal{G}_S \left[ \frac{3}{2} + \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\Gamma}{2\Theta} + \frac{\mu}{\mathcal{G}_T} \right) - \left( 3H + \frac{\dot{\mathcal{G}}_T}{N\mathcal{G}_T} \right) \left( \frac{\Gamma}{2\Theta} + \frac{\mu}{\mathcal{G}_T} \right) \right], \quad (\text{A.16c})$$

$$c_4 = \mathcal{G}_S \left[ -\frac{\mathcal{G}_T^2 - \Gamma\mathcal{F}_T}{2\Theta\mathcal{G}_T} - \frac{2H\mu}{\Theta} + \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mu}{\Theta} \right) + \frac{\mu}{\mathcal{G}_T^2} (\mathcal{F}_T - \mathcal{F}_S) \right], \quad (\text{A.16d})$$

$$c_5 = \frac{\mathcal{G}_T^2}{2\Theta} \left[ \frac{\mathcal{G}_T^2 - \Gamma\mathcal{F}_T}{2\Theta\mathcal{G}_T} + \frac{2H\mu}{\Theta} - \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mu}{\Theta} \right) - \frac{\mu}{\mathcal{G}_T^2} (3\mathcal{F}_T - \mathcal{F}_S) \right], \quad (\text{A.16e})$$

$$c_6 = \frac{\mathcal{G}_S^2}{4\mathcal{G}_T} \left[ 1 + \frac{6H\mu}{\mathcal{G}_T} - 2\mathcal{G}_T \frac{d}{Ndt} \left( \frac{\mu}{\mathcal{G}_T^2} \right) \right], \quad (\text{A.16f})$$

и для теории (8) с  $\mu = 0$  получаем

$$c_4 = c_5 = 0.$$

## В Отсутствии режима сильной связи на ранних временах в модели сжимающейся Вселенной

В данном приложении мы проводим анализ проблемы сильной связи на ранних временах в теории с лагранжианом (10), (72). В рамках такой теории (и в анзаце (77)) была построена модель стадии сжатия с фоновыми решениями (76). В главе 1 мы подробно обсуждали основную идею нашего анализа: необходимо найти и сравнить характерный энергетический масштаб классической эволюции  $E_{class}$  (для модели из параграфа 2.1 этот масштаб определяется параметром Хаббла и пропорционален  $\sim |t|^{-1}$ ) и квантовый масштаб энергии сильной связи  $E_{strong}$ , который обычно получается из анализа нелинейных слагаемых в лагранжиане для возмущений над фоновым решением. Итак, запишем действие нашей теории

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int dt d^3x N a^3 (1 + \alpha) e^{3\zeta} \mathcal{L},$$

где мы расписали явно детерминант метрики; лагранжиан здесь дается выражением (10). Различные слагаемые в лагранжиане (10) содержат разные степени масштабного фактора, который в сжимающейся Вселенной нетривиально зависит от времени, а именно  $a(t) \propto (-t)^{-\chi}$ . Поэтому нам будет удобнее работать с *физическими* импульсами и частотами. Предполагая, что последние выше, чем  $E_{class}$ , то есть  $E_{strong} \gg E_{class}$ , мы можем пренебречь слабой зависимостью масштабного фактора от времени  $t$  и в каждый отдельный момент времени рассматривать  $a$  как (“мгновенно”) независящий от времени параметр (за исключением тех выражений, которые явно содержат параметр Хаббла, то есть производную от масштабного фактора по времени). Весь описанный анализ в терминах физических величин будет применим только в том случае, если классическое описание фонового решения действительно окажется законно, то есть удовлетворится условие  $E_{strong} \gg E_{class}$ . Имея в виду все вышесказанное,

введем физические пространственные и временные координаты как

$$\tilde{x} \equiv xa,$$

$$\tilde{t} \equiv tN = t.$$

Напомним, что  $N = 1$  в нашей модели, но мы все равно далее будем использовать обозначение  $\tilde{t}$  для ясности и единообразия записи с пространственными координатами  $\tilde{x}$ . Для соответствующих производных запишем

$$\tilde{\partial}_i \equiv \frac{1}{a} \partial_i, \quad (\text{B.1a})$$

$$\tilde{\partial}_t \equiv \frac{1}{N} \partial_t = \partial_t. \quad (\text{B.1b})$$

Перепишем теперь лагранжиан (10) в терминах физических переменных. Итак, определим

$$E_{ij} = K_{ij}N(1 + \alpha), \quad (\text{B.2})$$

и тогда получаем

$$\begin{aligned} E_j^i &= \gamma^{ik} E_{kj} = \gamma^{ik} \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{\gamma}_{kj} - {}^{(3)}\nabla_k N_j - {}^{(3)}\nabla_j N_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \gamma^{ik} \dot{\gamma}_{kj} - 2\gamma^{ik} \partial_j \partial_k \beta + 2\Gamma_{lj}^k \partial_k \beta \gamma^{il} + 2\Gamma_{lj}^k N_k^T \gamma^{il} - \gamma^{ik} \partial_k N_j^T - \gamma^{ik} \partial_j N_k^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \gamma^{ik} \dot{\gamma}_{kj} - 2e^{-h_{ik}} e^{-2\zeta} \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \beta + 2\tilde{\Gamma}_{lj}^k \tilde{\partial}_k \beta e^{-h_{il}} e^{-2\zeta} + 2\tilde{\Gamma}_{lj}^k \tilde{N}_k^T e^{-h_{il}} e^{-2\zeta} \right. \\ &\quad \left. - e^{-h_{ik}} e^{-2\zeta} \tilde{\partial}_k \tilde{N}_j^T - e^{-h_{ik}} \tilde{\partial}_j \tilde{N}_k^T \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

где  $e^{h_{ij}} \equiv (e^h)_{ij}$ , и

$$\gamma^{ik} \dot{\gamma}_{kj} = \frac{1}{a^2} e^{-h_{ik}} e^{-2\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2 e^{2\zeta} e^{h_{kj}} \right) = 2H \delta_j^i + e^{-h_{ik}} e^{-2\zeta} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( e^{2\zeta} e^{h_{kj}} \right), \quad (\text{B.4})$$

а новый (физический) вектор сдвига имеет вид

$$\tilde{N}_k^T \equiv \frac{N_k^T}{a},$$

и  $\tilde{\Gamma}_{ij}^l$  (и  ${}^{(3)}\tilde{R}$  ниже) строятся по метрике  $\tilde{\gamma}_{ij} = e^{h_{ij}} e^{2\zeta}$ . Аналогично перепишем и  ${}^{(3)}R$  как:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= \gamma^{ij} {}^{(3)}R_{ij} = \gamma^{ij} \left[ \partial_l \Gamma_{ij}^l - \partial_i \Gamma_{lj}^l + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{ml}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^l \right] \\ &= e^{-h_{ij}} e^{-2\zeta} \left[ \tilde{\partial}_l \tilde{\Gamma}_{ij}^l - \tilde{\partial}_i \tilde{\Gamma}_{lj}^l + \tilde{\Gamma}_{ij}^l \tilde{\Gamma}_{ml}^m - \tilde{\Gamma}_{il}^m \tilde{\Gamma}_{jm}^l \right] = {}^{(3)}\tilde{R}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Наконец, для инвариантного объема можем записать, что  $\sqrt{-g}d^4x = (1 + \alpha)e^{3\zeta}d\tilde{t}d^3\tilde{x}$ . Таким образом, действие, записанное в терминах физических переменных, не содержит масштабного фактора. В остальном лагранжиан теперь имеет ту же структуру, что и исходный (10), за исключением первого слагаемого в правой части формулы (B.4).

Действие для возмущений, записанное в терминах физических переменных  $\tilde{x}^i, \tilde{t}$  почти полностью совпадает с действием, которое мы рассматривали в главе 1 и в работе [103], где мы изучали проблему сильной связи в модели генезиса (аналогичная модель рассмотрена и в параграфе 2.3). Единственное различие заключается в том, что модель генезиса содержит дополнительный параметр  $\delta > 0$ , например, см. формулу (133), в то время как в модели сжатия этот параметр отсутствует. Путем прямой проверки можно убедиться, что действие для возмущений в модели сжатия, записанное в терминах физических переменных, получается из действия для возмущений в модели генезиса, если положить  $\delta \rightarrow 0$  (при этом мы не теряем первое слагаемое в правой части выражения (B.4)). Таким образом, достаточное условие отсутствия проблемы сильной связи получается из результатов главы 1 (или работы [103]) как предельный случай при  $\delta \rightarrow 0$  и имеет вид

$$\mu < 1 . \tag{B.6}$$

Этот результат мы и использовали в параграфе 2.1.

Получим это ограничение, также рассмотрев квадратичное и действие третьего порядка для тензорных возмущений. Объединяя два этих действия вместе, запишем в терминах физических переменных [113]

$$\mathcal{S}_{hh}^{(2)} + \mathcal{S}_{hh}^{(3)} = \int d\tilde{t}d^3\tilde{x} \mathcal{F}_T (\tilde{\partial}h_{ij})^2 + \int d\tilde{t}d^3\tilde{x} \frac{\mathcal{F}_T}{4} (h_{ik}h_{jl} - \frac{1}{2}h_{ij}h_{kl}) \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_l h_{ij} .$$

Напомним, что  $\mathcal{F}_T \propto (-\tilde{t})^{-2\mu}$ , см. (81a). Чтобы получить соответствующий энергетический масштаб сильной связи, введем (аналогичную процедуру мы проделали в главе 1, см. формулу (60)) канонически нормированное поле, у

которого мы снова опускаем трехмерные индексы для простоты

$$h_c = \mathcal{F}_T^{1/2} h \propto (-\tilde{t})^{-\mu} h , \quad (\text{B.7})$$

и находим, что действие для взаимодействия трех тензорных возмущений пропорционально

$$\int d\tilde{t} d^3 \tilde{x} \mathcal{F}_T^{-1/2} h_c h_c \tilde{\partial}^2 h_c . \quad (\text{B.8})$$

Таким образом, выделяя величину с размерностью энергии, получаем масштаб сильной связи

$$E_{strong} \propto \mathcal{F}_T^{1/2} \propto (-\tilde{t})^{-\mu} .$$

Этот масштаб намного выше, чем классический,  $E_{class} = \tilde{t}^{-1}$  при  $\mu < 1$ , как и ожидалось.



## С Детали численных вычислений в модели Вселенной с генезисом и сжатием

Данное приложение посвящено обсуждению численных вычислений и связанных с ними тонкостей в модели Вселенной из параграфа 2.3, эволюция которой начинается с генезиса, а далее переходит на этап сжатия. Все рассуждения применимы и к модели обычного генезиса с последующей инфляцией из параграфа 2.4.

Как мы указывали в параграфе 2.3, поправки к ведущим асимптотикам классических решений на ранних временах ведут себя как  $(-t)^{-\delta}$ . При малых значениях  $\delta$  в такой модели возникают трудности, связанные с численными расчетами. Ниже мы раскрываем суть проблемы и показываем, как можно ее обойти. Для определенности рассмотрим только модель из параграфа 2.3 с  $\delta = 0.1$ .

Рассмотрим временной интервал  $-\infty < t < t_1$ , где  $t_1$  отрицательно, а значение его модуля  $|t_1|$  достаточно большое. В таком случае, мы имеем право брать следующие асимптотики для функций из лагранжиана

$$y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0, \quad f(t) = -ct \quad (\text{C.1})$$

(напомним, что двигаясь назад по времени к  $-\infty$ , функции выходят на эти асимптотические поведения экспоненциально быстро). Далее, введем новую временную переменную  $u$  вместо  $t$ :

$$u \equiv (-ct)^{-\delta} > 0; \quad (\text{C.2})$$

асимптотическое поведение всех функций на ранних временах “включается” при  $u \rightarrow 0$ . Соответственно, поправки к ведущим асимптотикам фоновых решений будут теперь порядка  $u$ . Ключевым моментом нашего рассуждения является введение новой неизвестной функции  $k(u)$  вместо параметра Хаббла  $H$  следу-

ющим образом:

$$k(u) \equiv u^{-1/\delta-1} \cdot H(u) \cdot N(u).$$

Тогда коэффициент вида  $u^{2/\delta}$  становится общим множителем в уравнениях движения (114), а коэффициенты в этих уравнениях становятся просто линейными полиномами по  $u$ .

Необходимо теперь задать начальные условия в далеком прошлом (то есть при малых  $u$ ) для решения полученных уравнений. Для функций  $N(u)$  и  $k(u)$  можно написать разложение, используя (119). Первые нетривиальные слагаемые в этом разложении можно легко получить. Итак, перепишем выражения (119) в терминах новых переменных и функций как

$$N(u) = 1 + N_1 \cdot c^\delta \cdot u + \dots,$$

и

$$k(u) = -\chi \cdot c^{1+\delta} - (\chi \cdot N_1 + \chi_1) \cdot c^{1+2\delta} \cdot u + \dots.$$

Для нашего выбора параметров  $x$ ,  $y_0$  и  $z_0$  в (130), а также для  $\mu = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$  и  $c = 1.75 \cdot 10^{-2}$ , коэффициенты написанного выше разложения (найденные из подстановки этих разложений в соответствующие уравнения движения) равны

$$\chi \cdot c^{1+\delta} = 0.0029, \quad (\chi \cdot N_1 + \chi_1) \cdot c^{1+2\delta} = 0.0043, \quad N_1 \cdot c^\delta = 1.09.$$

Таким образом, все поправки малы при достаточно малых значениях  $u = u_0$  (где и накладываются начальные условия). В данном примере мы полагаем  $u_0 = 10^{-7}$ , что соответствует времени  $t_0 = -6 \cdot 10^7$ . Такое значение и приводило к трудностям в численных расчетах и является причиной, по которой мы проделали процедуру, описанную выше. При решении же уравнений движения с заданными начальными условиями в новой форме, изложенной в этом приложении, мы уже не сталкиваемся с проблемами в численных вычислениях.

Итак, мы решаем уравнения движения, записанные в терминах  $u$ , пока  $u$  не станет приблизительно равной единице; мы выбираем такое граничное значение как  $u_1 = (-ct_1)^{-\delta} = 0.67$ , так что  $t_1 = 3000$ . На таких временах все еще

можно работать с асимптотиками (С.1). В последующие моменты времени мы продолжаем решать уравнения движения уже в терминах старых переменных, используя время  $t$ , сшивая полученное решение на ранних временах в точке  $t = t_1$ .

## D Инвариантность относительно инверсии времени и симметрия $S$ -матрицы

В этом Приложении мы покажем, что  $T$ -инвариантность  $S$ -матрицы приводит к определенной симметрии для парциальных амплитуд, а именно

$$T_{\beta'\beta}^{(l)} = T_{\beta\beta'}^{(l)}. \quad (\text{D.1})$$

$T$ -инвариантность  $S$ -матрицы — это инвариантность соответствующих выражений относительно перестановки начального и конечных состояний и смены знаков всех пространственных импульсов на противоположные:

$$\langle \vec{p}', \beta' | S | \vec{p}, \beta \rangle = \langle -\vec{p}, \beta | S | -\vec{p}', \beta' \rangle.$$

Используя последнее свойство, запишем (напомним, что мы работаем в системе центра масс)

$$\begin{aligned} \langle l, m; \beta' | S | l, m; \beta \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 \hat{p}' d^3 \hat{p} Y_l^{m*}(\hat{p}') Y_l^m(\hat{p}) \langle \vec{p}', \beta' | S | \vec{p}, \beta \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 \hat{p}' d^3 \hat{p} Y_l^{m*}(\hat{p}') Y_l^m(\hat{p}) \langle -\vec{p}, \beta | S | -\vec{p}', \beta' \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3(-\hat{p}') d^3(-\hat{p}) Y_l^{m*}(-\hat{p}') Y_l^m(-\hat{p}) \langle \vec{p}, \beta | S | \vec{p}', \beta' \rangle. \end{aligned}$$

В свою очередь, сферические функции подчиняются

$$Y_l^m(-\hat{p}) = (-1)^l Y_l^m(\hat{p}), \quad (\text{D.2a})$$

$$Y_l^{m*}(\hat{p}) = (-1)^m Y_l^{-m}(\hat{p}), \quad (\text{D.2b})$$

и поэтому

$$Y_l^{m*}(-\hat{p}) = (-1)^{l+m} Y_l^{-m}(\hat{p}).$$

Итого, приходим к

$$\begin{aligned} \langle lm; \beta' | S | lm; \beta \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int \int d^3 \hat{p}' d^3 \hat{p} Y_l^{-m}(\hat{p}') Y_l^{-m*}(\hat{p}) \langle \vec{p}, \beta | S | \vec{p}', \beta' \rangle \\ &= \langle l, -m; \beta | S | l, -m; \beta' \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку эти матричные элементы не зависят от  $m$ , мы доказали соотношение (D.1).