

1 Основной вопрос космологии, или почему мы ничего не знаем о ньютоновской космологии.

*Открылась бездна, звезд полна,
Звездам числа нет, бездне дна.*

Михайло Васильевич Ломоносов написал это специально для своей первой университетской лекции по астрономии. Тон - восторженный. И это понятно. Начиная с Галилео Галилея ученые (включая Ломоносова) строили все более мощные телескопы и видели все больше и больше звезд. Отсюда экстраполяция на бесконечное пространство (бездна = без дна, да простим Михайле Васильевичу нечаянную тавтологию). Даже если бы были построены в это время телескопы, в которые можно разглядеть галактики, это ничего не изменило бы: какая разница, считать звезды или галактики - все равно бездна. Пространство считалось однородным и изотропным, а геометрия в нем - евклидовой. Понятно, что до середины 19 века никто и помыслить ни о чем не мог. Более того, такое представление подкреплялось законами механики Ньютона. Действительно, из этих законов получались: а) закон сохранения энергии замкнутых систем как следствие однородности времени - результат эксперимента не зависит от того, когда он был выполнен, сегодня или завтра; б) закон сохранения количества движения (импульса) как следствие однородности пространства - неважно, где эксперимент был сделан, в Москве или, скажем, в Новосибирске; в) закон сохранения момента количества движения для изолированных систем - независимость от ориентации в пространстве - изотропия.

В середине 17 века (времена Ньютона) уже было вполне осознано, что ни Земля, ни Солнечная система не являются центром Вселенной, и потому естественно было предположить, что распределение материи в среднем, на космологических масштабах (без количественного уточнения этой "космологичности"), также является однородным и изотропным. Итак, ньютоновская космологическая модель - это однородное изотропное пространство, заполненное однородно и изотропно

Ясно, что основным на космологических расстояниях является гравитационное взаимодействие (вследствие большой массы звезд и галактик). Посмотрим, к чему это приводит. Знаменитый закон всемирного

тяготения Ньютона в дифференциальной форме приводит к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \quad (1)$$

где ϕ - потенциал, градиент которого определяет напряженность гравитационного поля, Δ - оператор Лапласа, G - гравитационная постоянная, а ρ - плотность гравитирующего вещества. В нашем случае ($av = average$) средняя плотность постоянна $\rho = r h o_{av} = const$, и в силу однородности и изотропии мы можем выбрать в качестве центра любую точку и считать распределение сферически симметричным. Тогда $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$, и решение для потенциала с учетом начального условия ($\phi(0) = 0$) имеет вид:

$$\phi = \frac{2}{3}\pi G\rho_{av}r^2. \quad (2)$$

Сила притяжения, действующая на точечную массу μ на расстоянии r_0 от центра, равна

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho_{av}\mu\vec{r}_0 \\ &= -GM(r_0)\mu\vec{r}_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M(r_0)$ - масса вещества, заключенного в сфере радиуса r_0 . Поскольку величина r_0 можете быть сколь угодно большой, вплоть до бесконечности, а все точки у нас равноправны, то получаются, что на каждую точку в каждом направлении действует бесконечная сила. К счастью для нас, сила - величина векторная, и для каждого направления найдется ему противоположное. Поэтому результирующая сила от усредненного распределения вещества равна нулю в каждой точке, а про бесконечный потенциал (в силу линейности уравнения Пуассона) мы можем благополучно забыть, как "забываем" про бесконечную энергию вакуума в квантовой теории поля. Итак, мы получили довольно примитивную модель ньютоновской космологии, в которой вовсе нет глобальных эффектов, а только локальное гравитационное притяжение между неоднородностями (планетами, звездами, галактиками ...). Но не так все безоблачно.

Смертельный удар по нашей идиллической картинке наносит парадокс Ольберса. "Если будет спрошено, что важнее, Солнце или Луна, ответствуй - Луна, ибо Солнце светит днем, когда и без того светло, а Луна ночью гласит афоризм Козьмы Пруткова. Мы настолько привыкли к смене дня и ночи, что совершенно не задумываемся об этом. А Ольберс задумался и задал вопрос: а почему ночью небо темное? Это и есть

основной вопрос, и без ответа на него любая космологическая модель должна быть признана несостоятельной - ведь небо ночью действительно темное! Поясним, в чем тут дело. Рассмотрим ряд сферических слоев и телесный угол, исходящий из центра. Пусть n - средняя плотность звезд. Тогда количество звезд в куске слоя радиуса R и толщиной ΔR , вырезаемое телесным углом, равно

$$\Delta N = n \Delta R \Delta S, \quad (4)$$

где ΔS - площадь данного куска. Если светимость звезды I , то общая светимость $I \Delta N$, а освещенность, создаваемая в центре $\sim I/R^2$. Но площади кусков в разных слоях пропорциональны R^2 , следовательно, каждый слой вносит одинаковый конечный вклад в освещенность. Поскольку число слоев бесконечно, то и полная освещенность бесконечна, а ночью все же темно! Можно возразить, что звезды не вечны, они перестают светить, исчерпав горючее. Но рождаются новые звезды, и бесконечное количество звезд так и остается бесконечным, так что это не решает проблемы. Построенная нами космологическая модель не является единственно возможной. Действительно, вычитание бесконечностей - процедура вовсе небезобидная. Мы выбрали вполне определенный предельный переход - по радиусу концентрических слоев вещества. Очевидно, возможны и другие предельные переходы, что и останавливало многих исследователей. Кроме того, есть еще и принцип Маха (до сих пор по-настоящему ничем не подтвержденный, но очень заманчивый с философской точки зрения), предполагающий, что свойство инерции есть следствие воздействия всей удаленной материи, а у нас такое воздействие отсутствует вовсе.

Но, скажете вы, мы же знаем, что на самом деле пространство не является галилеевым, а специальная теория относительности, подтвержденная бесчисленными экспериментами, измерениями и наблюдениями, утверждает, что максимальная скорость распространения сигнала, а, значит, и взаимодействий, равна скорости света. Что это меняет в космологических теориях? Если Вселенная извечна, то не значит ничего - какое нам дело до конечности скорости распространения на фоне бесконечного времени! Но если верить Библии, что Бог все создал за семь дней, то Вселенная имело начало и существует лишь конечное время. Следовательно, в каждый момент времени до нас доходит свет от конечного числа звезд, и мы избавляемся от бесконечной освещенности. Но число этих звезд все увеличивается и увеличивается. С учетом старения

и умирания звезд неясно заранее, будет ли небо ночью темнеть со временем, или светлеть. В принципе, может быть достигнут и стационарный режим, но для этого процент погасших объектов должен увеличиваться. Другими словами, Вселенная должна стареть, что, кстати, в духе второго начала термодинамики, утверждающего что энтропия растет с приближением к состоянию теплового равновесия.

Забегая вперед, скажем, что основная причина неудачи в построении удовлетворительной ньютоновской космологической теории в том, что и в нерелятивистской физике, и в специальной теории относительности структура пространства-времени существует отдельно от распределения вещества в нем, т.е. это просто вместительное материю.

Ситуация коренным образом меняется в релятивистской теории гравитации - общей теории относительности.

2 Общая теория относительности: начало.

В 1916 году Альберт Эйнштейн окончательно сформулировал свои знаменитые уравнения релятивистской гравитации - общей теории относительности. В наше время любой студент физик-старшекурсник с легкостью их напишет - настолько просто и изящно они выглядят. Очевидно, однако, что новые уравнения нельзя просто вывести математически из старых. Их нужно придумать, основываясь на совершенно новых физических идеях и/или результатах экспериментов (иногда необходим новый взгляд, новая интерпретация уже известных данных). С чего же все началось?

А началось все с Галилео Галилея, который поставил первые гравитационные эксперименты, бросая различные тела с наклонной башни в итальянском городе Пизе. С доступной в то время точностью Галилей установил, что ускорение свободного падения одинаково для различных масс и не зависит от химического состава, и он по праву считается родоначальником гравитационной науки. После появления уравнений механики Ньютона стало ясно, что Галилей, по сути, открыл явление равенства инертной массы гравитационной. Действительно, сравнивая закон всемирного тяготения $F_{grav} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ с законом Кулона для взаимодействия электрических зарядов $F_{em} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, мы можем записать их единообразно (с заменой отталкивания на притяжение), введя гравитационные заряды $g_{1,2} = \sqrt{G} m_{1,2}$.

Долгое время (более двухсот лет) никто не задумывался над этим удивительным фактом - просто природа так устроена, и все тут! Но у Эйнштейна было по крайней мере одно, но значительное, преимущество - он "знал" специальную теорию относительности, все-таки автор (или один из них, это неважно в данном случае). И он задумался. Как именно думал Эйнштейн, в точности неизвестно, но, основываясь на опубликованных работах, можно кое-что реконструировать. Несложно написать множество релятивистских обобщений нерелятивистского уравнения Пуассона, как скалярных, так и тензорных или скалярно-тензорных (векторных нельзя, так как нам нужно получить притяжение, а не отталкивание, между зарядами одного знака), но для выбора нужен какой-то принцип, и этот принцип должен быть взят из физики. Эйнштейн, будучи совсем не математиком, а физиком до мозга костей - недаром Л.Д.Ландау его единственного поместил в первый класс своей таблицы о рангах физиков-теоретиков (Нильсу Бору, Полю Дираку, Эрвину Шредингеру и Вернеру Гейзенбергу он отвел полуторный класс) - начал как раз с поисков такого физического принципа. Он предположил, что равенство инертной и гравитационной масс, открытое Галилеем, не является случайным, и для наглядной иллюстрации этого придумал мысленный эксперимент с лифтом. Предположим, вы заперты в лифте и не можете иметь никаких сношений с внешним миром. Пусть в первом эксперименте лифт, находящийся вдали от гравитирующих тел, движется с постоянным ускорением вверх (имеется в виду, в направлении от ног к голове). Вы, согласно законам механики, будете чувствовать свой вес, обусловленный давлением ног на пол лифта. Во втором же эксперименте лифт покоится относительно некоторых гравитирующих тел, создающих в лифте постоянное гравитационное поле, тянущее лифт вниз (разумеется, для того, чтобы оставаться в состоянии покоя, нужно включить, например, реактивные двигатели, но вы об этом не догадываетесь). Вы опять будете чувствовать вес, и нет никаких способов выявить истину. Так Эйнштейн пришел к формулировке своего знаменитого принципа эквивалентности гравитации и сил инерции. Разумеется, мысленный эксперимент с лифтом - большая идеализация. Невозможно создать естественным образом однородное гравитационное поле, также как и постоянное ускорение (просто напросто горючего не хватит). В неоднородном же поле принцип эквивалентности действует лишь локально, причем, чем больше эти неоднородности, тем меньше должен быть лифт, чтобы наблюдатель, сидящий в нем, не мог, проводя измерения, выяснить, ускоряется ли он, ил

же притягивается силой тяжести. Кроме того, оператор, управляющий реактивными двигателями лифта, должен заранее знать распределение силовых полей. Ясно теперь, что тяготение и силы инерции все-таки разные вещи. Гравитация - объективная реальность, а силы инерции, хотя и реальность, но в определенной мере субъективная.

Тут Эйнштейн сделал очень смелый и решительный шаг. Поскольку ускоренный наблюдатель "видит" пространство-время иначе, чем наблюдатель инерциальный, то и наблюдатель в поле тяжести также должен видеть его иначе. И Эйнштейн предположил, что в поле тяжести такое изменение пространства-времени совершенно реально, а не просто изменение системы координат (например, переход от стандартных координат в плоском многообразии Минковского к координатам Риндлера, описывающих равноускоренных наблюдателей, отчего пространство-время не перестает быть локально плоским). И эта реальность - искривленное риманово псевдоэвклидово многообразие. В отличие от пространства-времени специальной теории относительности, различное описание которого с точки зрения различных инерциальных наблюдателей - явление чисто кинематическое, пространство-время общей теории относительности динамическое, зависит от распределенной в нем материи и должно описываться некоторыми дифференциальными уравнениями. Сразу же возникают два вопроса: какими динамическими переменными должно описываться релятивистское гравитационное поле и каким дифференциальным уравнениям они должны удовлетворять? Прежде, чем дать ответы, отметим два важных обстоятельства: во-первых, в нерелятивистском пределе мы должны получить гравитационный потенциал ϕ и уравнение Пуассона (1), и, во-вторых, уравнения должны записываться в ковариантной форме (т.е., быть скалярными, тензорными ...), поскольку теперь на смену инвариантности относительно преобразований Галилея в нерелятивистской физике и преобразований Лоренца в специальной теории относительности приходит инвариантность относительно общих диффеоморфизмов пространства-времени, описываемых нужное число раз дифференцируемыми функциями преобразований координат.

Будем отвечать на поставленные вопросы по порядку. Итак, что такое гравитационные потенциалы, иначе, динамические переменные, в общей теории относительности? В римановой геометрии основным объектом (в конечном счете определяющим все локальные свойства многообразия) является поле метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, определяющее величину интервала ds между двумя близлежащими точками пространства-

времени: $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (греческие индексы пробегают значения $(0,1,2,3)$, а латинские индексы - пространственные $(1,2,3)$). В специальной теории относительности стандартная метрика Минковского в координатах, связанных с инерциальными наблюдателями, равна $\text{diag}(+-)$, т.е., $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$. В искривленном же пространстве-времени всегда можно привести метрический тензор в заданной точке $(x_{(0)}^\alpha)$ к метрике Минковского. Действительно, из 16 возможных компонент тензора второго ранга мы имеем только 10 в силу симметричности по индексам. Преобразованием координат $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\beta)$ можно сделать равными нулю недиагональные компоненты g_{0i} , $i = 1, 2, 3$ (и еще одна степень свободы остается в запасе). Зафиксировав $x^0 = x_{(0)}^0$, и используя подгруппу $x'^i = x^i(x^k)$, $i, k = 1, 2, 3$ уберем компоненты вида g_{lj} , $l, j = 2, 3$, а после фиксации x_0^1 с помощью преобразования $x'^j = x^j(x^l)$ приведем, окончательно, метрику к диагональному виду. Теперь, выбрав заданную точку началом координатной системы $(0,0,0,0)$, простым масштабным преобразованием получаем метрический тензор в этой точке в виде $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Сравним, далее, лагранжианы для частицы в гравитационном поле в нерелятивистской и релятивистской (в соответствующем приближении) механиках. В нерелятивистской теории гравитации лагранжиан для частицы массы μ равен

$$L = T - U + \text{const} = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} - \mu \phi + \text{const}, \quad (5)$$

где T - кинетическая, а U - потенциальная энергия, \vec{V} - скорость частицы, а добавленная произвольная константа никак не влияет на уравнения движения. В релятивистской же теории функционал действия для

частицы, как известно, равен

$$\begin{aligned}
S &= -\mu c \int ds \\
&= -\mu c \sum_{\alpha,\beta} \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\
&= -\mu c \sum_{i=1,2,3} \int \sqrt{g^{00} c^2 dt^2 + 2g_{0i} c dt dx^i - d\vec{x}^2} \\
&= -\mu c^2 \sum_{i=1,2,3} \int \sqrt{g_{00} + 2g_{0i} \frac{V^i}{c} - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Лагранжиан, следовательно, равен

$$L = -\mu c^2 \sum_{i=1,2,3} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i} \frac{V^i}{c} - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}. \tag{7}$$

Далеко от источников гравитации $r \rightarrow \infty$ метрика приближается к метрике пространства-времени Минковского, т.е., $g_{00} \rightarrow 1$, $g_{0i} \rightarrow 0$, $g_{ii} \rightarrow -1$ (кстати, перекрестные члены g_{0i} всегда могут быть сведены к нулю подходящим преобразованием координат), и в нерелятивистском пределе ($\frac{V^2}{c^2} \ll 1$) получаем

$$\begin{aligned}
L &\approx -\mu c^2 \sqrt{g_{00} - \frac{\vec{V}^2}{c^2}} \\
&\approx -\mu c^2 \left(\sqrt{1 + \alpha} - \frac{\vec{V}^2}{2c^2} \right) \\
&\approx -\mu c^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\mu \vec{V}^2}{2} \\
&= \frac{\mu \vec{V}^2}{2} - \frac{\alpha \mu}{2c^2} - \mu c^2. \tag{8}
\end{aligned}$$

Здесь α - некоторая малая величина первого порядка. Сравнивая с нерелятивистским лагранжианом, получаем, что произвольная до сих пор константа равна $(-\mu c^2)$, а

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \tag{9}$$

Поскольку, очевидно, потенциал ϕ входит и в другие компоненты метрического тензора (здесь они не были учтены в силу малости скорости по сравнению со скоростью света), мы видим, что скалярный потенциал нерелятивистской теории гравитации переходит в общей теории относительности в симметричный тензор второго ранга - метрику пространства-времени.

Для ответа на второй вопрос - об уравнениях - нам необходимы дополнительные знания по дифференциальной геометрии, чему будет посвящена следующая глава. Здесь же, следуя Эйнштейну, сделаем первые шаги. Во-первых, должно быть дифференциальное уравнение, линейное по вторым частным производным метрического тензора. Во-вторых, из специальной теории относительности следует, что плотность массы ρ (или, что одно и то же, плотность энергии $\varepsilon = \rho c^2$) есть лишь (00)-компонента симметричного тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$. В начале прошлого века физики не интересовались дифференциальной геометрией - она им попросту не была нужна. Эйнштейн не был исключением. Именно поэтому он ходил по коридорам Берлинского университета и Берлинской академии наук, подходил к каждому математику и говорил: дайте мне симметричный тензор второго ранга, линейный по вторым производным от метрического тензора! Наконец, он получил положительный ответ!

3 Отрывок из дифференциальной геометрии: то, что нужно нам.

3.1 Тензорная алгебра.

Тот кусок дифференциальной геометрии, который нам нужен, имеет дело с векторами и их обобщением - тензорами (или, наоборот, с тензорами, частным случаем которых являются векторы). Тензоры имеют вполне определенный закон преобразования при переходе от одной системы координат к другой и обладают очень важным свойством: если вектор или тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой. Кроме того, векторы и тензоры - линейные объекты, т.е. сумма их переходит в сумму преобразованных, и умножение на некоторое число приводит после преобразование к умножению на то же число. Начнем с векторов.

Вектор с верхним индексом A^i называется контравариантным, с ниж-

ним - A_i - ковариантным. Закон преобразования контравариантного вектора при переходе от координат x^i к новым координатам x'^i имеет вид

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k, \quad (10)$$

а для ковариантного вектора используют обратное преобразование

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k, \quad (11)$$

так что свертка векторов $A_i A^i$, являющаяся скаляром (объектом без индексов), остается неизменной:

$$A'^i A'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} A^k A_l = \delta_k^l A^k A_l = A^k A_k, \quad (12)$$

как и должно быть. В этих формулах мы использовали так называемое соглашение Эйнштейна: по двум одинаковым индексам сверху и внизу подразумевается суммирование, что значительно облегчает написание и улучшает наглядность и обозримость тензорных формул. Молодец Эйнштейн! Очевидно, что такой закон преобразования обеспечивает свойство линейности.

Тензор второго ранга - это объект с двумя индексами: или сверху A_{ik} - контравариантный, или внизу A^{ik} - ковариантный, или один сверху и один внизу A^i_k - это т.н. смешанный тензор. Чтобы написать закон преобразования тензора при изменении системы координат, достаточно заметить, что произведение двух векторов $A_i A_k$, $A^i A^k$ или $A^i A_k$, рассматриваемое как единый объект - тоже тензор, поэтому тензор преобразуется как произведение соответствующих преобразований векторов с необходимыми свертками (суммированием) одинаковых верхних и нижних индексов. Выпишем этот закон преобразования в явном виде:

$$\begin{aligned} T'^{ik} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} T^{lm} \\ T'_{ik} &= \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} T_{lm} \\ T_k^i &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} T_m^l. \end{aligned} \quad (13)$$

Свертка же T_i^i есть скаляр (нет "живых" индексов, только суммирование по "немому" индексу i), подтверждением этому - закон преобразования

$$T_k'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} T_m^l = \delta_l^m T_m^l = T_l^l. \quad (14)$$

Обобщение на тензоры третьего, четвертого и более высоких рангов очевидно: увеличение количества индексов просто ведет к увеличению количества сомножителей в законе преобразования с необходимыми суммированиями (свертками). Свертка по одному верхнему и одному нижнему индексам понижает ранг тензора на две единицы. Так, например, метрика многообразия определяется интервалом ds^2 между близлежащими точками, который является, по определению, сверткой $g_{\alpha\beta}$ с произведением бесконечно малых векторов $dx^\alpha dx^\beta$, что и доказывает тензорный характер метрики.

3.2 Ковариантное дифференцирование.

Но недостаточно знать только тензорную алгебру. Необходимо уметь дифференцировать тензоры (вспомним, что наша цель - дифференциальное уравнение второго порядка для метрического тензора). В плоском пространстве-времени Минковского в галилеевых координатах ($ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$) дифференциал контравариантного тензора A^i также является вектором dA^i . Но в искривленном многообразии (а также в плоском, но в криволинейных координатах) это уже не так. В самом деле,

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k, \\ dA^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dA'^k + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial x'^l} A'^k dx'^l, \end{aligned} \quad (15)$$

и векторный закон преобразования нарушается присутствием второго слагаемого, которое равно нулю, только если это преобразование есть линейная функция новых координат. Почему такое происходит? Мы можем сравнивать (вычитать) векторы только в одной и той же точке, а для этого нужно как-то перенести один из двух бесконечно близких векторов в другую точку, причем так, чтобы операция дифференцирования в галилеевых координатах совпадала с dA^i . Другими словами, мы должны найти обобщение параллельного переноса. Кроме того, мы хотим, чтобы этот

обобщенный дифференциал был вектором (в общем случае - тензором), т.е., ковариантным дифференциалом. Для этого есть и математические, и физические основания. Исторически обобщение параллельного переноса было найдено при исследовании двумерных искривленных поверхностей. Такая поверхность помещалась в плоское пространство, в котором обычным образом производился параллельный перенос вектора, а затем результат проектировался назад на поверхность. Естественно, возникал при этом новый, обобщенный, дифференциал. Физические обоснования вот какие. Мы уже упоминали о том, что в присутствии гравитирующих тел статический наблюдатель, на самом деле, имеет ненулевое ускорение, Естественно, свободно падающий наблюдатель должен падать без ускорения (реактивные двигатели выключены). Очевидно, что обычным образом определенное ускорение (вторая производная от координат пространства по времени) отнюдь не равна нулю. Нулевым должно быть ковариантное ускорение, которое остается нулевым в любой системе отсчета. Соответствующие траектории называются геодезическими линиями и являются обобщением прямых в плоском пространстве-времени, также и в том смысле, что они - "кратчайший" путь между двумя точками.

Пусть A^i - векторное поле, $A^i(x)$ и $A^i(x + dx)$ - его значения в близлежащих точках. Тогда, по определению, $A^i(x + dx) = A^i + dA^i$, и пусть после параллельного переноса (который пока что нами не определен) вектор $A^i(x)$ получает приращение δA^i , т.е., $A^i \rightarrow A^i + \delta A^i$. Очевидно, $dA^i - \delta A^i$ - вектор. Назовем ковариантным дифференциалом

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (16)$$

Чтобы явно была видна линейность ковариантного дифференцирования, запишем приращение δ в виде

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (17)$$

знак минус - "исторический" а величины Γ_{kl}^i зависят только от свойств пространства-времени с точностью до координатных преобразований. Эти величины называются коэффициентами связности (или просто связностью). Итак,

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{kl}^i A^k dx^l. \quad (18)$$

Закон преобразования Γ_{kl}^i следует из (15) и векторного характера DA^i :

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{mn}^p \frac{\partial x^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^m}. \quad (19)$$

Кроме линейности, потребуем, чтобы выполнялось правило Лейбница для дифференцирования произведений, например,

$$DA^i B^k = (DA^i) B^k + A^i (DB^k), \quad (20)$$

а также, чтобы ковариантный дифференциал скаляра совпадал с обычным дифференциалом, $D\varphi = d\varphi$, т.е., при параллельном переносе $\delta\varphi = 0$, $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+dx)$. Теперь легко получить правило ковариантного дифференцирования ковариантных векторов. Пусть φ - свертка двух векторов, $\varphi = A^i B_i$, тогда

$$\begin{aligned} D(A^i B_i) &= (DA^i) B_i + A^i DB_i \\ &= (dA^i) B_i + \Gamma_{kl}^i A^k B_i dx^l + A^i DB_i \\ &= (dA^i) B_i + A^i dB_i; \end{aligned}$$

$$DB_i = dB_i - \Gamma_{il}^k B_k dx^l. \quad (21)$$

Несложно также понять, каким должно быть ковариантное дифференцирование тензоров. Поскольку частным случаем тензора является произведение векторов, ясно, что операция должна производиться по каждому индексу с применением правила Лейбница. В качестве примера выпишем результат для тензоров второго ранга A^{ik} , A_{ik} , A_k^i

$$\begin{aligned} DA^{ik} &= dA^{ik} + \Gamma_{lm}^i A^{lk} dx^m - \Gamma_{lm}^k A_{il} dx^m, \\ DA_{ik} &= dA_{ik} - \Gamma_{im}^l A_{lk} dx^m - \Gamma_{km}^l A_{il} dx^m, \\ DA_k^i &= dA_k^i + \Gamma_{lm}^i A_k^l dx^m - \Gamma_{km}^l A_l^i dx^m. \end{aligned} \quad (22)$$

$A_{;k}^i$

$$\begin{aligned} DA^i &= \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l \equiv A_{;k}^i dx^l, \\ A_{;k}^i &= A_{,k}^i + \Gamma_{kl}^i A^l, \\ A_{i;k} &= A_{i,k} - \Gamma_{ik}^l A_l, \end{aligned} \quad (23)$$

где введены общепринятые обозначения: запятая означает обычную частную производную по координате с индексом "к" а точка с запятой - ковариантную производную.

3.3 Свойства коэффициентов связности. Метрическая связность.

Необходимо подчеркнуть, что до сих пор связность никак не была связана с метрическим тензором (мухи отдельно - котлеты отдельно), т.е., метрическая структура пространства-времени, определяющая расстояния между точками, совершенно независима от связности, определяющей параллельный перенос векторов и тензоров. Такие пространства называются пространствами аффинной связности. Единственно, что мы знаем о коэффициентах связности - это их закон преобразования при переходе от одной системы координат к другой. В физике различают несимметричные связности $\Gamma_{kl}^i \neq \Gamma_{lk}^i$ и симметричные $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$. В первом случае возникает тензор кручения $S_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{lk}^i$ (легко проверить, что это именно тензор). Это приводит, в конце концов, к так называемой теории гравитации Эйнштейна-Картана с очень сложной математикой и пока не подтвержденной наблюдениями. В дальнейшем мы будем иметь дело только с симметричными связностями. Оказывается, такое простое (и только оно) ограничение на структуру коэффициентов Γ_{il}^i приводит к интересным и важным следствиям. Укажем здесь два из них. Первое: всегда можно определенным преобразованием координат сделать коэффициенты связности равными нулю (это не тензор!) в заданной точке, не затрагивая при этом метрику. Действительно, рассмотрим преобразование

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{kl}^i)_0 x^k x^l \quad (24)$$

в некоторой окрестности данной точки, индекс "0" указывает, что связность задана именно в этой точке. Запишем уравнение (19) наоборот, т.е., поменяем местами штрихованные и нештрихованные величины:

$$(\Gamma_{kl}^i)_0 = (\Gamma_{mn}^p)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \quad (25)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} &= \delta_k^i + \frac{1}{2} ((\Gamma_{kl}^i)_0 + (\Gamma_{lk}^i)_0) x^l, \\ \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^l} &= \frac{1}{2} ((\Gamma_{kl}^i)_0 + (\Gamma_{lk}^i)_0). \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь положим в первом уравнении $x^l = 0$, т.е., $(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i$ и $(g'_{ik})_0 = (g_{ik})_0$. Подставив все это в закон преобразования, получаем

$$(\Gamma_{kl}^i)_0 = \frac{1}{2} ((\Gamma_{kl}^i)_0 - (\Gamma_{lk}^i)_0). \quad (27)$$

Если же связность симметрична, то имеем искомый результат:

$$(\Gamma_{kl}^i)_0 = 0; (g'_{ik})_0 = (g_{ik})_0. \quad (28)$$

Второе же свойство состоит вот в чем. Рассмотрим ковариантную производную ковариантного вектора A_i . Переставим индексы в тензоре $A_{i;k}$ и запишем разность $(A_{i;k} - A_{k;i})$ в случае, когда вектор A_i - градиентный, т.е., $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, где φ - некий скаляр. Тогда

$$\begin{aligned} A_{i;k} - A_{k;i} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} - (\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l) \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \\ &= -(\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l) \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}. \end{aligned} \quad (29)$$

Если связность симметрична, то $A_{i;k} = A_{k;i}$.

Среди симметричных связностей особое место занимает одна, определяемая метрическим тензором. Она называется метрической связностью, а коэффициенты Γ_{kl}^i - символами Кристоффеля. Но прежде, чем перейти к ее рассмотрению, сделаем небольшое, но важное отступление. До сих пор мы считали различными ковариантные и контравариантные векторы A^i и A_i , тензоры A^{ik} , A_{ik} , A_k^i и т.д. Но метрический тензор g_{ik} и обратный ему тензор g^{ik} , определяемый уравнением $g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i$, где δ_l^i - единичный тензор $diag(1, 1, 1, 1)$, называемый символом Кронекера, позволяет ввести операцию поднимания и опускания индексов. Именно, каждому контравариантному вектору A^k соответствует ковариантный тензор A_i , $A_i = g_{ik} A^k$ и наоборот, $A^i = g^{ik} A_k$. Эти определения согласованы между собой, именно, $A_i = g_{ik} A^k = g_{ik} g^{kl} A_l = \delta_l^i A_l = A_i$. Для тензоров все определяется совершенно аналогично для каждого индекса в отдельности, так, например, A^{ik} , A_{ik} и A_k^i это один и тот же тензор в разных ипостаях. В дальнейшем одинаковой буквой мы будем обозначать вектор или тензор независимо от того, внизу у него или сверху какой-либо индекс.

Но вернемся к нашим баранам. Метрическая связность (символы Кристоффеля) определяются системой уравнений

$$g_{ik;l} = 0 \quad (30)$$

или, что то же самое, $g_{;l}^{ik} = 0$ в силу нормировки на постоянный единичный тензор и правила Лейбница и линейности операции ковариантного дифференцирования. Сделаем в предыдущем уравнении циклическую перестановку индексов и запишем это в развернутом виде.

$$\begin{aligned} g_{il;l} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{mi} = 0, \\ g_{li;k} &= \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{ml} = 0, \\ g_{kl;i} &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^m g_{ml} - \Gamma_{il}^m g_{ml} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Сложим теперь любые два из этих уравнений и вычтем из суммы третье:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} + 2g_{ml}\Gamma_{ki}^m = 0 \quad (32)$$

Свертывая последнее уравнение с обратным метрическим тензором g^{lj} , получаем

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2}g^{jl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right). \quad (33)$$

Очевидно теперь, что символы Кристоффеля однозначно определяются метрическим тензором и его первыми производными. Мы уже видели, что метрический тензор в заданной точке всегда можно привести к диагональной метрике Минковского, а коэффициенты симметричной связности сделать равными нулю в этой же точке, не затрагивая компоненты метрики. Если же мы имеем дело с метрической связностью, то автоматически получаем дополнительное условие $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}(x_{(0)}) = 0$. Поскольку в релятивистской теории гравитации динамическое уравнение для компонент метрики (потенциалов) - это дифференциальное уравнение второго порядка, то становится очевидным, что именно вторые производные от метрики или, эквивалентно, первые производные компонент связности должны определять кривизну пространства-времени.

Коэффициенты метрической связности позволяют вывести ряд очень полезных формул. Пусть g - детерминант метрики $g_{\alpha\beta}$. Очевидно, что его ковариантный дифференциал равен нулю (детерминант равен сумме различных произведений компонент метрики - далее правило Лейбница). Вычислим обыкновенный дифференциал этого детерминанта. Из теории матриц известно, что $dg = M^{ik} dg_{ik}$, где M^{ik} - соответствующие миноры.

С другой стороны, та же теория матриц говорит нам, что обратный метрический тензор равен $g^{ik} = \frac{M_{ik}}{g}$, отсюда

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik} \quad (g^{ik} g_{kl} = \delta_l^k) \quad (34)$$

Вычислим теперь свертку символов Γ_{ki}^i :

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lk,i} + g_{li,k} - g_{ki,l}) = \frac{1}{2} g^{il} g_{li,k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (35)$$

Первое и третье слагаемые в первом равенстве сокращаются в силу симметрии по свертываемым индексам (i, l) , а окончательный результат следует из (34). Другая свертка, $g^{ik} \Gamma_{ik}^l$, также превращается в удобоваримое при конкретных вычислениях выражение:

$$\begin{aligned} g^{ik} \Gamma_{ik}^l &= \frac{1}{2} g^{ik} g^{lm} (g_{mi,k} + g_{mk,i} - g_{ik,m}) = g^{ik} g_{mk,i} g^{lm} - \frac{1}{2} g^{ik} g_{ik,m} g^{lm} \\ &= -\frac{(\sqrt{-g})_{,m}}{\sqrt{-g}} g^{lm} - g^{ik} g_{mk} g_{,i}^{lm} = -\frac{(\sqrt{-g})_{,m}}{\sqrt{-g}} g^{lm} - g_{,m}^{lm} \\ &= -\frac{(\sqrt{-g} g^{lm})_{,m}}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Покажем, далее, как ковариантную дивергенцию $A^i_{;i}$ можно переписать через обычную дивергенцию, что особенно ценно при преобразовании объемных интегралов в поверхностные и многократно используется (как мы увидим) при вычислениях функционалов в принципе наименьшего действия. Действительно,

$$\begin{aligned} A^i_{;i} &= A^i_{,i} + \Gamma_{ik}^i A^k = A^i_{,i} + \frac{(\sqrt{-g})_{,k}}{\sqrt{-g}} A^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} = \frac{(\sqrt{-g} A^i)_{,i}}{\sqrt{-g}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Приведем еще два примера дивергенций, антисимметричного и симметричного тензоров второго ранга, (без доказательства - оно очевидно):

$$\begin{aligned} A^{ik} &= -A^{ki}, \quad A^i_{;k} = \frac{(\sqrt{-g} A^{ik})_{,k}}{\sqrt{-g}}; \\ A^{ik} &= A^{ki}, \quad A^k_{;i} = \frac{(\sqrt{-g} A^k_i)_{,k}}{\sqrt{-g}} - \frac{1}{2} g_{kl,i} A^{kl}. \end{aligned} \quad (38)$$

До сих пор мы рассматривали ковариантное дифференцирование тензоров. Но в искривленном пространстве-времени приходится иметь дело и с тензорными плотностями - объектами, в закон преобразования которых входит якобиан перехода (возведенный в некоторую степень) от одних координат к другим. Наиболее часто встречается и потому самый известный из них - это $\sqrt{-g}$, корень квадратный из детерминанта метрического тензора, являющийся неизменным атрибутом подынтегрального выражения при интегрировании по объему и одновременно скалярной плотностью первой степени. Поскольку любая тензорная плотность есть, по сути, скалярная плотность некоторой степени, умноженная на тензор, то, в силу правила Лейбница, нам достаточно определить ковариантный дифференциал (или ковариантную производную) для любой скалярной плотности первой степени, например, $\sqrt{-g}$. Если связность метрическая, то, как мы видели, все тривиально: ковариантная производная детерминанта метрики просто равна нулю. А если связность не зависит от метрики? Сравним выражения (34 и 35. Из них следует, что

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \sqrt{-g} \Gamma_{ki}^i. \quad (39)$$

Поскольку операция ковариантного дифференцирования должна быть линейной и "связанной" с коэффициентами связности, естественно принять за правило, что ковариантная производная скалярной плотности $\sqrt{-g}$ равна, в общем случае

$$(\sqrt{-g})_{;k} = (\sqrt{-g})_{,k} - \sqrt{-g} \Gamma_{ki}^i. \quad (40)$$

Неметрические связности - это не просто игра ума для математиков. В настоящее время интерес к ним возник и в космологии, в частности, к так называемой связности Вейля, для которой $(\sqrt{-g})_{;k} = b_k \sqrt{-g}$, где b_k , определяемый из соответствующих уравнений движения.

3.4 Геодезические.

В нерелятивистской механике действует первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых тело в отсутствие взаимодействий с другими телами находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, другими словами, $\vec{V} = const$. В релятивистской механике специальной теории относительности

формулировка этого закона не меняется. Однако, поскольку здесь мы имеем дело не с трехмерным пространством и отдельно со временем, а с геометрией четырехмерного пространства-времени, желательно иметь четырехмерную математическую формулировку. Для этого вводится четырехмерный вектор 4-х-скорости $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, $x^0 = ct$ $\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$, $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = (u^0)^2 (1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}) ds^2 = ((u^0)^2 - (\vec{u})^2) ds^2$, откуда следует нормировка $u^i u_i = 1$, где $u_i g_{ik} u^k g_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Очевидно, из условия $\vec{V} = \text{const}$ следует $u^i = \text{const}$ или, в дифференциальной форме, $du^i = 0$, т.е., движение без ускорения.

В релятивистской теории гравитации неподвижный относительно гравитирующего тела наблюдатель имеет ненулевое ускорение, а свободное падение есть невесомость. Следовательно, обобщение инерциальной системы отсчета = это набор свободно падающих тел, а ковариантное обобщение условия $du^i = 0$ - нулевой ковариантный дифференциал (очевидно, что теперь $du^i = 0$ для стационарного, а не для свободно падающего, наблюдателя). Итак, в свободном падении

$$Du^i = 0 \quad (41)$$

или, в развернутой записи,

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l &= 0, \\ \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Это и есть искомое уравнение геодезических, являющихся обобщением прямых линий на искривленное пространство-время.

В плоском пространстве-времени прямые линии обладают еще одним очень важным свойством, выделяющих их из множества возможных траекторий - они определяют кратчайшее расстояние между двумя точками в трехмерном пространстве Галилея и в четырехмерном многообразии специальной теории относительности. Чтобы убедиться в последнем, рассмотрим функционал действия для свободной релятивистской частицы:

$$S = -m c \int_a^b ds \quad (43)$$

и его вариацию по возможным траекториям с закрепленными концами, $\delta x^i|_a = \delta x^i|_b = 0$. Поскольку $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = c \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}} dt$, то

$$\begin{aligned}
\delta S &= -m c^2 \int_a^b \delta \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}} dt = m \int_a^b \frac{\vec{V} \delta \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} dt \\
&= m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V} \delta \vec{x}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} \right) dt - m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} \right) \delta \vec{x} dt \\
&= m \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} \delta \vec{x}|_a^b - m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} \right) \delta \vec{x} dt \\
&= -m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} \right) \delta \vec{x} dt. \tag{44}
\end{aligned}$$

Принцип наименьшего действия требует равенства нулю первой вариации δS . Поскольку $\delta \vec{x}$ произвольно, то мы получаем релятивистский второй закон Ньютона для свободной частицы

$$m \frac{d}{dt} \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}} = 0, \quad \vec{V} = \text{const}, \tag{45}$$

Мы видим, что движение по инерции в специальной теории относительности определяет экстремум действия. Но максимум это или минимум? Для ответа на этот вопрос необходимо знать знак второй вариации, но мы не здесь будем его искать. Такие вычисления делались, и было показано, что действие (43) действительно минимально на уравнениях движения - отсюда знак "минус" перед интегралом.

Перейдем теперь к релятивистской теории гравитации - общей относительности. Простейшее обобщение - оставить внешний вид действия без изменения, но теперь интервал между близлежащими точками зависит от произвольного метрического тензора:

$$S = -m c \int_a^b ds = -m c \int_a^b \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}. \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= -m c \int_a^b \delta ds \\
&= -m c \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} dx^i dx^k \delta x^l - m c \int_a^b \frac{g_{ik}}{ds} dx^i \delta dx^k \\
&= -m c \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k \delta x^l ds - m c \int_a^b g_{ik} u^i \delta dx^k. \tag{47}
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям второй интеграл в последнем равенстве и учитывая, что на закрепленных концах $\delta x^l|_a^b = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
\delta S &= -m c \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k \delta x^l ds \\
&\quad - m c (g_{ik} u^k) \delta x^k|_a^b + m c \int_a^b d(g_{il} u^i) \delta x^l \\
&= -m c \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k \delta x^l ds \\
&\quad + m c \int_a^b \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} u^i dx^k \delta x^l + m c \int_a^b g_{il} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \delta x^l ds \\
&= -m c \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k \delta x^l ds + m c \int_a^b \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} u^i u^k \delta x^l ds \\
&\quad + m c \int_a^b g_{il} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \delta x^l ds. \tag{48}
\end{aligned}$$

Сделаем последний шаг: воспользуемся симметрией при перестановке индексов i и k , прибавим в первом подынтегральном выражении вели-

чину, равную нулю, именно, $(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}) u^i u^k$. Имеем, в результате,

$$\delta S = m c \int_a^b g_{il} \left(\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{mn}^i u^m u^n \right) \delta x^l ds. \quad (49)$$

Нас не должна смущать смена индексов в пути, поскольку они немые, т.е., по ним идет свертка. Приравнивая, как и положено, вариацию действия нулю, приходим к уравнению

$$g_{il} \left(\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{mn}^i u^m u^n \right) = 0, \quad (50)$$

которое, после свертывания с тензором g^{lk} , обратным метрическому, превращает наш результат в знакомое уже уравнение геодезических ($g^{lk} g_{il} = \delta_i^l$)

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{mn}^k u^m u^n = 0. \quad (51)$$

Мы видим, что и в искривленном пространстве-времени нашелся функционал действия, экстремум которого осуществляется геодезическими линиями. И снова, тщательное исследование второй вариации показывает, что выбранный нами знак "минус" перед интегралом дает нам минимальное значение между достаточно близкими точками. Слово "достаточно" здесь необходимо, - вспомним школьный глобус (сферу), где геодезическими являются дуги большого круга. Но на окружности между двумя точками есть две дуги, меньшая и большая. Обе дуги являются решениями соответствующего уравнения геодезических, но одна осуществляет минимум, а вторая - максимум, вместе - экстремум действия. Отметим, что приведенный нами вывод уравнения геодезических из действия (46) справедлив только для метрической связности. Обобщение же, основанное на простой замене обыкновенного дифференциала ковариантным, уравнение (41), не зависит от этого выбора и постулируется для произвольной аффинной связности.

3.5 Тензор кривизны, тензор Риччи и скалярная кривизна.

В искривленном пространстве-времени перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по

разным путям. Это видно хотя бы из того, что если переносить параллельно самому себе вектор $u^i = \frac{ds^i}{ds}$, касательный к геодезической $x^i(s)$ (s - "длина" интервала вдоль геодезической, отсчитываемая от некоторой точки), то $Du^i = 0$, и вектор u^i , переносимый из точки x^i , совпадает с касательным вектором $u^i + du^i$ в точке $x^i + dx^i$. При использовании какого-либо другого пути между этими же точками $Du^i \neq 0$, поэтому результат будет отличаться от $(u^i + du^i)$. В частности, если переносить вектор параллельно самому себе по замкнутому контуру то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

Выведем общую формулу для такого изменения, выбрав некоторый бесконечно малый замкнутый контур. Это изменение ΔA_k можно записать в виде $\Delta A_k = \oint \delta A_k$. Так как $\delta A_k = \Gamma_{kl}^i A_i dx^l$, то

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l. \quad (52)$$

Значение вектора A_i в точках внутри контура определяются неоднозначно, все зависит от пути прихода в данную точку. Однако, эти изменения - второго порядка малости (как будет видно ниже из результата), поэтому с достаточной точностью будем считать компоненты вектора внутри бесконечно малого контура однозначно определяющимися их значениями на самом контуре по формуле $\delta A_i = \Gamma_{il}^n A_n dx^l$, т.е., по производным

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma_{il}^n A_n. \quad (53)$$

Применяя теперь к нашему контурному интегралу теорему Стокса и учитывая, что площадь огибаемой поверхности есть бесконечно малая величина $\Delta f^{lm} = -\Delta^{ml}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial x^l} \Delta f^{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial x^m} \right) \Delta f^{lm} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right) \Delta f^{lm} \\ &= \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta^{lm}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n \quad (55)$$

- тензор четвертого ранга (это именно тензор, так как ΔA_k - разность двух векторов A_k в одной точке, а Δf^{lm} - тензор второго ранга, определяющий элемент площади). Итак,

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta f^{lm}. \quad (56)$$

Для ковариантного вектора аналогичную формулу легко получить, рассматривая свертку $\Delta(A^k B_k) = 0$ (скаляр не меняется при обходе по замкнутому контуру!) и воспользовавшись правилом Лейбница, или же просто заметив, что $\delta A^k = -\Gamma_{il}^k A^i dx^l$ и проделав те же выкладки (можно мысленно), что и для ковариантного вектора. В результате получаем

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R_{ilm}^k A^i \Delta f^{lm}. \quad (57)$$

Тензор R_{klm}^i называется тензором кривизны или тензором Римана.

В плоском пространстве (или пространстве-времени) тензор кривизны равен нулю. Действительно, в этом случае можно выбрать координаты, в которых всюду, за исключением особых точек, все символы Кристоффеля равны нулю, $\Gamma_{ik}^l = 0$, а потому и $R_{klm}^i = 0$. Это соответствует тому, что в плоском пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую - операция однозначная, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется. Имеет место и обратная теорема: если $R_{klm}^i = 0$, то пространство плоское. Действительно, как мы видели, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, галилееву в данном бесконечно малом участке. При нулевом тензоре кривизны параллельный перенос векторов - операция однозначная, и мы можем таким способом перенести галилееву систему координат из одного участка в другой и построить ее во всем пространстве, что и требовалось доказать.

В искривленном пространстве значение второй ковариантной производной от вектора зависит от порядка дифференцирования. Оказывается, что разность (коммутатор) определяется тем же тензором кривизны:

$$\begin{aligned} A_{i;kl} - A_{i;lk} &= R_{ikl}^m A_m, \\ A^i_{;kl} - A^i_{;lk} &= -R_{mkl}^i A^m, \end{aligned} \quad (58)$$

что легко проверить "любовым" вычислением в локально-геодезической системе координат ($\Gamma_{kl}^i = 0$). Аналогично, нетрудно получить соответствующие формулы для тензоров, например

$$A_{ik;lm} - A_{ik;ml} = R_{klm}^n A_{in} + R_{ilm}^n A_{nk}. \quad (59)$$

Отметим очень важную деталь: тензор кривизны не зависит вовсе от метрики, а только от коэффициентов связности и их первых производных, поэтому данное выше определение "работает" в любом пространстве аффинной связности. Кроме того, хотя в искривленном пространстве (пространстве-времени) мы всегда можем локально привести метрику к диагональному "сигнатурному" виду $((+1, -1, -1, -1)$ или $(-1, +1, +1, +1)$ в случае четырехмерного пространства-времени) и "занулить" коэффициенты связности, мы никогда не можем сделать равными нулю все первые производные от связности, иначе кривизна будет равной нулю в любой системе координат, а пространство-время (или пространство) - плоским.

Тензор кривизны обладает определенными свойствами симметрии. Сначала рассмотрим те, которые не зависят от метрики и справедливы при любом выборе связности. Во-первых, очевидно, что тензор R^i_{klm} антисимметричен относительно перестановки двух последних индексов, l и m (при выводе формулы (54) мы свертывали тензор кривизны с антисимметричным тензором второго ранга Δf^{lm} , определяющим элемент площади, поэтому из этой формулы в тензоре Римана (55) однозначно определяется только антисимметричная часть). Во-вторых, справедливо очень важное и полезное (для нас тоже) тождество Бианки:

$$R^i_{ikl;m} + R^i_{imk;l} + R^i_{ilm;k} = 0. \quad (60)$$

Это дифференциальное тождество легко проверить в локально-геодезической системе координат, а поскольку оно имеет тензорный характер, то будет выполняться и в любой другой системе. Для доказательства нам необходимо сначала продифференцировать коэффициенты связности, а потом положить $\Gamma^i_{kl} = 0$. Так как тензор R^i_{klm} линеен по первым производным и квадратичен по самим коэффициентам связности, а в удлинении производных при ковариантном дифференцировании связность входит линейно, то отличными от нуля слагаемыми останутся лишь

$$R^i_{ikl;m} = \frac{\partial R^i_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}. \quad (61)$$

Делая затем циклическую перестановку по индексам (k, l, m) и складывая результаты, легко получим искомое тождество Бианки. Если наша связность - метрическая и определяется символами Кристоффеля (33), то появляются и другие симметрии. Для того, чтобы их выявить, перейдем от смешанных компонент в тензоре кривизны R^i_{klm} к ковариантным,

$R_{iklm} = g_{in} R_{klm}^n$. Тогда после простых преобразований легко получить, что

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{in}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p). \quad (62)$$

Теперь очевидно, что тензор R_{iklm} антисимметричен относительно перестановки индексов внутри первой пары (ik) и симметричен при перестановке пар (ik) \leftrightarrow (lm):

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \quad R_{iklm} = R_{lmik}; \quad (63)$$

в частности, все компоненты, диагональные внутри пар (ik) или (lm), равны нулю. Легко проверить, что равна нулю и циклическая сумма по любым трем индексам, например,

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \quad (64)$$

В силу этих свойств симметрии, не все компоненты тензора кривизны независимы. Подсчитаем количество независимых компонент в пространствах различного числа измерений: 2, 3 и 4. Очевидно, наш способ вывода формулы для тензора кривизны не годится для одномерных пространств (кривых линий), но мы можем экстраполировать общее определение и на этот случай. Для одномерных пространств все тривиально, кривизна тождественно равна нулю. Кажущаяся кривизна не прямых линий, начертанных на бумаге, на самом деле есть кривизна вложения одномерного пространства в многомерное (например, в плоскость листа бумаги).

В двумерном пространстве индексы пробегает только два значения (1,2) (или (0,1) в случае пространства-времени). Следовательно, существенной является только одна компонента, например, R_{1212} , а остальные, не равные нулю, получаются перестановками индексов с соответствующими изменениями знака.

В трехмерном пространстве индексы пробегает значения (1,2,3) (или (0,1,2)), а внутри каждой пары имеются только три существенно различные комбинации: 23, 31 и 12. Из-за симметрии относительно перестановок пар мы имеем лишь $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ независимые компоненты с различными парами, а также 3 компоненты с одинаковыми парами - всего шесть. Столько же компонент имеет и симметричный тензор второго ранга. Поэтому,

построив линейные соотношения $R_{ik} = g^{nl} R_{nilk} = R_{ink}^n$, мы можем все компоненты тензора кривизны R_{iklm} выразить через R_{ik} и метрический тензор g_{ln} . Вспомним, что симметричный тензор второго ранга всегда можно привести к главным осям надлежащим выбором системы координат (поворотом). Следовательно, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами. Мы не использовали в наших рассуждениях циклическую сумму, но в данном случае она ничего нового не дает.

Перейдем, наконец, к четырехмерному пространству. В каждой паре индексов теперь шесть независимых наборов: 01, 02, 03, 12, 13, 23. Поэтому имеется шесть компонент тензора Римана с одинаковыми и $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ различными парами индексов. Кроме того, три компоненты, у которых все четыре индекса различны, связаны одним циклическим тождеством $R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0$. Следовательно, четырехмерный тензор Римана имеет всего 20 независимых компонент.

Из тензора кривизны R_{iklm}^i можно построить ненулевые тензоры второго ранга путем свертки индексов (i, l) или (i, m) , отличающиеся только знаком; мы выберем первый вариант:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l. \quad (65)$$

Этот тензор называют тензором Риччи, и он, в силу построения, очевидно, симметричен. Поднимая один индекс и свертывая, получаем инвариант, называемый скалярной кривизной пространства (или пространства-времени):

$$R = g^{ik} R_{ik}. \quad (66)$$

Тензор Риччи удовлетворяет также дифференциальному тождеству, которое несложно получить сверткой тождества Бианки (60) по индексам n и m :

$$R_{i;n}^n = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^i}. \quad (67)$$

Это тождество нам очень пригодится.

Мы уже упоминали, что тензор Риччи можно получить свертыванием тензора Римана по одному из индексов второй пары - определения отличаются знаком. Другая знаковая неопределенность есть в самом определении тензора кривизны (мы выбрали знак "+" для переноса ковариантного вектора по замкнутому контуру и знак "-" для контравариантного,

но можно и наоборот). Существует и третья неопределенность - в сигнатуре. Мне привычно пользоваться сигнатурой (+ - -), но можно выбрать и (- + + +), с последней удобно иметь дело в квантовой теории гравитации. В литературе встречаются различные комбинации. Физические же результаты от такой чехарды знаков не зависят вовсе.

Теперь у нас в руках вся необходимая математика для написания (но не для вывода!) уравнений Эйнштейна - основы релятивистской теории гравитации. Наконец-то!

4 Уравнения Эйнштейна.

Итак, Эйнштейн нашел человека, который знал о существовании симметричного тензора второго ранга, линейного по вторым производным метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Мне кажется, что этим человеком был замечательный математик Давид Гильберт, но точно я этого не знаю, основываются лишь на том, что вскоре он внес значительный (если не решающий) вклад в развитие общей теории относительности. Но про это чуть позже. А нужным тензором оказался, как вы теперь понимаете, тензор Риччи.

Разумеется, минимальным требованием для появления вторых производных от метрики является предположение о метричности связности, т.е., коэффициенты связности $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ есть символы Кристоффеля. Такое, вполне серьезное, предположение отнюдь не смущало Эйнштейна. Он видел свою цель и наконец-то достиг ее. Его (по крайней мере, на первых порах) не интересовал вопрос о неоднозначности выбора вида уравнений - давайте исследуем простейший из них, сравним с астрономическими наблюдениями, а там посмотрим. Давным давно Архимед произнес неувядаемое слово "Эврика!". Эйнштейн действовал по тому же принципу и любил повторять, имея в виду какую-нибудь свою идею: это всего лишь моя эвристическая точка зрения. Вопрос о неоднозначности выбора уравнений совсем не праздный: имея два симметричных тензора второго ранга, тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ и метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, мы можем составить две комбинации со вторыми производными, $R_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta} R$, где $R = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}$ - скалярная кривизна, и любая линейная комбинация из них и метрического тензора будет удовлетворять всем нашим (и эйнштейновским!) требованиям. И это лишь в случае метрической связности! Если же отказаться от последнего условия, то возможности для комбинирования просто безграничны, и для окончательного выбора (иди существенного

его ограничения) необходимы и какой-то новый физический или/и математический принцип, и очень тщательные эксперименты и наблюдения. Ни того, ни другого в то время в распоряжении Эйнштейна не было.

И он начал с простейшего - с уравнений в пустоте, т.е., вне гравитирующих источников. В начале XX века понятие пустоты, или вакуума, было очень простым - ничего нет. Ясно, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ должен быть равен нулю, а необходимый предельный переход к плоскому пространству очень далеко от источников (идея бесконечности пространства еще довлела над учеными) требовал условия $R_{\alpha\beta}, R \rightarrow 0$ на больших расстояниях. Поэтому простейшим выбором, который и сделал Эйнштейн, был таков:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (68)$$

Иоганн Гете сказал устами Мефистофеля:

*Суха теория, мой друг,
А древо жизни пышно зеленеет.*

Тут я не согласен с ними обоими. Теория вовсе не суха, она возбуждает, волнует, но при этом несколько обуздывает фантазию. Без теории, которая только и создает цельную картину, все результаты экспериментов и наблюдений так и остались бы разрозненной и неинтересной мозаикой, а сами физики и астрономы не знали, что же нужно, измерять и зачем. Но и без "древа жизни" теория действительно была бы сухой и бессмысленной. Поэтому-то естественные науки, и физика в частности, "работают" по единой схеме: наблюдения - обобщения и выдвижение гипотез - предсказания - их проверка - создание теории - подтверждение или опровержение теории новыми наблюдениями и экспериментами далее следующий виток спирали. Какие же предсказания были предложены "научной общественности" новой теорией, основанной на уравнении (68)? Исторически, их было три. Мы не будем останавливаться на подробностях вычислений: это уведет далеко в сторону, а лишь кратко опишем результаты.

Во-первых, на смену утверждению "две массы притягиваются друг к другу с силой..." в нерелятивистской, ньютоновской, теории гравитации, приходит релятивистское обобщение "тяготееет любая энергия" ($E = mc^2$!). В том числе, лучи света должны искривляться в гравитационном поле тяготеющего центра. Масса (= энергия) такого центра должна быть достаточно большой (астрономической), чтобы искривление было замечено и измерено с достаточной точностью. Вычисления показывают, что

в поле Солнца искривление траектории луча света приводит к смещению изображений далеких звезд на угол, примерно равный двум угловым секундам, точнее, $\delta\phi = 1,75''$. Возможность для проверки этого предсказания появилась в 1920(?)г. во время полного солнечного затмения. В несколько наиболее перспективных районов Земного шара были снаряжены экспедиции астрономов. Лишь одной из них улыбнулась удача - небо не было затянуто тучами. Нужные измерения были произведены, и их результат с поразительной для того времени точностью совпал с предсказанием теории Эйнштейна. Это был, конечно же, триумф, и об общей теории относительности заговорили даже в газетах. Гораздо позже, уже в 70-х годах прошлого столетия, пришло понимание того, что гравитационной поле крупных объектов (таких, как галактики) может "работать" как обыкновенная оптическая линза. И мы, в результате, будем видеть и сам светящийся объект, и его изображение, создаваемое гравитационной линзой. Другими словами, на небе должны быть видны "близнецы". Такие объекты были действительно обнаружены, а их идентичность подтверждена скрупулезным спектральным анализом.

Во-Вторых, задолго до создания общей теории относительности было известно явление смещение перигелия планет Солнечной системы. Со школьной скамьи вам знакомы законы Кеплера, первый из которых гласит: "Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце". Именно законы Кеплера послужили Ньютону путеводной звездой в открытии закона всемирного тяготения, а не пресловутое яблоко. (Кстати, я был в Кембридже в Тринити колледж, где жил и работал Ньютон, и не увидел никаких яблонь - одни дубы.) Так вот, законы Кеплера, как и положено, в реальности справедливы лишь в определенном приближении, если не учитывать гравитационного влияния других планет, учет которого приводит к малым поправкам к "чистому" закону тяготения для двух точечных масс. Поправки эти вызывают смещение перигелия орбит планет, они накапливаются со временем и потому называются секулярными или, по-русски, вековыми. Меркурий находится ближе всего к Солнцу, поэтому имеет наименьший период обращения, и его секулярное смещение перигелия было довольно точно измерено. Но все возможные поправки даваемые ньютоновской теорией, оказались недостаточными для объяснения результатов многолетних наблюдений. Не хватало нескольких десятков угловых секунд, точнее, $43,0''$ в столетие. А теория Эйнштейна их с легкостью объяснила!

Третье знаменитое предсказание - замедление времени в гравитаци-

онном поле и, как следствие, изменение частоты электромагнитных колебаний, выражающееся наблюдаемым красным смещением спектральных линий атомов и ядер. Впервые оно было измерено для звезды типа белый карлик - спутника Сириуса (Сириус-B), а затем получило подтверждение в наблюдениях нейтронных звезд - пульсаров.

Здесь необходимо небольшое отступление. Теория Эйнштейна - не единственная релятивистская теория гравитации, созданная в XX веке. Среди других следует отметить наиболее радикальную - скалярно-тензорную теорию Бранса-Дикке. Но теория Эйнштейна - наиболее точно подтвержденная и дающая однозначные предсказания. Поэтому в дальнейшем мы принимаем ее за основу для описания современных космологических моделей.

Попробуем теперь "включить" источники гравитационного поля. Тут Эйнштейн мог опираться на опыт, приобретенный физиками-теоретиками при построении теории электромагнитного поля. Как широко известно из истории физики, Джеймс К. Максвелл обнаружил, после сведения воедино всех известных в XIX веке законов для электричества и магнетизма (з-н Кулона - уравнение Пуассона, з-н Ампера, з-р Фарадея), что закон сохранения заряда, т.е., уравнение непрерывности для источника = электрического тока - не выполняется. Тогда он "руками" ввел в свои, ставшими знаменитыми, уравнения так называемый ток смещения, в результате чего закон сохранения стал выполняться автоматически как дифференциальное следствие (условие интегрируемости) уравнений для электромагнитного поля. Закончилось все теоретическим предсказанием существования электромагнитных волн, выявлением электромагнитной природы света и т.д., и т.д. В релятивистской теории гравитации источником, как уже упоминалось, служит симметричный тензор второго ранга - тензор энергии-импульса, а вместо дивергенции вектора электрического тока - ее тензорный аналог, ковариантная дивергенция тензора $T_{\alpha\beta}$. Опыт Максвелла подсказывает, что уравнение

$$T_{\alpha;\gamma}^{\gamma} = 0 \quad (69)$$

должно быть дифференциальным следствием уравнений релятивистской гравитации. Простое уравнение (68) не подходит, поскольку, как мы уже знаем, следствием дифференциального тождества Бианки является соотношение $R_{\alpha;\gamma}^{\gamma} = \frac{1}{2} R_{,\alpha}$. Поэтому Эйнштейн выбрал следующее уравнение

релятивистской гравитации:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = A T_{\alpha\beta}, \quad A = \text{const} \quad (70)$$

В принципе, можно еще добавить член $(-\Lambda g_{\alpha\beta})$, $\Lambda = \text{const}$, знак “-” - историческая условность, но в этом случае "плохо" с граничными условиями на бесконечности (предельный переход к плоскому пространству). Чему равен коэффициент A в правой части? Ясно, что он должен быть пропорционален гравитационной (ньютоновской) постоянной G , но точное значение может быть определено только после изучения предельного перехода к нерелятивистской теории.

Вспомним, что в нерелятивистском пределе, в силу малости скоростей V по сравнению со скоростью света c ($\frac{V}{c} \rightarrow 0$), основная малая поправка к метрике плоского пространства "сидит" в g_{00} , $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$, $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$. Вспоминая определение тензора Риччи, $R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}$, и символов Кристоффеля, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (g_{\sigma\beta,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\beta} - g_{\alpha\beta,\sigma})$, и, предполагая статику или медленное адиабатическое изменение гравитационного потенциала со временем (в нерелятивистской теории скорость распространения сигнала бесконечна), понимаем, что малая величина $\frac{2\varphi}{c^2}$ входит линейно только в частную производную $\Gamma_{00,i}^i$, $i = 1, 2, 3$ (квадратичные члены в тензоре Риччи - второго порядка малости). Имеем,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ik} g_{00,k} = g^{ik} \frac{\varphi_{,k}}{c^2}. \quad (71)$$

Из всего тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ в пределе остается только T_{00} и след тензора $T = T_{\alpha}^{\alpha}$:

$$T_{00} = \rho c^2; \quad T = \rho c^2, \quad (72)$$

где ρ - плотность массы источника. Свертка уравнений Эйнштейна дает ($g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 4$)

$$-R = AT. \quad (73)$$

Подставляя этот результат обратно в уравнение (70), перепишем уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\alpha\beta} = A \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right), \quad (74)$$

откуда имеем для R_{00} :

$$R_{00} = A \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) \rho c^2 \right) = \frac{1}{2} A \rho c^2. \quad (75)$$

но, в нужном приближении,

$$R_{00} = \Gamma_{00,i}^i = (g^{ik} \varphi_{,i})_{,i} = \frac{1}{c^2} \Delta \varphi, \quad (76)$$

где Δ - уже знакомый нам оператор Лапласа (лапласиан). Следовательно,

$$\Delta \varphi = \frac{c^4}{2} A \rho, \quad (77)$$

и сравнение с уравнением Пуассона, $\Delta \varphi = 4 \pi G \rho$, показывает, что

$$A = \frac{8 \pi G}{c^4}. \quad (78)$$

Теперь уравнения Эйнштейна принимают свой окончательный вид:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8 \pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (79)$$

или, в смешанных индексах,

$$R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} R = \frac{8 \pi G}{c^4} T_{\beta}^{\alpha}, \quad (80)$$

где δ - единичный тензор или символ Кронекера, $\delta = diag(1, 1, 1, 1)$.

5 Принцип наименьшего действия.

5.1 Немного истории.

Понимание важности принципа наименьшего действия для теоретической физики пришло далеко не сразу. Начало этой истории восходит к временам спора Ньютона и Лагранжа о том, как "правильно" формулировать законы движения - исходя из понятия силы (по Ньютону) или нужно начинать с понятия "живой силы" которую Лагранж записывал в виде $m V^2$ для свободного движения. При наличии взаимодействия нужно добавить потенциальную энергию (если, разумеется, силы являются потенциальными), поэтому удобнее использовать выражение $L = T - U$, где $T = \frac{mV^2}{2}$ - кинетическая энергия, а U - потенциальная. Это то, что мы теперь называем функцией Лагранжа или Лагранжианом. И только после формулировки уравнений Гамильтона, а затем уравнения Гамильтона-Якоби, в

котором впервые появится интеграл действия, обнаружилось, что уравнения движения механики можно получить путем варьирования функционала действия по траекториям, если потребовать его экстремизации (а при надлежащем выборе знака действия минимизации), приравнявая первую вариацию нулю. Минимум -это все-таки "одна точка" в безграничном пространстве траекторий, и этому можно придать некую философскую глубину.

Оказалось, что в функционале действия легко с самого начала учесть требуемые симметрии пространства-времени и/или другие симметрии, например, градиентную инвариантность. На этом пути были получены выражения для действия (и выведены соответствующие уравнения) в релятивистской механике и классической электродинамике Максвелла, причем конкретная форма лагранжиана определялась еще и требованием "наибольшей простоты". При этом сразу же открывалась возможность различных обобщений путем "усложнения".

И только во второй половине XX века Ричард Фейнман показал, что природа принципа наименьшего действия для классической физики прячется глубоко в недрах квантового мира, за что, фактически, он и получил Нобелевскую премию.

5.2 Постановка вариационной задачи.

Рассмотрим принцип наименьшего действия на простейшем примере нерелятивистской механики Ньютона. Действие для частицы массы m имеет вид:

$$S = \int_a^b L dt = \int_a^b \left(\frac{m\vec{V}^2}{2} - U(\vec{x}(t)) \right) dt, \quad (81)$$

где $\vec{x}(t)$ - траектория частицы, служащая динамической переменной, \vec{V} - ее скорость, а интеграл берется в конечных пределах - закрепленных концах, на которых значения $\vec{x}(a)$ и $\vec{x}(b)$ остаются постоянными. Конкретный вид лагранжиана (его кинетической части) диктуется симметриями пространства Галилея - однородность (нет явной зависимости от координат) и изотропность (нет выделенного направления), а также однородностью времени (нет явной зависимости). Поэтому и лагранжиан, и действие - скаляры. Очевидно и выполнение требования "простоты". Отметим, что действие имеет размерность "энергия \times время". Вариация

δS равна:

$$\delta S = \int_a^b \delta L dt = \int_a^b \left(m \vec{V} \delta \vec{V} - \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \delta \vec{x} \right) dt. \quad (82)$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получаем

$$\delta S = m \vec{V} \delta \vec{x} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} (m \vec{V}) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \right) \delta \vec{x} dt. \quad (83)$$

Поскольку $\delta \vec{x}(a) = \delta \vec{x}(b) = 0$, то, приравнявая вариацию нулю, $\delta S = 0$, и учитывая произвольность траектории $\vec{x}(t)$, приходим ко второму закону Ньютона

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V}) = - \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{F}. \quad (84)$$

Заметим, что мы получили дополнительно (бесплатно) возможность описывать движение тел переменной массы (например, ракеты).

Те же принципы учета симметрий пространства-времени: однородность и изотропность плюс инвариантность относительно группы Лоренца и требование "простоты" приводят в специальной теории относительности к следующему действию для динамики частицы массы m (c — скорость света, $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$):

$$S = -m c \int ds = -m c^2 \int_a^b \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}} dt. \quad (85)$$

Выбор коэффициента ($m c$) диктуется размерностью действия и результатом предельного перехода к нерелятивистской механике, а знак “—” нужен для того, чтобы экстремум стал именно минимумом. Динамической переменной и здесь служит траектория $\vec{x}(t)$.

В классической электродинамике Максвелла, кроме перечисленных выше симметрий, требуется учет еще т.н. калибровочной, или калибровочной, инвариантности. Это означает, что, хотя электромагнитное поле описывается векторным потенциалом A_μ , физически измеримыми являются компоненты антисимметричного тензора $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. Это плюс требование простоты приводит к следующему действию для поля:

$$S = -\frac{1}{16 \pi} \int_{\Omega} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dt d\vec{x}. \quad (86)$$

Интеграл берется по конечному четырехмерному объему Ω . Квадратичное подынтегральное выражение имеет размерность плотности энергии, а выбор конкретного безразмерного коэффициента автоматически дает правильное значение для электромагнитного поля, следующее "напрямую" из уравнений Максвелла.

5.3 Действие Эйнштейна-Гильберта.

По общим канонам, действие в релятивистской теории гравитации должно состоять из двух слагаемых: действия для гравитационного поля и действия для материальных источников:

$$S = S_{grav} + S_m. \quad (87)$$

Гравитационная часть действия должна, как мы уже знаем, описывает геометрию пространства-времени, и потому не может содержать динамические переменные материальных полей. Действие S_m должно быть равно, как обычно,

$$S_m = \int L_m \sqrt{-g} dV dt = \frac{1}{c} \int_{\Omega} L_m \sqrt{-g} d\Omega, \quad (88)$$

где $d\Omega = dx^0 d\vec{x}$, $x^0 = c dt$, корень квадратный из детерминанта метрики равен якобиану преобразования от одних координат к другим и доставляет нам инвариантную меру объема, а лагранжева плотность L_m имеет размерность плотности энергии (так что с общей размерностью для действия все в порядке). Поскольку мы уже знаем общую структуру уравнений Эйнштейна, ясно, что варьирование S_m должно давать тензор энергии-импульса материи. Опыт изучения электродинамики и теорема Нетер говорят нам, что варьировать нужно по полям материи. Но здесь нас ждет разочарование. Действие S_{grav} не содержит материальных полей, потому из условия $\delta S = 0$ должно следовать равенство нулю тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Но это, очевидно, неправильно. Поэтому должен существовать способ получения тензора энергии-импульса варьированием по геометрическим динамическим переменным. Мы опишем этот способ в следующей главе. А пока перейдем к рассмотрению гравитационного действия S_{grav} .

Получение уравнений Эйнштейна из принципа наименьшего действия связано с именем выдающегося математика Д.Гильберта (видимо, именно он предложил автору ОТО искомый тензор). Следуя Эйнштейну,

он предположил, что динамическими переменными гравитационного поля следует считать компоненты метрического поля, а связность должна быть метрической (опять "принцип простоты" или, иначе, "принцип наименьшего действия в умах ученых"!)). Мы видели, на примерах других теорий, что плотность функции Лагранжа L содержит динамические переменные и их первые производные, что приводит к дифференциальным уравнениям движения второго порядка. По аналогии, L_{grav} должна зависеть от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и символов Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Кроме того, лагранжиан должен быть скаляром, чтобы обеспечить инвариантность теории относительно произвольных преобразований координат (нужное число раз дифференцируемых, т.е., диффеоморфизмов). Но из $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ нельзя составить ни тензора, ни скаляра. Кроме того, как мы видели, коэффициенты связности могут быть сделаны равными нулю в данной точке подходящим выбором координат и потому не дают никакого представления о кривизне пространства-времени, которая одна и свидетельствует о наличии или отсутствии гравитационного поля. Единственным подходящим скаляром является скалярная кривизна R . И Гильберт выбирает действие в виде

$$S_{grav} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega \quad (89)$$

(принцип простоты и необходимость получения именно уравнений Эйнштейна), несмотря на то, что в скалярную кривизну R входят вторые производные от метрики (первые производные от метрической связности), правда, линейно. Так как $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $d\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$, то

$$\begin{aligned} \delta S_{grav} = & -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega \\ & - \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned} \quad (90)$$

Мы видим, что первое подынтегральное выражение - уже все, что нам нужно, чтобы получить левую часть уравнений Эйнштейна, И заслуга Гильберта в том, что он смог показать (путем довольно сложных расчетов), что после интегрирования по частям (чтобы "убрать" вторые производные) второго интеграла оставшееся подынтегральное выражение можно представить в виде полной дивергенции от некоторого вектора.

Вид этого вектора, в зависимости от выбранного способа вывода уравнений, получается разным, но мы не будем здесь вдаваться в подробности, отметим лишь очень важную особенность, общую для всех авторов учебников и монографий. Уже упомянутое интегрирование по частям приводит к тому, что на границе области Ω мы должны "держать" не только значения метрического тензора, но и его первых производных - иначе не получим уравнения Эйнштейна, по сути, они становятся уже не локальными, а глобальными. Чтобы ликвидировать такую некорректность принципа наименьшего действия с закрепленными концами, придумали (относительно недавно) добавить к действию Гильберта особый поверхностный член, вариация которого компенсирует указанный недостаток. Выписывать мы его не будем, поскольку это требует еще ложного экскурса в дифференциальную геометрию (нам все равно придется это сделать, но гораздо позже и по другому поводу, там и поговорим). А сейчас перейдем к рассмотрению другого метода, свободного от указанной трудности.

5.4 Метод Палатини.

Несмотря на то, что в физику этот метод вошел под именем Палатини, его гораздо раньше применял Эйнштейн. Мы не будем исправлять эту историческую ошибку. Метод состоит не в изменении вида действия, а в изменении набора динамических переменных. Именно, варьирование производится отдельно по метрике $g_{\mu\nu}$ и не зависящей от нее связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Вспомним, что тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ зависит только от коэффициентов связности и их первых производных:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma. \quad (91)$$

Имеем, как и прежде,

$$\begin{aligned} \delta S_{grav} = & - \frac{c^3}{16 \pi G} \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega \\ & - \frac{c^3}{16 \pi G} \int_{\Omega} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega, \end{aligned} \quad (92)$$

но теперь мы должны приравнять нулю отдельно вариации по $\delta g^{\mu\nu}$ и $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Вариация по метрике (с учетом варьирования S_m) дает сразу же

уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (93)$$

Рассмотрим подробнее вариацию по связности. Будем считать, что лагранжева плотность материи L_m , помимо материи, зависит только от метрики, но не от связности (как оно и есть на самом деле для всех известных полей). Тогда

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda} = 0. \quad (94)$$

После долгих и утомительных подробных вычислений, включающих и интегрирование по частям, получаем следующее уравнение:

$$\Gamma_{\lambda|\mu\nu} + \Gamma_{\nu|\lambda\mu} = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}, \quad (95)$$

где $\Gamma_{\lambda|\mu\nu} = g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$. Циклическая перестановка индексов в уравнении (95), а затем сложение и вычитание уравнений дают искомый результат:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (96)$$

Связность автоматически, на уравнениях движения, оказывается метрической! И никаких проблем со вторыми производными, их в действии просто нет.

Такое замечательное совпадение результатов двух различных методов варьирования имеет место только для гравитационного действия, линейного по скалярной кривизне R . Рассмотрение нелинейных лагранжианов приводит к существенно различным уравнениям. Так, действие Эйнштейна-Гильберта дает уравнения четвертого порядка по производным метрики и, по определению, метрическую связность. При использовании метода Палатини получаются уравнения второго порядка по производным метрики и неметрическая связность (т.н. связность Вейля). Эти вопросы будут рассмотрены в самом конце наших лекций.

6 Тензор энергии-импульса.

Как уже говорилось, обычный способ получения тензора энергии-импульса полей материи для правой части уравнений Эйнштейна, основанный на теореме Нетер, нам уже не подходит. Теперь варьирование

по полям материи и приравнивание нулю вариации полного действия приводит к равенству нулю и искомого тензора, поскольку гравитационная часть действия зависит только от метрики пространства-времени. Следовательно, и действие для материи нужно варьировать по метрике. Ниже мы покажем, что в результате получается действительно тензор энергии-импульса материи.

Выпишем еще раз функционал действия для для материальных полей:

$$S_m = \frac{1}{c} \int_{\Omega} L \sqrt{-g} d\Omega. \quad (97)$$

Здесь лагранжева плотность L зависит от некоторых динамических переменных полей материи (обобщенно) q и их первых производных и от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ его первых производных, а интегрирование производится по четырехмерному объему Ω с границей $\partial\Omega$. Произведем в этом интеграле преобразование координат x^μ к координатам $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, где ξ^μ - малые величины. При этом компоненты тензора $g'^{\mu\nu}$, обратного метрическому, преобразуются согласно формулам

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= g^{\lambda\sigma}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g^{\lambda\sigma} \left(\delta_\lambda^\mu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \left(\delta_\sigma^\nu + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \right) \\ &\approx g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} + g^{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda}, \end{aligned} \quad (98)$$

с точностью до первого порядка малости. Тензор $g'^{\mu\nu}$ в левой части является функцией новых координат x^{prime} , а тензор $g^{\mu\nu}$ - функцией прежних координат x . Естественно, нам нужно, чтобы все величины были функциями одних и тех же переменных. Для этого разложим $g'^{\mu\nu}(x')$ по степеням ξ (опять же до первого порядка):

$$g'^{\mu\nu}(x^\lambda + \xi^\lambda) = g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \xi^\lambda + \dots \approx \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \xi^\lambda + g^{\mu\nu}(x). \quad (99)$$

Таким образом,

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) - \xi^\lambda \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}. \quad (100)$$

Ясно, что разность тензоров $g'^{\mu\nu}(x)$ и $g^{\mu\nu}(x)$ в одной и той же точке есть тензор, поэтому последние три члена в (100) могут быть также записаны в явно тензорной форме. Действительно, прямая проверка показывает, что

они равны сумме $\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}$, где $\xi^{\mu;\nu} = g^{\nu\lambda}\xi^{\mu}_{;\lambda}$. Таким образом, находим окончательно, что

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \quad \delta g^{\mu\nu} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}. \quad (101)$$

Для ковариантных компонент имеем

$$g'_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g_{\mu\nu} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} \quad (102)$$

(так, чтобы с точностью до первого порядка по ξ соблюдалось условие $g_{\mu\lambda}g'^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$). Отметим, что уравнения

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (103)$$

определяют те инфинитезимальные преобразования координат, которые не меняют данную метрику. Они называются уравнениями Киллинга, а ξ^{μ} - векторами Киллинга.

Далее, поскольку действие S_m есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, вариацию δS_m можно написать в ином виде. При изменении координат $\delta x^{\mu} = \xi^{\mu}$ динамические переменные материи q меняются на δq . При вычислении δS_m можно, однако, не писать членов, связанных с изменением динамических переменных материи, они все равно взаимно сокращаются в силу "уравнений движения" физической системы, поскольку эти последние как раз и получаются приравниванием нулю вариации δS_m по δq . Поэтому достаточно выписать только члены, связанные с изменениями $\delta g_{\mu\nu}$ (или $\delta g^{\mu\nu}$). Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая $\delta g^{\mu\nu} = 0$ на границах области интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} L)}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}} \delta \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \right\} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial(\sqrt{-g} L)}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}} \right\} \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \end{aligned} \quad (104)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}}. \quad (105)$$

Тогда

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (106)$$

Важно отметить, что равенство нулю вариации δS_m при изменении координат δx^μ не означает равенства нулю $T_{\mu\nu}$, поскольку десять величин $\delta g^{\mu\nu}$ не независимы, так как являются результатом преобразования координат x^μ , которых имеется всего четыре.

Из изучения механики и теории поля в плоском пространстве и из теоремы Нетер мы знаем, что инвариантность действия относительно преобразования координат приводит к закону сохранения энергии-импульса "на уравнениях движения что в дифференциальной форме превращается в уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса: $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ в ковариантном виде. Мы использовали уже уравнения движения полей материи $\frac{\partial S_m}{\partial q} = 0$, но формально в уравнении (106) действие S_m варьируется по метрике $g^{\mu\nu}$. Поэтому нужно проверить, выполняется ли уравнение непрерывности для $T_{\mu\nu}$, определенного уравнением (105). Для этого подставим в (106) выражение для $\delta g^{\mu\nu}$ из уравнения (101):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \xi^{\mu;\nu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (107)$$

Преобразуем, далее, это выражение следующим образом (метрическая связность, $\sqrt{-g} = 0!$):

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int_{\Omega} (T^{\nu}_{\mu} \xi^{\mu})_{;\nu} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} T^{\nu}_{\mu;\nu} \xi^{\mu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (108)$$

Поскольку, как мы видели ранее, для любого вектора и метрической связности $A^{\nu}_{;\nu} = \frac{(A^{\nu} \sqrt{-g})_{;\nu}}{\sqrt{-g}}$, то первый интеграл с помощью теоремы Гаусса может быть преобразован в интеграл по поверхности и исчезает вследствие того, что на границе, по определению, $\xi^{\mu} = 0$. Поэтому ($\frac{\delta S_m}{\delta x^{\mu}} = 0!$),

$$\delta S_m = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} T^{\nu}_{\mu;\nu} \xi^{\mu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (109)$$

Ввиду произвольности ξ^{μ} отсюда следует

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0, \quad (110)$$

что и следовало доказать. Конкретный коэффициент в определении (105) выбран так, чтобы тензор энергии-импульса, например, электромагнитного поля совпадал с известным выражением, получаемым привычным способом. Описанный выше метод (варьирование по метрике) приводит сразу же к симметричному выражению, что очень ценно. Теперь очевидно, что принцип наименьшего действия Эйнштейна-Гильберта (или Палатини) дает нам уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (111)$$

В заключение приведем тензор энергии-импульса идеальной жидкости, который нам очень и очень понадобится в дальнейшем. В сопутствующей системе отсчета идеальная жидкость характеризуется плотностью энергии ε и давлением p , причем все потоки равны нулю, и имеет место закон Паскаля, согласно которому давление, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которое оно действует. Таким образом, $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\varepsilon, -p, -p, -p)$. В произвольной системе отсчета, в которой данный элемент объема имеет четырех-скорость u^{μ} , этот тензор (в контравариантных компонентах) записывается в виде:

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon u^{\mu} u^{\nu} + p P^{\mu\nu}, \quad (112)$$

где $P^{\mu\nu} = u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu}$ - проекционный оператор, т.е., $P^{\mu\nu} u_{\nu} = 0$ ($T^{\mu\nu} u_{\nu} = \varepsilon u^{\mu}$), следовательно,

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu}. \quad (113)$$

Теперь у нас все готово для рассмотрения собственно космологических вопросов.

7 Космологическая метрика.

Невзирая на название главы, сделаем небольшое отступление, касающееся системы единиц. Чтобы проще было следить за размерностью сложных выражений при вычислениях, будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка \hbar равны единице, $c = \hbar = 1$. Единственной размерной величиной остается гравитационная постоянная G , а размерности массы $[m]$, длины $[l]$ и времени $[t]$ есть

$[m] = \frac{1}{\sqrt{G}}$, $[l] = [t] = \sqrt{G}$. Привычные размерности и численные коэффициенты легко восстанавливаются по так называемым планковским величинам $m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{-5} \text{г}$, $l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 10^{-33} \text{см}$, $t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 10^{-43} \text{с}$.

Рассмотрим некоторые общие свойства сферически симметричной метрики, которую всегда можно записать (локально) в виде

$$ds^2 = A dt^2 + 2 H dt dq - B dq^2 - R^2 d\sigma^2. \quad (114)$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ - линейный элемент двумерной сферы (θ и φ угловые переменные, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$), а метрические коэффициенты A, H, B и R являются (положительными) функции времени t и некоторой радиальной координаты q . Радиус $R(t, q)$ определен так, чтобы площадь сферы, как и в плоском пространстве, была равна $4\pi R^2$. Воспользовавшись свободой выбора координатной сетки (при сохранении явной сферической симметрии) и перейдя к новой временной координате $\tilde{t} = \tilde{t}(t, q)$, мы всегда можем сделать метрику диагональной, $H = 0$, и при этом у нас остается еще одна степень свободы. Ее мы можем использовать сделав, $A = B$, т.е., чтобы

$$ds^2 = \tilde{A} (d\tilde{t}^2 - d\tilde{q}^2) - R^2(\tilde{t}, \tilde{q}) d\sigma^2 \quad (115)$$

или же, введя запаздывающие и опережающие световые координаты $u = \tilde{t} - \tilde{q}$ и $v = \tilde{t} + \tilde{q}$, привести метрику к виду

$$ds^2 = \tilde{A} du dv - R^2(u, v) d\sigma^2. \quad (116)$$

В любом случае, сферически симметричная метрика, по сути, определяется двумя функциями двух переменных. В качестве одной из них естественно выбрать радиус сферы $R(t, q)$, являющийся инвариантом относительно преобразований t и q . Хочется, чтобы и вторая функция была также инвариантной. С геометрической точки зрения удобно иметь дело с квадратом нормали к поверхности $R = \text{const}$. Обозначим его буквой Δ . Итак,

$$\begin{aligned} R &= \text{const} : \\ dR &= \dot{R} dt + R' dq = 0, \\ \Delta &= \frac{1}{AB + H^2} (B \dot{R}^2 + 2 H \dot{R} R' - A R'^2), \end{aligned} \quad (117)$$

т.е., $\Delta = \frac{1}{A} \dot{R}^2 - \frac{1}{B} R'^2$ для диагональной метрики, и $\Delta = \frac{2}{H} R_{,u} R_{,v}$ для дважды световой метрики. Величина Δ (точнее, ее знак) несет большую геометрическую информацию. В плоском пространстве-времени все тривиально: $\Delta = -1$, поверхности $R = const$ являются времени-подобными (а нормали к ним - пространственно-подобными), и мы можем всюду выбрать радиус в качестве радиальной координаты $R = q$. В общем же случае это не так, и Δ может иметь любой знак.

Если $\Delta < 0$, то, как и в плоском пространстве, можно выбрать $q = R$, такие области называются R -областями. Если же $\Delta > 0$, то поверхности $R = const$ пространственно-подобны, а радиус может быть выбран в качестве временной координаты $t = R$, такие области естественно назвать T -областями. Эти понятия впервые были введены И.Д.Новиковым. Вообще говоря, R - и T -области разделяются поверхностями $\Delta = 0$, которые называются горизонтами видимости. Поверхности $\Delta = 0$ могут быть как световыми, так и времени- или пространственно-подобными. Более того, как легко видеть, в R -областях ($\Delta < 0$) не может быть точки с $R' = 0$. Следовательно, или $R' > 0$, радиусы увеличиваются с ростом радиальной координаты q (которая, по умолчанию, растет от $-\infty$ до $+\infty$, на графиках слева направо) - это R_+ -области, или $R' < 0$ - радиусы уменьшаются с ростом q - это R_- -области. Аналогично, в T -областях ($\Delta > 0$) невозможно $\dot{R} = 0$, и мы имеем или область необратимого расширения, $\dot{R} > 0$ - это T_+ -области, или $\dot{R} < 0$ - область необратимого сжатия, T_- -область. Таким образом, сферически симметричное пространство-время общего вида состоит из набора R_{\pm} - и T_{\pm} -, разделенных горизонтами $\Delta = 0$.

Обратимся теперь к космологии. Начнем с пространства: оно должно быть однородным и изотропным. Это может быть или трехмерная сфера, или трехмерный гиперboloид, или плоское пространство. Метрика единичной трехмерной сферы может быть представлена в виде (χ, θ, φ - угловые координаты):

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (118)$$

преобразование $r = \sin \chi$ переводит ее в

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\sigma^2. \quad (119)$$

Гиперboloид получается, если в (118) сделать замену $\sin \chi \rightarrow \sinh \chi$, а

вместо (119) имеем теперь

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\sigma^2. \quad (120)$$

В плоском же пространстве мы имеем просто

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\sigma^2. \quad (121)$$

Все три однородные и изотропные метрики могут быть записаны единообразно:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-k r^2} + r^2 d\sigma^2, \quad k = \pm 1, 0, \quad (122)$$

это называется метрикой Робертсона-Уокера. Требование однородности времени диктует общий вид четырехмерной космологической метрики:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) dl^2 \\ &= dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \end{aligned} \quad (123)$$

Координата t в этом случае называется космологическим временем. Очень часто бывает удобно пользоваться так называемым конформным временем η , определяемым соотношением $dt = a(t) d\eta$, тогда

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dl^2). \quad (124)$$

Немного о пространственной геометрии. В закрытой модели ($k = +1$) радиус окружности равен $R = a(t) \sin \chi$, поэтому расстояние от центра $l = a \chi > R$, т.е., отношение длины окружности к расстоянию от центра $\frac{2\pi R}{l} < 2\pi$. Сопутствующая координата меняется в пределах $0 \leq \chi < \pi$, поэтому объем замкнутой вселенной, разумеется, конечен и равен

$$\begin{aligned} V &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi \\ &= 4\pi a^3 \int_0^\pi \sin^2 \chi d\chi = 2\pi^2 a^3. \end{aligned} \quad (125)$$

В открытой модели ($k = -1$) все наоборот; радиус равен $R = a(t) \sinh \chi > a \chi = l$, а $\frac{2\pi R}{l} > 2\pi$. В пространственно плоской модели, естественно, $R = a \chi l$.

Космологическая метрика имеет очень простую структуру: вся зависимость от (конформного) времени заключена в конформном множителе $a(\eta)$ (в космологии он называется масштабным фактором, почему - вскоре увидим). Уравнения Эйнштейна в этом случае написать несложно, вычисляя "в лоб" символы Кристоффеля и тензор Риччи. Но "мы пойдём другим путем имея в виду, что в дальнейшем нам понадобятся нижеследующие формулы. Прежде всего, "избавимся" от конформного множителя и для этого рассмотрим конформное преобразование общего вида:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\omega} \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \\ g^{\mu\nu} &= e^{-2\omega} \tilde{g}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (126)$$

Легко вывести соответствующий закон преобразования метрической связности для d -мерного многообразия:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \omega_\nu \delta_\mu^\lambda + \omega_\mu \delta_\nu^\lambda - \omega^\lambda \tilde{g}_{\mu\nu}; \\ \omega_\mu &= \omega_{,mi}; \quad \omega^\lambda = \tilde{g}^{\lambda\sigma} \omega_\sigma; \\ \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma &= \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^\sigma + d\omega_\mu. \end{aligned} \quad (127)$$

Для вычисления тензора Риччи требуется гораздо больше усердия, и в результате этих усилий получаем:

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - (d-2) \omega_{|\mu\nu} - \omega_{|\sigma}^\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} + (d-2) \omega_\mu \omega_\nu - (d-2) \omega_\sigma \omega^\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (128)$$

Здесь вертикальная черта означает ковариантную производную по преобразованной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ &= \tilde{G}_{\mu\nu} - (d-2) \omega_{|\mu\nu} + (d-2) \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad + (d-2) \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\omega_{|\sigma}^\sigma + \frac{d-3}{2} \omega_\sigma \omega^\sigma \right). \end{aligned} \quad (129)$$

Отметим, что при $d = 2$ тензор Эйнштейна конформно инвариантен и, поскольку метрика двумерного многообразия конформна плоской метрике (на три метрических коэффициента можно наложить два координатных условия), то $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} = 0$. То есть, уравнения Эйнштейна в

двумерном пространстве требуют, чтобы ${}^{(2)}T_{\mu\nu} = 0$, кроме особых точек (конусных сингулярностей). При $d = 1$, как легко видеть, $R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} = 0$, как и должно быть (тензор кривизны в этом случае тождественно равен нулю). Кроме конформного преобразования, нам понадобится так называемое $(n + 1)$ -разложение ($d = n + 1$). Мы уже знаем, что преобразованиями координат метрику многообразия $g_{\mu\nu}$ всегда можно привести к виду

$$ds^2 = \varepsilon dn^2 + \gamma_{ik}(n, x^l) dx^i dx^k, \quad (130)$$

где $\varepsilon = +1$, если n - временная, и $\varepsilon = -1$, если n - пространственная координата, координаты (n, x^i) получили название гауссовой нормальной системы координат. Такое $(n + 1)$ -разложение метрики приводит к соответствующему расщеплению в символах Кристоффеля и в тензоре Риччи. Для коэффициентов связности получаем следующие не равные нулю компоненты:

$$\Gamma_{ik}^n = -\frac{\varepsilon}{2} \gamma_{ik,n}; \quad \Gamma_{nl}^i = \frac{1}{2} \gamma^{ik} \gamma_{kl,n}; \quad \Gamma_{lm}^i = \bar{\Gamma}_{lm}^i. \quad (131)$$

Важно отметить, что на гиперповерхности $n = const$ компоненты связности, в которые входит индекс n , являются тензорами относительно преобразований $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$. Введем определение:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \gamma_{ij,n}. \quad (132)$$

Тензор K_{ij} называется тензором внешней кривизны, он определяет, каким образом гиперповерхность вложена в объемлющее $(n + 1)$ -мерное многообразие. В качестве наглядного примера приведем боковые поверхности цилиндра и конуса (без вершины), которые являются плоскими 2-мерными поверхностями, но по-разному вложены в 3-мерное пространство: 2-мерный тензор кривизны равен нулю, а вот внешняя кривизна у них разная и, естественно, ненулевая. В терминах внешней кривизны $\Gamma_{ik}^n = \varepsilon K_{ik}$, $\Gamma_{nl}^i = -K_k^i$ (индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора γ_{ik} (γ^{ik})). Теперь несложно выписать $(n + 1)$ -расщепление тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_{nn} &= K_{|n} + K_i^j K_j^i; \\ R_{ni} &= -K_{i|j}^j + K_{|i}; \\ R_{ik} &= \bar{R}_{ik} + \varepsilon K_{ik,n} - \varepsilon K_{ik} K + \varepsilon K_{il} K_k^l. \end{aligned} \quad (133)$$

Вертикальная черта обозначает ковариантную производную по метрике γ_{ik} , а $K = K_l^l$ - след тензора внешней кривизны. Для тензора Эйнштейна получаем:

$$\begin{aligned} G_n^m &= \frac{\varepsilon}{2} K^2; \\ G_i^n &= -\varepsilon (K_{i|l}^l - K_{|i}); \\ G_i^k &= \tilde{G}_i^k + \varepsilon \left(K_{i,n}^k + K_i^l K_l^k - K K_i^k - \delta_l^k \left(K_{,n} + K_l^j K_j^l - \frac{1}{2} K^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Применим теперь полученные формулы к нашей космологической метрике:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) (d\eta^2 - dl^2); \quad \omega = \ln a(\eta); \\ d\tilde{s}^2 &= d\eta^2 - dl^2; \quad dl^2 = \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (135)$$

В результате конформного преобразования получаем ($d = 4$):

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= \dot{\omega} \delta_\mu^0, \quad \omega_{|\mu\nu} = \ddot{\omega} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0; \\ G_{00} &= \tilde{G}_{00} + 3\dot{\omega}^2, \\ G_{0i} &= \tilde{G}_{0i}, \\ G_{ik} &= \tilde{G}_{ik} + 2\gamma_{ik} \left(\ddot{\omega} + \frac{1}{2} \dot{\omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (136)$$

Расщепление $(3 + 1)$ при $\varepsilon = +1$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \eta} \equiv 0; \\ \tilde{G}_{00} &= -\frac{\varepsilon}{2} {}^{(3)}\bar{R}; \quad \tilde{G}_{0i} = 0; \\ \tilde{G}_{ik} &= \bar{G}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (137)$$

Вычисление тензора Риччи и тензора Эйнштейна уже достаточно просто, и, как и следовало ожидать, для однородного и изотропного трехмерного пространства,

$${}^{(3)}\bar{R} = -6k, \quad \bar{G}_1^1 = \bar{G}_2^2 = \bar{G}_3^3. \quad (138)$$

и

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{3}{a^2} \left(\frac{a_\eta^2}{a^2} + k \right), \\ G_1^1 &= G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a_{\eta\eta}}{a} - \frac{a_\eta^2}{a^2} + k \right). \end{aligned} \quad (139)$$

Окончательно, космологические уравнения Эйнштейна имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{a_\eta^2}{a^2} + k &= \frac{8\pi G}{3} \varepsilon, \\ \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a_{\eta\eta}}{a} - \frac{a_\eta^2}{a^2} + k \right) &= -8\pi G p. \end{aligned} \quad (140)$$

Причинная структура космологической модели определяется, как мы знаем, чередованием знаков инварианта $\Delta = g^{ik} R_{,i} R_{,k}$. У нас $R = a(\eta) r$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 \left(\frac{a_\eta^2}{a^2} + k \right) - 1 \\ &= \frac{8\pi G}{3} \varepsilon a^2 r^2 - 1 = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon R^2 - 1. \end{aligned} \quad (141)$$

В конце главы покажем, как можно наглядно представить геометрию сферически симметричного пространства как геометрию на поверхности вращения, вложенной в плоское трехмерное пространство. Положив в уравнении (114) $t = const$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ (экваториальная плоскость), имеем ($q = R = r$)

$$dl^2 = B dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (142)$$

Пусть $z(r)$ - поверхность вращения в плоском пространстве ((z, r, φ) - полярные координаты):

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (z = z(r)) = (z'^2 + 1) dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (143)$$

отсюда получаем сразу же:

$$\begin{aligned} z' &= \pm \sqrt{B(r) - 1}, \\ z(r) &= \pm \int \sqrt{B(r) - 1} dr. \end{aligned} \quad (144)$$

Уже скоро мы убедимся в полезности этого наглядного представления.

8 Мир Эйнштейна.

Эта коротенькая глава посвящена первой релятивистской космологической модели, предложенной Эйнштейном. Он предположил, естественно, что пространство-время однородно и изотропно, а уравнение состояния вещества - пыль, то есть, давление равно нулю (он действительно ничтожно мало в современную эпоху). Поэтому от тензора энергии-импульса остается ненулевой только компонента $T_0^0 = \varepsilon = \rho c^2$ ($= \rho$ в наших единицах), где ε - плотность энергии (ρ - плотность массы). Подставляя это в космологические уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \left(\frac{a_{eta}^2}{a^2} + k \right) &= \frac{8\pi G}{3} \varepsilon \\ \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a_{\eta\eta}}{a} - \frac{a_{\eta}^2}{a^2} + k \right) &= 0. \end{aligned} \quad (145)$$

Система дифференциальных уравнений (145) полностью определена - два уравнения для двух неизвестных функций одного переменного. Более того, можно использовать уравнение непрерывности первого порядка по производной и таким способом свести все к квадратурам. Казалось бы, все очень просто - интегрируй! Но Эйнштейн был первым, кто поставил космологическую проблему в релятивистской гравитации. Метрика Робертсона-Уокера еще не была известна. И, вместо "аксиоматического" и явного требования однородности и изотропии Эйнштейн потребовал сферическую симметрию. Над ним еще довлела ньютоновская картина мира, и, вдобавок, он наложил условие стационарности вселенной. Но все это вместе привело к противоречию. Действительно, полагая в (145) $a_{\eta} = a_{\eta\eta} = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{k}{a_0^2} &= \frac{8\pi G}{3} \varepsilon = const \\ \frac{k}{a_0^2} &= 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Поскольку условие стационарности Эйнштейн считал незыблемым, он сделал единственно возможное в такой ситуации - изменил свои гравитационные уравнения. Мы уже упоминали о том, что к уравнениям Эйнштейна можно добавит слагаемое, пропорциональное метрическому тензору, без вреда для уравнения непрерывности. Эйнштейн и добавил к

левой части член $(-\Lambda g_{\mu\nu})$, который в дальнейшем получил название Λ -члена, или космологического члена. В принципе наименьшего действия это соответствует замене $R \rightarrow R - 2\Lambda$. Итак, перенося Λ -член в правую часть, мы имеем, вместо (146),

$$\begin{aligned}\frac{k}{a_0^2} &= \frac{8\pi G}{3}\varepsilon + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{k}{a_0^2} &= \Lambda,\end{aligned}\tag{147}$$

откуда

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{3}\varepsilon.\tag{148}$$

Поскольку для "обычной" материи $\varepsilon > 0$, то, разумеется, $\Lambda > 0$ и $k = +1$. Следовательно, мир Эйнштейна - это стационарная трехмерная сфера радиуса $a_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\varepsilon}}$. Поскольку, по Эйнштейну, наша Вселенная конечна, обычные возражения (граничные условия на бесконечности) против введения Λ -члена теряют свою силу, все дело только в том, насколько он мал, чтобы в пределах Солнечной системы были справедливы стандартные гравитационные уравнения. Теперь-то мы знаем, что соотношение (148) в реальной Вселенной в современную эпоху не выполняется, не говоря уже о требовании стационарности, но в те времена это не было известно.

Посмотрим теперь, как выглядит в нашем случае геометрия на поверхности вращения, вложенной в трехмерное плоское пространство. Имеем (см. ур. (143) и (144), $R = a_0 r$):

$$\begin{aligned}dl^2 &= (z'^2 + 1) dr^2 + R^2 d\varphi^2 = a_0^2 \frac{dr^2}{1-r^2} + a_0^2 r^2 d\varphi^2; \\ z &= \pm \int \frac{\sqrt{\Lambda} R dR}{\sqrt{1 - \Lambda R^2}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sqrt{1 - \Lambda R^2}, \\ z^2 + R^2 &= \frac{1}{\Lambda} = a_0^2.\end{aligned}\tag{149}$$

Поверхность вращения, как и следовало ожидать, оказалась двумерной сферой.

Долгое время Λ -член считался чем-то лишним в общей теории относительности и космологии - так, досужая выдумка гениального физика. Ни наблюдения, ни общий ход развития теоретической космологии никак не подтверждали его наличия в природе. И только в 70-е годы прошлого столетия с развитием калибровочных теорий поля со спонтанным нарушением симметрии и особенно после работ ленинградского ученого Э.Б.Глинера стало понятно, что Λ -член есть не что иное как тензор энергии-импульса вакуума с ненулевой плотностью энергии. Действительно, если рассматривать Λ -член как идеальную жидкость, $T_{\mu\nu} = (\varepsilon_0 + p_0) u_\mu u_\nu - p_0 g_{\mu\nu}$, то его уравнение состояния выглядит как $\varepsilon_0 + p_0 = 0$ (если $\varepsilon_0 > 0$, то давление отрицательно, $p_0 < 0$, и наоборот) и $T_{\mu\nu} = -p_0 g_{\mu\nu} = \varepsilon_0 g_{\mu\nu}$. Мы видим, что всякий след четырех-скорости исчезает, то есть, обычная материя движется сквозь такую идеальную жидкость, никак на нее не влияя. Но таким же свойством обладал пресловутый эфир, введенный в физику для понимания движения электромагнитных волн, и "выведенный" из нее лишь с появлением специальной теории относительности!

А как обстоит дело с парадоксом Ольберса? На первый взгляд, конечные размеры мира Эйнштейна снимают все противоречия. Но все не так просто: дело портит стационарность. Свет от каждой звезды, направленный в сторону от Земли, не уходит теперь на бесконечность, а, огибая всю Вселенную, создает новые и новые изображения. И если предположить, что звезды светят вечно, как и в классическом парадоксе Ольберса, то не спасает ни естественное (за счет уменьшения телесного угла) ослабление яркости изображений звезды, ни гравитационное красное смещение. Старение и умирание звезд лишь делает свечение ночного неба из бесконечного конечным. Что же делать? Ответ - отказаться от требования стационарности космологических моделей. Об этом - следующая глава.

9 Космологическая модель Фридмана.

Итак, борясь за темное небо над головой, мы были вынуждены отказаться от стационарной космологической модели Эйнштейна. Что же нам дает нестационарность?

Вернемся к космологическому времени и запишем метрику в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + f^2(\chi) d\sigma^2), \quad (150)$$

где $f(\chi) = \sin \chi$, $\sinh(\chi)$ и χ для закрытой ($k = +1$), открытой ($k = -1$) и пространственно плоской ($k = 0$) моделей, соответственно. Мы положили здесь Λ -член равным нулю ради простоты, наглядности и исторической правды. Космологические уравнения Эйнштейна теперь - это

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \varepsilon \\ \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) &= -8\pi G p, \end{aligned} \quad (151)$$

где ε - плотность энергии, а p давление идеальной жидкости. Мы имеем два уравнения для трех неизвестных, $a(T)$, $\varepsilon(t)$ и $p(t)$. Третьим уравнением нам послужит уравнение состояния рассматриваемого вещества $\varepsilon = \varepsilon(p)$. Для последующего нам потребуется уравнение состояния простейшего вида

$$p = \alpha \varepsilon, \quad \alpha = const. \quad (152)$$

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости равен $T_\mu^\nu = (\varepsilon + p) u_\mu u^\nu - p \delta_\mu^\nu$, где u^μ - четырех-скорость вещества, δ_μ^ν - символ Кронекера (единичный тензор), а уравнение непрерывности $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$ мы перепишем следующим образом:

$$T_{\mu;\nu}^\nu = 0 = ((\varepsilon + p) u^\nu)_{;\nu} u_\mu + (\varepsilon + p) u^\nu u_{\mu;\nu} - p_{,\mu}. \quad (153)$$

Поскольку $A_{;\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (A^\nu \sqrt{-g})_{,\nu}$, а $u_{\nu;\mu} u^\mu = 0$ вследствие нормировки, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} ((\varepsilon + p) u^\nu \sqrt{-g})_{,\nu} + (\varepsilon + p) u^\nu (u_{\mu,\nu} - u_{\nu,\mu}) - p_{,\mu} = 0. \quad (154)$$

Такой вид записи уравнения непрерывности не содержит ковариантных производных и потому очень удобен при практических вычислениях. Вспомним теперь о космологической метрике: $\sqrt{-g} = a^3(t) f^2(\chi) \sin \theta$, χ - сопутствующая координата, поэтому $u^\nu = \delta_0^\nu$, $u_\mu = \delta_\mu^0$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $p = p(t)$. Имеем:

$$\frac{((\varepsilon + p) a^3)'}{a^3} - \dot{p} = \dot{\varepsilon} + 3(\varepsilon + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (155)$$

Несложно показать, что второе из уравнений (153) является дифференциальным следствием первого и уравнения непрерывности (155). Следовательно, для нашего специфического уравнения состояния,

$$\frac{1}{1 + \alpha} \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3 \frac{\dot{a}}{a}; \quad \varepsilon = \frac{C}{a^{3(1+\alpha)}}, \quad C = const. \quad (156)$$

Кстати, уравнение (155) можно вывести и из первого начала термодинамики:

$$dE = T dS - p dV + \mu dN . \quad (157)$$

Идеальная жидкость подразумевает изэнтропичность ($dS = 0$ - отсутствие неупругих процессов) и сохранение числа частиц ($dN = 0$). Переходя к плотности энергии (объем предполагается достаточно малым $V \sim a^3 \Delta\chi$), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{E}{V}, \quad dE = V d\varepsilon + \varepsilon dV, \\ d\varepsilon &= -(\varepsilon + p) \frac{dV}{V}; \\ \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} &= -3 \frac{da}{a}. \end{aligned} \quad (158)$$

Другим следствием нестационарности является универсальный закон распределения скоростей. В фиксированный момент времени расстояние до точки с сопутствующей координатой χ_0 равно $l = a(t_0) \chi_0$. Скорость же этой точки относительно наблюдателя равна $V(t_0) = \dot{l}(t_0) \chi_0$. В момент времени $t_0 + \Delta t$ имеем:

$$\begin{aligned} l(t_0 + \Delta t) &= a(t_0 + \Delta t) \chi_0 \\ &= a(t_0) \chi_0 + V_0 \Delta t = l_0 + V_0 \Delta t, \end{aligned} \quad (159)$$

откуда

$$V_0 = \dot{a} \chi_0 = \frac{\dot{a}}{a}(t_0) l_0 = H(t_0) l_0. \quad (160)$$

В настоящее время эта зависящая от времени "константа" равна

$$H_{now} = 55 \frac{km \cdot s^{-1}}{Mps} = (1,7 \cdot 10^{28} cm)^{-1} = (18 \cdot 10^9 y)^{-1}. \quad (161)$$

Она называется постоянной Хаббла в честь американского астронома, который в 1929 году доказал наблюдениями разбегание галактик и впервые (правда, неточно) измерил величину H .

Но еще раньше, в 1922 году, замечательный питерский математик Александр Александрович Фридман решил космологические уравнения Эйнштейна (151) для пыли, $p = 0$ ($\alpha = 0$). Официально Фридман занимался метеорологией, а космологией - для души, в свободное от работы время. К сожалению, в 1924 г. его жизнь оборвалась (тиф).

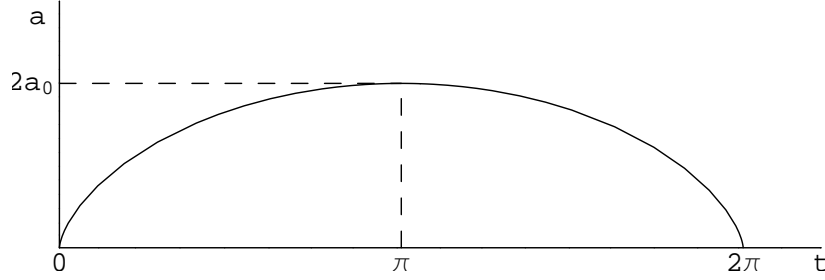


Рис. 1: Зависимость $a(t)$

9.1 Закрытая модель, $k = +1$.

Поскольку для пыли $\alpha = 0$, то из уравнения (156) следует $\varepsilon = \frac{C_1}{a^3}$, и мы остаемся с одним уравнением для $a(t)$ ($a(\eta)$):

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + 1 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{C_1}{a}; \\ \dot{a} &= \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{C_1}{a} - 1}.\end{aligned}\quad (162)$$

Решение этого дифференциального уравнения нельзя выразить в элементарных функциях, но если использовать конформное время ($\frac{dt}{a} = d\eta$), то все выглядит весьма элегантно:

$$\begin{aligned}a_\eta &= \pm \sqrt{a} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} C_1 - a} \\ a &= a_0 (1 - \cos \eta), \quad a_0 = \frac{4\pi G}{3} C_1, \\ t &= a_0 (\eta - \sin \eta),\end{aligned}\quad (163)$$

т.е., мы имеем решение в параметрическом виде, а конформное время измеряется в пределах $0 \leq \eta \leq 2\pi$. Графически это выглядит так, как показано на Рис. 1.

Видно, что закрытая вселенная вначале расширяется от нулевого объема до максимального (при $a = 2a_0$), а затем сжимается опять до нулевого объема. При $a = 0$ плотность энергии и все инварианты тензора кривизны становятся бесконечными - это означает, что мы имеем истинные, а не координатные, сингулярности. Объем закрытой вселенной

всегда конечен, что позволяет придать физический смысл постоянной $C_1 = \varepsilon a^3$. Действительно, объем трехмерной сферы равен $V = 2\pi^2 a^3$, а $\varepsilon V = M$ - голая масса вселенной (полная масса замкнутого мира с учетом гравитационного дефекта массы равна, разумеется, нулю). Поэтому, $M = 2\pi^2 C_1$. Интересно, что при малых значениях $\eta \ll 1$ (или вблизи 2π) поведение плотности энергии универсально (не зависит от единственного параметра a_0). Действительно,

$$\begin{aligned} \eta &\ll 1, \\ a &\simeq \frac{a_0 \eta^3}{2}, \quad t \simeq \frac{a_0 \eta^3}{6}, \quad a \simeq \left(\frac{9a_0}{2}\right)^{1/3} t^{1/3}, \\ \varepsilon &\simeq \frac{1}{6\pi G t^2}. \end{aligned} \quad (164)$$

Причинная структура космологической модели определяется чередованием знаков инварианта $\Delta = \gamma^{\mu\nu} R_{,\mu} R_{,\nu}$. У нас $R = a(\eta)r$, $g^{00} = 1/a^2(\eta)$, $g^{11} = -(1-r^2)/a^2(\eta)$, поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{a_\eta^2}{a^2} r^2 - (1-r^2) = \frac{a_\eta^2}{a^2} \sin^2 \chi - \cos^2 \chi \\ &= \frac{\sin^2 \eta}{(1-\cos \eta)^2} \sin^2 \chi - \cos^2 \chi = \sin^2 \chi \left(\cot^2 \frac{\eta}{2} - \cot^2 \chi \right). \end{aligned} \quad (165)$$

Ясно, что при $\eta \ll 1$ и $(2\pi - \eta) \ll 1$ мы имеем T_\pm -области, а в середине - R_\pm -области. Граница между ними проходит по горизонту видимости $\Delta = 0$, определяемому в нашем случае уравнением $\cot^2 \frac{\eta}{2} \pm \cot^2 \chi = 0$ с решением (с учетом пределов для η и χ)

$$\eta = 2\chi, \quad \eta = 2(\pi - \chi). \quad (166)$$

Видно, что сингулярности при $\eta = 0, 2\pi$ находятся в T -областях, поэтому замкнутая вселенная сжимается не в точку (как можно было бы предположить), а в бесконечно тонкий цилиндр ($0 \leq \chi \leq \pi$).

Для визуализации причинной структуры космологических моделей (и вообще сферически симметричных пространственно-временных многообразий) удобно использовать конформные диаграммы Картера-Пенроуза. В таком подходе к исследованию геометрии бесконечные точки переводятся конформным преобразованием на конечное расстояние от центра, а каждая точка на плоской диаграмме есть сфера соответствующего радиуса. В нашем случае все очень просто, и диаграмма Картера-Пенроуза как показано на Рис. 2

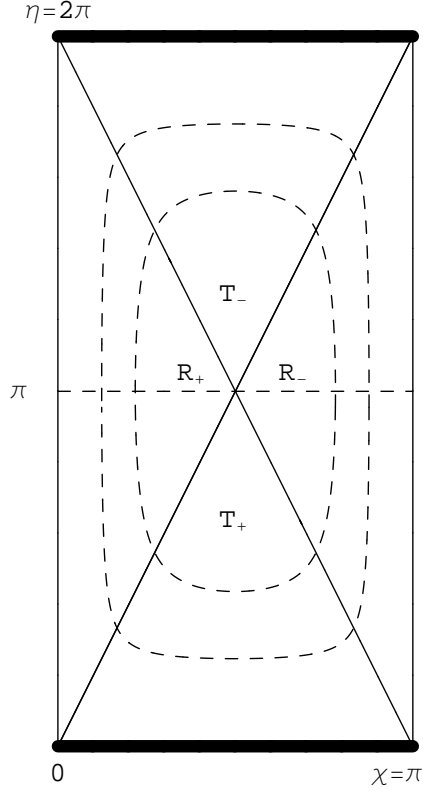


Рис. 2: Диаграмма Картера-Пенроуза для закрытой модели.

На этой диаграмме жирными линиями обозначены пространственно-подобные сингулярности $R = 0$ ($\eta = 0, 2\pi$), вертикальными линиями - времени-подобные линии $R = 0$ при $\chi = 0$ и антипод при $\chi = \pi$, а диагонали показывают горизонты видимости. Пунктирными линиями схематически показаны поверхности постоянного радиуса $R = const$.

9.2 Открытая модель, $k = -1$.

В случае открытой модели все очень похоже. Нужно лишь поменять тригонометрические функции и гиперболические и поменять знаки:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 (\cosh(\eta_0 - \eta) - 1), \quad R = a(\eta) \cosh \chi, \\
 t_0 \pm t &= a_0 (\sinh(\eta_0 - \eta) + \eta), \quad a_0 = \frac{4\pi G}{3} C_1.
 \end{aligned}
 \tag{167}$$

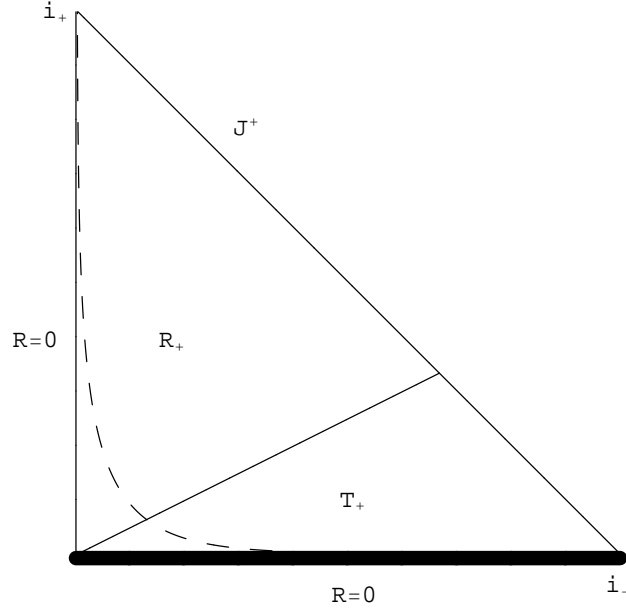


Рис. 3: Диаграмма Картера-Пенроуза для открытой модели.

Теперь вселенная или бесконечно расширяется от $a = 0$ до бесконечности, или сжимается. Знак "плюс" в (167) относится к расширению (удобно положить $t_0 = 0$), а знак "минус" для сжатия, при этом t_0, η_0 определяют время сжатия в сингулярность, а точка $\eta = 0$ - начало наблюдения. Вблизи сингулярности снова получаем универсальное поведение плотность энергии

$$\varepsilon = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (168)$$

Причинная структура, опять же, определяется знаками Δ , а горизонт ($\Delta = 0$) - уравнениями

$$\begin{aligned} \coth \frac{\eta}{2} &= \pm \tanh \chi, \\ \eta_0 \pm \eta &= 2\chi. \end{aligned} \quad (169)$$

Для расширяющейся вселенной диаграмма Картера-Пенроуза изображена на Рис. 3.

Здесь жирная линия - пространственно-подобная сингулярность $R = 0$ ($\eta = 0$), вертикальная линия - времени-подобная линия $R = 0$ ($\chi = 0$),

наклонная линия $\eta = 2\chi$ - горизонт событий, i_{\pm} - временные бесконечности будущего (+) и прошлого (-), а световая линия, их соединяющая (под углом -45°) - световая бесконечность (при $\eta \rightarrow \infty$ открытая вселенная похожа на плоское пространство-время (существование такой световой бесконечности в котором было подробно обосновано в предыдущем цикле лекций о черных дырах). Чтобы получить конформную диаграмму для режима сжатия, достаточно диаграмму для расширения перевернуть вверх ногами.

9.3 Пространственно плоская модель, $k = 0$.

Здесь еще проще:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} a_0 \eta^2, \quad a_0 = \frac{4\pi G}{3} C_1, \\ t &= \frac{a_0}{6} \eta^3. \end{aligned} \quad (170)$$

Нетрудно получить в этом случае функцию $a(t)$ универсальную (а теперь и точную) зависимость плотности энергии от времени:

$$\begin{aligned} a &= (18 a_0)^{1/3} t^{2/3}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{6\pi G t^2}. \end{aligned} \quad (171)$$

инвариант δ равен:

$$\Delta = \frac{4\chi^2}{\eta^2} - 1, \quad (172)$$

и горизонт видимости - это прямая $\eta = \frac{1}{2}\chi$ для расширяющейся вселенной, а диаграмма Картера-Пенроуза полностью совпадает с конформной диаграммой для открытой вселенной. Повторять картинку поэтому не будем.

А как насчет парадокса Ольберса? Очевидно, что небо ночью темное в закрытой модели: вселенная существует конечное время и имеет конечный объем. В случаях $k = -1$ и $k = 0$ количество звезд бесконечно, но спасает в совокупности конечное время существования вселенной и ее расширение (красное смещение). Наконец-то!

Есть интереснейшее совпадение, которое необходимо отметить и, заодно, понять. После второй мировой войны английские ученые Милн и

МакКри (*Milne, McCrea*) получили решение в лагранжевых переменных для шарового однородного скопления пыли в ньютоновской теории гравитации. И это решение полностью совпало с решением Фридмана! Случайно? - Нет! В решении Фридмана используются сопутствующие координаты, а в малом теория Эйнштейна переходит, как мы видели, в теорию Ньютона. В уравнении Пуассона источником притяжения является плотность массы (энергии), в теории Фридмана - тоже, ведь давление равно нулю.

В конце главы - два интересных эпизода, тесно связанных с именем Фридмана. Первый произошел почти сразу после опубликования решений уравнений Эйнштейна для нестационарной космологической модели. Эйнштейн прочитал статью (это было легко сделать, потому что тогда советские журналы печатались на немецком языке и распространялись по основным научным библиотекам) и, будучи сам автором стационарной космологической модели, возмутился и тотчас же написал письмо в известный немецкий физический журнал примерно такого содержания: я не проверял формулы, но уверен, что Фридман не прав, и стационарной вселенной быть не может, потому что этого не может быть никогда. Но вскоре Эйнштейна навестил находящийся в командировке в Германии советский физик (кажется, это был Катков, кристаллограф), который разъяснил все подробности вычислений Фридмана, и Эйнштейн, признав, что был неправ, сразу написал и отправил в тот же журнал опровержение на самого себя. Второй эпизод относится к 1988 году - это год столетия Фридмана. Мы, в связи с этим событием, совместно с питерскими физиками, организовали крупную международную конференцию. Питерцы решили, во что бы то ни стало, разыскать могилу Фридмана. Известно было, что он похоронен на Смоленском кладбище, и один из известных математиков вспоминал потом, что во время траурной церемонии он стоял на гранитном парапете могилы Леонарда Эйлера. Но потом была война, блокада, часть кладбища была разрушена, а прах Эйлера перенесен в Пантеон, Следы терялись. Но когда физики обратились за помощью к кладбищенскому смотрителю, оказавшимся недоучившимся студентом Ленинградского университета (что весьма характерно для Питера), то воскликнул это какой же Фридман?, который решил космологические уравнения Эйнштейна без Λ -члена? Так я нашел ее и содержку в порядке. Удивительно!

10 Вселенная, заполненная излучением.

"Физика - наука экспериментальная любил повторять декан физфака Фурсов в бытность мою студентом. В отношении космологии - наука наблюдательная. В наше время для наблюдений этих запускаются спутники (ярчайший пример - рентгеновский телескоп "Хаббл"), ракеты в верхние слои атмосферы, шары-зонды, создаются хитроумнейшие высокотехнологичные приборы, изобретаются все новые и новые методы обработки чрезвычайно слабых сигналов. И хотя наши лекции посвящены математическим основам этой науки, полет фантазии приходится сдерживать, чтобы не противоречить наблюдаемым фактам. (Мы будем писать слово "вселенная" если рассматривается космологическая модель и "Вселенная" с заглавной буквы, если речь идет о нашей родной Вселенной, в которой мы все и живем.)

С такой точки зрения: насколько объективно модели Фрийдмана описывают нашу Вселенную(?) Во-первых, предположение об однородности и изотропии. Тут все зависит от масштаба. Разумеется, в масштабах Солнечной системы об этом и говорить не приходится. Но если в качестве "точки" космологического пространства рассматривать целую галактику, то все выглядит, как показал Э.Хаббл, очень разумным. Во-вторых, выбор знака пространственной кривизны ($k = \pm 1, 0$). Пока наблюдательные данные не дают определенного ответа. Мы знаем только, что наша Вселенная очень большая и близка к плоской модели. И, наконец, самое главное (пока!): выбор тензора энергии-импульса вещества - пыль. В настоящее время плотность излучения пренебрежимо мала по сравнению с плотностью вещества, и потому пылевая модель является вполне реалистической. Но так ли это было всегда? Если мы будем вглядываться во все более отдаленное прошлое ($\sim 10^9$ лет назад, исследую все более и более отдаленные от квазары и галактики), то, следуя по уравнениям Фрийдмана назад по времени, убедимся, что вещество становится все плотнее и плотнее, и уже нельзя пренебрегать давлением. Ясно, что на пути к Фрийдмановской сингулярности мы обязаны заменить пылевую модель на нечто более реалистическое. Но на что?

Исторически, рассматривались две возможности: горячая Вселенная и холодная Вселенная. Первый вариант пропагандировал замечательный физик-теоретик Георгий (Джордж) Гамов, его у нас называли "невозвращенцем" потому что, будучи в командировке в Германии, попросил политического убежища и позднее перебрался в США (самое интерес-

ное: он сумел каким-то образом организовать выезд за границу и жены - таинственная история!). Естественно, в Советском Союзе считалось (наука здесь ни при чем!) - все, что предлагается Гамовым, враждебно марксистско-ленинской методологии (что это за методология такая, которая всего нового боится, мне непонятно до сих пор) и потому в корне неверно. Теорию холодной модели развивал гениальный теоретик-самоучка Яков Борисович Зельдович - академик, трижды Герой социалистического труда, один из основных создателей и атомной, и водородной бомбы. Зарубежные ученые искренне считали, что Я.Б.Зельдович - псевдоним группы очень сильных физиков-теоретиков, объединившихся ради создания новой грандиозной и многогранной науки релятивистской астрофизики (готовая аналогия: Бурбаки в математике), и были поражены, когда в 1981 г. в Москве на международном семинаре "Квантовая теория гравитации" увидели живого Зельдовича.

Я очень близко знал Якова Борисовича и потому уверен - он прекрасно понимал, что при очень больших плотностях, когда частицы уже релятивистские (и для их описания следует применить не ньютоновскую механику, а специальную теорию относительности), вступают в игру неупругие процессы рождения и аннигиляции частиц и античастиц, что невозможно без участия квантов электромагнитного поля, начинается рост энтропии, появляется температура, без которой немислимо существование фотонного газа в динамическом (термодинамическом) равновесии с веществом. Думаю, всем было ясно, что в ранний период эволюции наша Вселенная была горячей (на релятивистской стадии), потом, естественно, она остывала при расширении, и вопрос, в основном, заключался в том, можно ли было считать вещество холодным на стадии нуклеосинтеза, в результате которого образовались атомы водорода (около 80 процентов) и гелия (около 20 процентов), соотношение между обилиями которых наблюдается сегодня (оставшиеся проценты - это литий и другие легкие элементы). Оказалось, что обе теории (и горячая модель, и холодная) дают примерно одинаковые и, в разумных пределах, правильные результаты. Нужно было искать такое явление, которое имеет место быть в одной модели и напрочь отсутствует в другой., а далее все решит наблюдение (= эксперимент).

И такое различие было обнаружено. В горячей модели эволюция идет несколько иначе, чем в холодной. Стадию всеобщего термодинамического равновесия (фотонов, нуклонов и антинуклонов, электронов и позитронов) сменяет другая стадия, в которой фотоны рождаются вследствие

аннигиляции вещества и антивещества, но сами они уже не в состоянии рождать пары частиц (энергия уже не та). При дальнейшем охлаждении происходит рекомбинация: образуются атомы (сначала водорода, затем и других легких элементов, а энергии фотонов не хватает для отрыва электронов). Атомы же - существа нейтральные, с фотонами они не взаимодействуют, и происходит "отделение света от тьмы прямо как в Библии! Но это совсем не значит, что древние мудрецы обладали особыми (ныне утерянными) знаниями - просто они вывели логическое умозаключение (мудрецы же!): только свет или только тьма не несут никакой информации, а тьма на фоне света или наоборот - уже сигнал. Итак, после рекомбинации свет и вещество эволюционируют отдельно, и мы имеем космологическую модель с двумя различными идеальными жидкостями. Плотность энергии излучения падает быстрее, чем плотность вещества (точную формулу мы выведем ниже), поскольку часть энергии тратится на работу сил давления, и потому температура излучения, довольно высокая в момент рекомбинации, падает очень быстро, и также быстро Вселенная становится фридмановской. Это излучение получило название реликтового, и Г.Гамов рассчитал его нынешнюю температуру, правда, он получил несколько завышенное значение. Реальное, позднее измеренное, равно $\sim 2,7^{\circ}K$.

История физики вообще изобилует забавными случаями. так было и с открытием реликтового излучения. Двое радио инженеров компании Белл Телефон разработали усилитель с чрезвычайно низким расчетным уровнем шума и забрались на крышу самого высокого в то время здания в мире (Эмпайр Стэйт Билдинг), чтобы экспериментально это проверить. Но шум неожиданно оказался гораздо выше расчетного. К счастью, молодые инженеры догадались вращать антенну (чтобы избавиться от возможных радиопомех), но шум не исчезал: он оказался изотропным. Вечером, в пивном пабе, они удрученно обсуждали свою неудачу в компании со знакомым физиком. Тот посоветовал им съездить в Принстон (штат Нью Джерси, город, где работал Эйнштейн), сказав, что там на теоретических семинарах идут споры о чем-то похожем, и это связано, вроде бы, с наукой о Вселенной - космологией. Ребята последовали совету, рассказали в Принстоне о своих недоумениях, и каково же было их удивление, когда маститые физики горячо поздравили их с неожиданным открытием мирового научного значения. Итак, физика (наука экспериментальная!) сделала выбор в пользу горячей модели Вселенной. А радиоинженеры Пезиас и Вильсон стали обладателями Нобелевской

премии по физике.

Переход от очень горячей (мы будем называть это релятивистской стадией) к холодной стадии очень интересен как физическое явление (в это время идет множество процессов, определяющих дальнейшую эволюцию Вселенной), но мало информативен математически. Поэтому мы подробно опишем релятивистскую стадию, когда с очень большой точностью можно считать, что вселенная (Вселенная) заполнена исключительно электромагнитным излучением. Уравнение состояния фотонного газа имеет вид:

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon, \quad (173)$$

т.е., в уравнении (156) следует положить $\alpha = \frac{1}{3}$. Тогда для плотности энергии получаем

$$\varepsilon = \frac{C_2}{a^4}. \quad (174)$$

Уже упоминалось, что плотность излучения с расширением вселенной падает быстрее плотности вещества, и уравнение (174) тому доказательство.

Единственное необходимое нам уравнение Эйнштейна теперь = это

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{C_2}{a^4}, \quad (175)$$

где точка означает дифференцирование по космологическому времени. Это уравнение легко решается:

$$t_0 \pm t = \int \frac{a da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} C_2 - k a^2}} = \mp k \sqrt{\frac{8\pi G}{3} C_2 - k a^2}, \quad k = \pm 1. \quad (176)$$

$$t_0 \pm t = \frac{a^2}{2\sqrt{\frac{8\pi G}{3} C_2}}, \quad k = 0. \quad (177)$$

Положим $a_1 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3C_2}}$, $a = 0$ при $t = 0$ Тогда для закрытой модели ($k = 1$) имеем:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{t(2a_1 - t)} \\ a &= a_1 \sin \eta, \quad t = a_1 (1 - \cos \eta). \end{aligned} \quad (178)$$

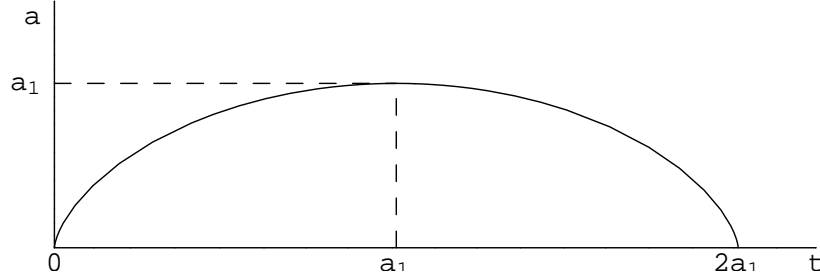


Рис. 4: Зависимость $a(t)$

Снова получаем осцилляторную модель. Графически это представлено на Рис. 4:

В пределе $\eta \ll 1$ ($t \ll a_1$)

$$a \simeq \sqrt{2a_1 t}, \quad \varepsilon \simeq \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2}, \quad (179)$$

т.е., получаем опять универсальное поведение для плотности энергии (но уже с другим коэффициентом!). Причинная структура определяется инвариантом Δ :

$$\Delta = \sin^2 \chi (\cot^2 \eta - \cot^2 \chi i), \quad (180)$$

а для горизонтов видимости $\Delta = 0$, и решениями являются отрезки световых прямых $\eta = \chi$, $\eta = \pi - \chi$, поэтому диаграмма Картера-Пенроуза несколько видоизменяется (см. Рис. 5)

Перейдем теперь к изучению открытой модели, $k = -1$. Для простоты рассмотрим только стадию расширения. Несложно видеть, что ,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{t(2a_1 + t)}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} C_2, \\ a &= a_1 \sinh \eta, \quad t = a_1 (\cosh \eta - 1). \end{aligned} \quad (181)$$

Диаграмма Картера-Пенроуза в основном такая же (см. Рис. 6), что и в случае пыли ($\alpha = 0$), но горизонт видимости теперь лежит на прямой $\eta = \chi$:

При $\eta \ll 1$ опять получаем универсальность:

$$a \simeq \sqrt{2a_1 t}, \quad \varepsilon \simeq \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2}. \quad (182)$$

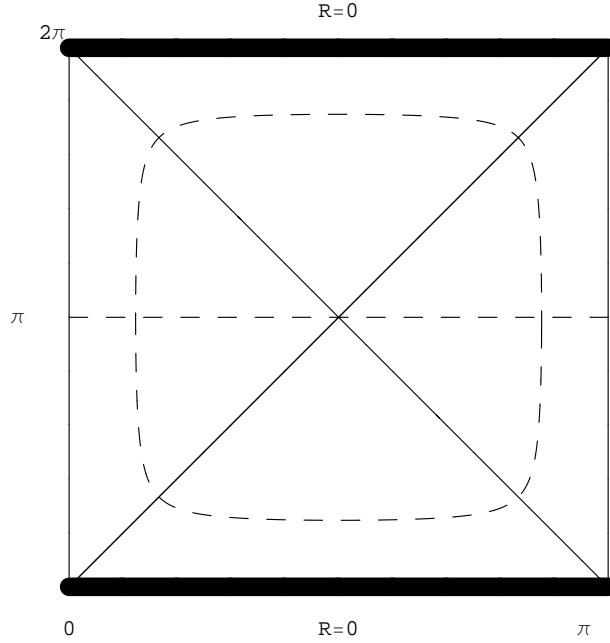


Рис. 5: Диаграмма Картера-Пенроуза для закрытой модели с излучением.

Наконец, пространственно плоская модель $k = 0$. Здесь все очень просто:

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 \eta, \quad t = \frac{a_1 \eta^2}{2}; \\
 a &= \sqrt{2 a_1 t}, \quad \varepsilon = \frac{3}{32 \pi G} \frac{1}{t^2}.
 \end{aligned}
 \tag{183}$$

И последнее в этой главе. В случае закрытой вселенной, заполненной излучением, мы уже не можем связать константу C_2 с голой массой. Теперь масса (энергия) уже не может оставаться постоянной, а в результате работы сил давления она уменьшается при расширении и увеличивается (до бесконечности) при сжатии. Но энтропия фотонного газа ($S \sim a^3$) и число фотонов ($N \sim a^3$) остаются постоянными. Предоставим слушателям найти зависимости $C_2(S)$ и $C_2(N)$ самостоятельно (в качестве справочника лучше всего воспользоваться пятым томом курса теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица "Термодинамика").

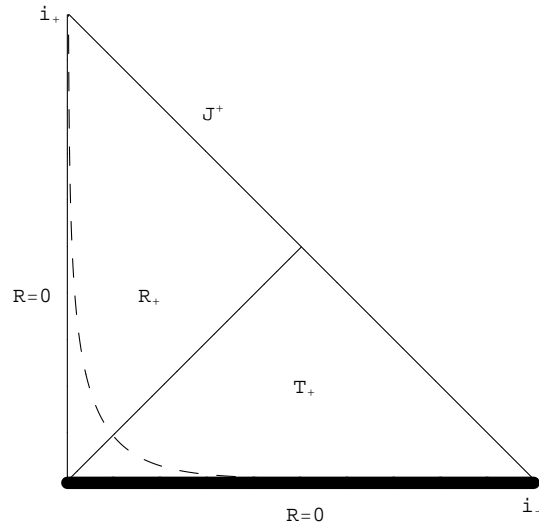


Рис. 6: Диаграмма Картера-Пенроуза для открытой модели с излучением.

11 О сингулярностях.

Как мы воочию убедились, и модели Фридмана, и вселенная, заполненная излучением, начинаются с сингулярности при $R = 0$, в которой все вещество сосредоточено в бесконечно тонком цилиндре и имеет, следовательно, бесконечную плотность. Более того, это пространственно-временная сингулярность, где все инварианты тензора кривизны (тензора Римана) обращаются в бесконечность. Физика вообще не любит бесконечностей, поскольку это означает недееспособность соответствующей теории вблизи сингулярности. Но физики долгое время относились к космологической сингулярности благодушно и даже придумали ей поэтическое название "*Big Bang*", т.е., "Большой Взрыв". Психологически они оправдывали себя тем, что, скорее всего, эта сингулярность есть артефакт высокой симметрии, а, мол, в более реальных моделях все будет прекрасно. В начале 70-х годов прошлого столетия появилась серия фундаментальных работ В.А.Белинского, Е.М.Лифшицф и И.М.Халатникова, в которых авторы рассмотрели режим приближения к сингулярности в более общей модели вселенной - однородной, но неизотропной, и показали, что этот режим - колебательный, описываемый че-

редой метрик Казнера (нам нет нужды подробно здесь на этом останавливаться), но сингулярность все равно не исчезает.

Причина такого долгого (полувекового, как минимум) заблуждения была в том, что физическое научное сообщество (включая самого Эйнштейна), приняв логику общей теории относительности, не обращали внимание на ее суть, именно, на то, что "формальный" переход от плотности массы к тензору энергии-импульса в качестве источника гравитационного поля и кривизны пространства-времени произвел, на самом деле, революцию в физике. Ведь это, в сущности, означало, что источником притяжения является не только плотность энергии, но и импульс (кинетическая энергия), и тензор натяжений (потенциальная энергия). В интересующем нас случае идеальной жидкости это значит, что существование давления приводит не только к отталкиванию, но и к дополнительному гравитационному притяжению, поскольку давление совершает положительную работу и, следовательно, обладает потенциальной энергией. Первым, пожалуй, это понял и прочувствовал знаменитый физик, классик науки Джон Арчибальд Уилер *J.A.Wheeler*, который долгое время занимался, вместе с сотрудниками, исследованием равновесного состояния холодного вещества (остывшие звезды после исчерпания ядерного горючего) и открыл явление самоусиления давления. Было показано (численными расчетами на компьютерах и аналитически на простых моделях), что чем выше давление, тем сильнее притяжение, и нужно увеличивать давление, чтобы противостоять гравитации, и так до того момента, пока давление в центре, необходимое для поддержания равновесия, не станет бесконечным, система перестает быть устойчивой, и начинается гравитационный коллапс, приводящий к образованию черной дыры. А как обстоит дело в космологии? Вспомним второе из уравнений Эйнштейна (которое и является динамическим). Линейная комбинация первого и второго уравнений позволяет вывести следующее соотношение:

$$\ddot{a} = -4\pi G a(\varepsilon + 3p), \quad (184)$$

т.е., поскольку для обычной материи $\varepsilon + 3p > 0$ ($\varepsilon > 0$, $p > 0$), то вселенная расширяется с замедлением ($\ddot{a} < 0$), что ярко демонстрирует притягивающую природу гравитационного поля. В простейших моделях все очень наглядно, а как обстоит дело в общем случае?

Вскоре после цикла работ Белинского, Лифшица и Халатникова появляются работы знаменитого английского математика, любящего физику, Роджера Пенроуза (*R.Penrose*) и знаменитого английского физика,

любящего математику, Стивена Хокинга *S.W.Hawking*. В этих работах были доказаны фундаментальные теоремы о сингулярностях для черных дыр (Пенроуз) и в космологии (Хокинг). Мы не будем перечислять все условия теорем (понимание этих условий и доказательств требует знания совсем другой математики, а это заполнит целую книгу), а обратим внимание на основное для нас - требование, чтобы гравитационное поле было полем притяжения. Это условие получило название "энергодоминантности".

Математически оно выглядит просто и элегантно: свертка тензора Риччи с произведением любых двух (одинаковых) изотропных или времени-подобных векторов должна быть положительной. Именно,

$$R_{\mu\nu} l^\mu l^\nu > 0, \quad (185)$$

где $l^\mu l_\mu = 0$ или $l^\mu l_\mu = 1$. Выбор именно тензора Риччи неслучаен, поскольку именно он определяет схождение геодезических. Для любой космологической модели с веществом в виде идеальной жидкости имеем, в силу уравнений Эйнштейна,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \\ R &= -8\pi G T, \\ R_{\mu\nu} &= 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ &= 8\pi G \left((\varepsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\varepsilon - 3p) \right). \end{aligned} \quad (186)$$

Следовательно, для светового (изотропного) вектора l^μ , $l^\mu l_\mu = 0$ получаем:

$$(\varepsilon + p) (u_\mu l^\mu)^2 \geq 0, \quad \varepsilon + p \geq 0. \quad (187)$$

Для времени-подобного вектора, например, четырех-скорости $l^\mu = u^\mu$, $u^\mu u_\mu = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon + p - p - \frac{1}{2} (\varepsilon - 3p) \\ = \frac{1}{2} (\varepsilon + 3p) \geq 0. \end{aligned} \quad (188)$$

Это и есть условия энергодоминантности, без нарушения которых нельзя избежать сингулярности.

Но откуда взять столь экзотическую материю, для которой $\varepsilon + 3p < 0$? И тут космологии пришла на помощь физика элементарных частиц, точнее, современное развитие квантовой теории поля. Физикам удалось единым образом описать электромагнитное и слабое взаимодействия и создать так называемую электрослабую теорию, за что трое - С.Вайнберг, А.Салам и Дж.Глэшоу - получили Нобелевскую премию. Основой этой теории является идея спонтанного нарушения симметрии (группа $SU(2) \times U(1)$ нарушается до $U(1)$), при этом фотоны остаются безмассовыми, а переносчики слабого взаимодействия приобретают массу. Ответственным за подобное нарушение является форма потенциала особого скалярного поля Хиггса, имеющего два минимума с различными плотностями энергии. Каждый из минимумов определяет вакуумное состояние (с различной симметрией). Так в физике появилась идея о ненулевой плотности энергии вакуума, а космологи вспомнили о космологическом Λ -члене, введенном в уравнения гравитации Эйнштейном (который до конца дней своих считал это величайшей ошибкой). Затем появилась серия работ Э.Б.Глинера (мы уже упоминали об этом), в которых было показано, что космологический член пропорционален плотности энергии вакуума: тензор энергии-импульса $\Lambda \delta_{\mu}^{\nu}$ пропорционален единичному тензору и потому инвариантен относительно преобразований координат; более того, вакуумные решения с $\varepsilon > 0$ обладают той же степенью симметрии (10-типараметрическая группа движений), что и вакуум Минковского в специальной теории относительности. Следует сказать, что вакуумные решения с Λ -членом были получены де Ситтером задолго до упомянутого прогресса в физике частиц, основательно забыты и упоминаемыми в монографиях лишь в виду их удивительной геометрической красоты. Тензор энергии-импульса вакуумного решения можно записать в виде тензора энергии-импульса особой идеальной жидкости с уравнением состояния

$$\varepsilon_0 + p_0 = 0, \quad \varepsilon_0 = -p_0 = \text{const} = \frac{1}{8\pi G} \Lambda. \quad (189)$$

Для положительно плотности энергии вакуума нарушение энергодоминантности очевидно.

Исследованием геометрии мира де Ситтера мы и займемся в следующей главе.

12 Мир Де Ситтера.

Итак, мы выяснили, что Λ -член можно представлять себе как особого вида идеальную жидкость с уравнением состояния $p = -\varepsilon$, а из уравнения непрерывности следует постоянство плотности энергии и давления $\varepsilon = \varepsilon_0 = -p_0 = \text{const}$. Оказывается, такое необычное уравнение состояния соответствует тензору энергии-импульса вакуума с ненулевой плотностью энергии. Мир де Ситтера - это решение вакуумных уравнений Эйнштейна, когда плотность энергии вакуума положительна $\varepsilon > 0$. Космологическое уравнение для масштабного фактора $a(t)$ выглядит очень просто:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon_0. \quad (190)$$

Введя размерный множитель $a_0 = (\frac{8\pi G}{3} \varepsilon_0)^{-1/2}$, получаем следующие решения для различных значений k :

$$\begin{aligned} k &= +1 : \\ a &= a_0 \cosh \frac{t}{a_0}, \quad t = a_0 \tan \eta, \quad -\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2} \\ ds^2 &= dt^2 - a_0^2 \cosh^2 \frac{t}{a_0} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2). \end{aligned} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} k &= -1 : \\ a &= a_0 \sinh \frac{|t|}{a_0}, \quad \eta = \ln \frac{\cosh \frac{t}{a_0} + 1}{\cosh \frac{t}{a_0} - 1} = \frac{1}{2} \ln \coth \frac{t}{2a_0}, \\ ds^2 &= dt^2 - a_0^2 \sinh^2 \frac{t}{a_0} (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\sigma^2), \end{aligned} \quad (192)$$

или, чтобы сохранить непрерывность космологического времени как функции конформного времени, можно выбрать другую постоянную интегрирования; в результате имеем:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \left(1 + \sinh \frac{|t|}{a_0}\right), \\ \eta &= \frac{2e^{\frac{t}{a_0}}}{e^{\frac{t}{a_0}} + 1} - 1, \quad -1 < \eta < 1. \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned}
k &= 0 : \\
a &= a_0 e^{\frac{|t|}{a_0}}, \quad \eta = 1 - e^{-\frac{|t|}{a_0}}, \\
ds^2 &= dt^2 - a_0^2 e^{2\frac{|t|}{a_0}} (d\chi^2 + \chi^2 d\sigma^2).
\end{aligned} \tag{194}$$

Несмотря на различный вид этих метрик, они описывают одно и то же многообразие. Причина тому - высокая степень симметрии вакуума, 10-ти-параметрическая группа де Ситтера. Нетрудно (хотя и утомительно) получить формулы преобразований координат, связывающих метрику (191) с метриками (192) и (194). Пусть это будет вашим домашним заданием.

Оказывается, мир де Ситтера можно представить как 4-мерную поверхность гиперboloида вращения, вложенного в плоское пятимерное пространство с лоренцевой сигнатурой (+ - - -):

$$ds^2 = dx_5^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2. \tag{195}$$

Поверхность этого гиперboloида задается уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = a_0^2, \tag{196}$$

а вращается у нас трехмерная сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \tag{197}$$

откуда

$$x_5^2 = a^2 - a_0^2, \quad dx_5 = \frac{ada}{\sqrt{a^2 - a_0^2}}. \tag{198}$$

Вводя три угловые координаты

$$\begin{aligned}
x_1 &= a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \\
x_2 &= a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\
x_3 &= a \sin \chi \cos \theta, \\
x_4 &= a \cos \chi
\end{aligned} \tag{199}$$

получаем выражение для линейного элемента:

$$ds^2 = \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} da^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \tag{200}$$

Наконец, определим космологическое время $dt = \frac{a_0 da}{\sqrt{a^2 - a_0^2}}$, откуда $a = a_0 \cosh \frac{t}{a_0}$.

Причинная структура определяется, как всегда, знаками инварианта Δ и положениями горизонтов видимости Δ .

$$\begin{aligned} R &= a_0 \cosh \frac{t}{a_0} \sin \chi, \\ \Delta &= -1 + \cosh^2 \frac{t}{a_0} \sin^2 \chi = -1 + \frac{R^2}{a_0^2}, \end{aligned} \quad (201)$$

и

$$\Delta = 0, \quad R = R_0 = a_0, \quad (202)$$

т.е., горизонты видимости расположены на поверхностях постоянного радиуса, следовательно, это светоподобные (изотропные) гиперповерхности, Конформная диаграмма Картера-Пенроуза поэтому представляет собой квадрат, диагоналями которого и служат горизонты видимости (см. Рис. 7). Отсюда и распределение R - и T -областей.

Пунктирными линиями показаны поверхности постоянного радиуса (времени-подобные в R -областях и пространственно-подобные в T -областях). Очевидно, это многообразие геодезически полное, а сингулярности отсутствуют.

В R -областях мы можем выбрать радиус в качестве пространственной координаты, временную координату выберем так, чтобы метрика была диагональной. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) d\tau^2 - \frac{1}{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (203)$$

Именно в таком виде ее и получил впервые де Ситтер. Очевидны сингулярность (координатная!) на горизонте, но она отличается от горизонта Шварцшильда в теории черных дыр, где есть четко выраженный центр. Теперь же, как мы уже знаем, центр и, следовательно, положение горизонта зависят от положения наблюдателя.

Мы уже видели в теории черных дыр, что любой статический наблюдатель в статическом гравитационном поле "видит" температуру. Глубокая причина этого явления в том, что на самом деле такой наблюдатель имеет ненулевое постоянное ускорение, а ускоренный наблюдатель чувствует температуру даже в плоском пространстве-времени Минковского.

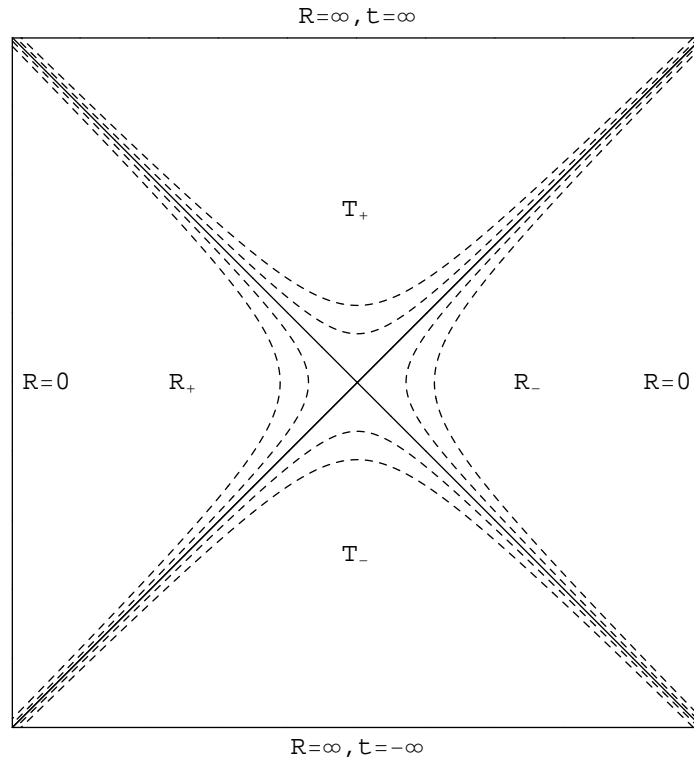


Рис. 7: Диаграмма Картера-Пенроуза для мира Де Ситтера.

Температура не является скаляром, а лишь нулевой (временной) компонентой четырех-вектора, также как и энергия частицы. В сферически симметричном статическом гравитационном поле ускорение наблюдателя зависит от радиуса, на котором он находится в состоянии покоя. Но температура, которую он "видит" зависит не только от его положения, но и от хода его часов, т.е., от величины (00) -компоненты метрического тензора. Разумеется, в статической метрике он вправе считать себя "пупом Вселенной" и полагать, что именно его часы и его время "правильные". Хорошо, когда есть выделенный наблюдатель, ускорение которого равно нулю. В теории черных дыр это был наблюдатель на бесконечности. В нашем случае мира де Ситтера - это наблюдатель в центре $R = 0$, а следовательно, любой наблюдатель в силу однородности космологического пространства-времени и полной свободы выбора начала координат.

Из лекций по теории черных дыр мы знаем способ вычисления такой температуры: для этого надо зафиксировать углы ($\theta, \varphi = const$), а в оставшейся двумерной метрике сделать виковский поворот к мнимому времени $\tau \rightarrow -i \Theta$:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) d\Theta^2 + \frac{1}{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} dR^2. \quad (204)$$

Затем нужно привести эвклидову метрику вблизи горизонта к полярным координатам (ρ, ϕ) . В нашем случае $\rho = R_0 \sqrt{2(1 - \frac{R}{R_0})}$, $\phi = \frac{\Theta}{R_0}$. В общем случае горизонт в псевдоевклидовой двумерной метрике превращается в конусную особенность при переходе в "эвклид". Следующий шаг - потребовать отсутствия конической сингулярности, т.е., пределы изменения полярного угла должны быть $0 \leq \phi < 2\pi$. Тогда температура, чувствуемая наблюдателем в центре, равна обратному периоду мнимого времени, именно ($R_0 = a_0$)

$$T_{deSitter} = \frac{1}{2\pi a_0} = \sqrt{\frac{2G}{3\pi}} \varepsilon_0. \quad (205)$$

Следовательно, любой наблюдатель в мире де Ситтера "видит" температуру (205) и более ничего. Следует отметить, что предлагаемый алгоритм "вычисления" температуры перекликается с аксиоматическим определением температуры в т.н. "температурных теориях поля".

Наконец, для полноты картины, исследуем пространство-время с отрицательным Λ -членом, т.е., метрику вакуума $(\varepsilon + p) = 0$ с отрицательной плотностью энергии $\varepsilon_0 < 0$, называемой метрикой анти-де-Ситтера (AdS). Имеем:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon_0 < 0, \quad (206)$$

поэтому, автоматически, $k = -1$ и

$$a = a_0 \sin \frac{t}{a_0}, \quad a_0 = \left(-\frac{8\pi G}{3} \varepsilon_0\right)^{-1/3},$$

$$ds^2 = dt^2 - \sin^2 \frac{t}{a_0} (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\sigma^2). \quad (207)$$

Анти-деситтеровский мир (AdS) также может быть вложен в плоское пятимерное пространство, но с другой сигнатурой: $(++-)$. Получается

двуполостный гиперboloид вращения

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 &= -a_0^2, \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= -a^2, \\x_5^2 &= a_0^2 - a^2, \quad 0 \leq a \leq a_0.\end{aligned}\tag{208}$$

Преобразование координат, приводящее к метрике (207), имеет вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi \\x_2 &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi \\x_3 &= a \sinh \chi \cos \theta \\x_4 &= a \cosh \chi; \\t &= \int \frac{a_0 da}{\sqrt{a_0^2 - a^2}}.\end{aligned}\tag{209}$$

Инвариант Δ теперь равен

$$\Delta = -1 - \frac{R^2}{a_0^2},\tag{210}$$

т.е., всюду мы имеем R -область, а конформная диаграмма Картера-Пенроуза имеет тот же вид, что и в плоском пространстве-времени Минковского (см. Рис. 8).

В координатах кривизны (R, τ) получаем статическое геодезически полное многообразие с метрикой ($R_0 = a_0$)

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2}\right) d\tau^2 - \frac{1}{1 + \frac{R^2}{R_0^2}} dR^2 - R^2 d\sigma^2.\tag{211}$$

13 Идеи современной космологии: Обо всем понемногу.

До сих пор мы интересовались математическим обоснованием космологических построений, а физика, будучи, разумеется, нашей путеводной звездой, оставалась на втором плане. Но в этой, заключительной, главе все будет иначе. Поскольку в современной космологии (ее еще можно назвать пост-фридмановской) есть много различных идей на уровне

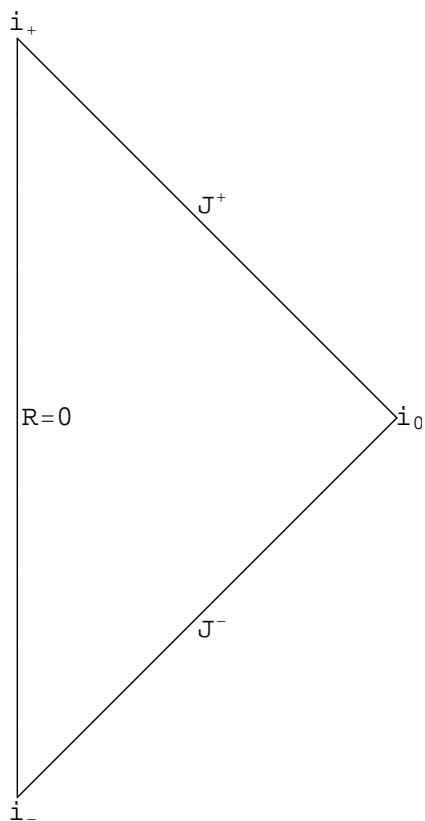


Рис. 8: Диаграмма Картера-Пенроуза для анти Де Ситтера.

смелых, красивых и вполне обоснованных гипотез, но все еще не хватает наблюдательных данных (и это несмотря на громадные усилия многих талантливых ученых и сверхсовременную аппаратуру), мы обойдемся без формул и просто расскажем о некоторых основных направлениях, которые усиленно разрабатываются "сегодня".

Но прежде, чем окунуться в физику, зададимся "простым" вопросом: что плохого в модели Фридмана и/или в модели, заполненной излучением? Ответ также прост - начальные сингулярности, другими словами, "Большой Взрыв" (*Big Bang*). Долгое время космологи не обращали на него внимания, полагая, что в реальной космологической модели (вовсе не однородной и, тем более, неизотропной, наблюдаемая почти точная изотропия может быть естественным образом объяснена бурным рождени-

ем элементарных частиц и самим процессом расширения) сингулярность должна отсутствовать, но после доказательства теорем о сингулярностях эта надежда пропала. И тогда физики стали уповать на то, что в "Очень ранней вселенной" (это уже устоявшийся термин, потому и в кавычках) обязаны быть существенными квантовые эффекты (как для гравитационного поля, так и для других материальных полей), и такие новые надежды как будто бы во многом укреплялись результатами квантования простейших космологических моделей. Но теория, в которой есть Большой Взрыв или его имитация, имеет недостатки, исправление которых невозможно списать на особенности квантовой теории гравитации (которая, как известно, до сих пор не построена, несмотря на десятилетия усилий). Во-первых, почему наша реальная Вселенная столь однородна? Расчеты показывают, что в момент рекомбинации ("отделения света от тьмы") должно было существовать невообразимое множество областей, причинно не связанных друг с другом, и потому наблюдаемая однородность кажется просто чудом. Во-вторых, почему наша Вселенная такая большая? Если верить в то, что Большой Взрыв обусловлен каким-то образом квантовыми эффектами, то случайный выбор в пользу столь громадной вселенной настолько маловероятен (и эту вероятность можно вычислить), что серьезно обсуждать такую возможность вовсе смешно. Поэтому любая реалистическая космологическая модель должна дать обоснованные ответы на эти два вопроса.

И тут на помощь космологам пришли теоретики, занимавшиеся физикой элементарных частиц и квантовой теорией поля, вовсе не помышлявшие заниматься гравитацией и космологией. Это было в 60-х годах прошлого (XX) столетия. Недавние успехи в построении теории слабых взаимодействий путем объединения их с электромагнитными полями привели к созданию электрослабой теории поля, в которой основным элементом была идея спонтанного нарушения симметрии, осуществляемого некими скалярными полями Хиггса (*Higgs*). И хотя сами поля Хиггса до сих пор не наблюдались на самых больших в мире ускорителях, многие следствия этой теории, тем не менее, были подтверждены экспериментально, а три физика-теоретика, А.Салам, С.Вайнберг и Дж.Глэшоу (*A.Salam, S.Weinberg, G.G.Glashow*) были удостоены Нобелевской премии по физике. Абдус Салам был, кроме того, посвящен английской королевой в рыцарское достоинство (и получил рыцарское имя сэра Абдуссалам - одним словом). Естественно, что эти впечатляющие успехи нужно было попробовать использовать в космологии. Естественно-

но, хотя и совсем не просто. Но все же дело было сделано усилиями двух московских выдающихся физиков Давида Абрамовича Киржница и Андрея Дмитриевича Линде, которые показали, что при высокой температуре термодинамический потенциал, а именно, свободная энергия, имеет только один минимум, но с расширением вселенной и понижением температуры появляется второй, энергетически более низкий, глобальный минимум. Минимум с более высокой плотностью энергии получил название ложного вакуума, а минимум пониже - истинного вакуума. Затем происходит фазовый переход с образованием пузырей истинного вакуума в океане ложного вакуума.

Вскоре американский физик Алан Гус (*A.Guth*) показал, что, в принципе, при положительной плотности энергии ложного вакуума такая модель с фазовыми переходами может освободить фридмановскую космологию от основных недостатков. Он дал имя процессу: инфляция (это совсем не то, о чем вы подумали, а "уплощение"). Инфляционные модели стали очень популярными. Пузыри новой фазы расширяются, поскольку более низкая плотность энергии означает вакуума означает более низкое абсолютное значение давления. Но давление вакуума отрицательное, поэтому оно больше внутри и меньше снаружи. Разность давлений и вызывает расширение границы пузыря, которое может быть описано моделью тонкой сингулярной оболочки с плотностью энергии-импульса, пропорциональной δ -функции. Отметим, что сценарий А.Гуса - не первый инфляционный сценарий, просто само понятие "инфляции" было введено в физику и космологию именно в его статье, но об этом немного позже. Но, "хорошо все на бумаге, да забыли про овраги, а по ним ходить". "Овраги это другие пузыри, которые, сталкиваясь, должны создавать неоднородности и, по расчетам, быть вполне наблюдаемыми. Но наша Вселенная, как назло, вполне однородна. Поэтому был придуман другой сценарий, получивший название "новая инфляция". В этом случае потенциал должен иметь особую форму с небольшой ямочкой в качестве ложного вакуума. Оказалось, что квантовый туннельный переход "сажает" пузырь не в глобальный минимум, а на стенку потенциальной ямы, а медленное "скатывание" его в минимум обеспечивает и гигантский размер (гораздо больший, чем видимая Вселенная), и однородность. В этом сценарии ясно, как создается большая голая масса вселенной. Дело в том, что положительное давление производит положительную работу и уменьшает, следовательно, общую энергию (массу), а отрицательное давление увеличивает ее, прежде всего, за счет увеличения объема.

Но, опять же, оказалось, что в более или менее реальной модели "новой инфляции" требуемая форма потенциала не может быть реализована в рамках разумных объединенных теорий поля.

В самом начале 80-х годов (разумеется, прошлого века) Андрей Линде выдвинул блестящую идею, предложив сценарий "хаотической инфляции". Исследуя поведения (гипотетического) скалярного поля с самодействием в ранней вселенной, он обратил внимание на то, что при определенных начальных условиях существует закритический режим, в котором непременно существующие флуктуации поля приводят не к осцилляциям, к которым все привыкли, а к медленному уменьшению потенциальной энергии. С точки зрения теории тяготения, мы имеем дело с вакуумом де Ситтера или состоянием, очень похожим на него. За безумно короткое время флуктуация, если ее размеры превышают де-ситтеровский горизонт, расширяется до невообразимых размеров (я сознательно не привожу здесь никаких цифр), решая, похоже, все проблемы космологических моделей Большого Взрыва, включая наблюдаемую слабую неоднородность и анизотропию нашей Вселенной. Эта гипотеза тоже натывается на трудности - требуется "мягкий выход" из режима расширения. Интересно отметить, что геометрия вселенной, в которой имеет место хаотическая инфляция, вовсе не тривиальная. Это геометрия полузамкнутого мира (В.А.Березин, В.А.Кузьмин, И.И.Ткачев) или, иначе, непроходимой кротовой норы, соединенной с материнской, жутко неоднородной и анизотропной, вселенной горловиной, называемой также мостом Эйнштейна-Розена.

Но в любом инфляционном сценарии есть главный вопрос: откуда взять скалярное поле, так называемый инфлантон?

На этот счет есть много оригинальных идей, заслуживающих пристального внимания. Наиболее радикальная из них была предложена Андреем Дмитриевичем Сахаровым. Она стала очень популярной и известна под именем "индуцированная гравитация". А.Д.Сахаров предположил, что гравитационное поле не фундаментальное, как сильное взаимодействие между барионами (или кварками), описываемое квантовой хромодинамикой, или электромагнитное и слабое взаимодействия, описываемые объединенной теорией Вайнберга-Салама. По Сахарову, гравитация - эффективная теория, описывающая совокупность натяжений квантовых флуктуаций всех материальных полей. При этом лагранжиан такой теории уже не ограничивается, в принципе, линейной функцией скалярной кривизны. Идея индуцированной гравитации поддерживается

и конкретными расчетами. Наглядный пример - квантование скалярного поля в искривленном пространстве-времени. Устранение расходимостей, присущих любой квантовой теории поля, приводят к появлению контрчленов, пропорциональных скалярной кривизне (это перенормировка гравитационной постоянной), перенормированного Λ -члена (вакуума де Ситтера, даже если исходный классический вакуум имел нулевую плотность энергии), а также, что важно, к слагаемому, квадратичному по скалярной кривизне - другими словами, к эффективному нелинейному гравитационному лагранжиану. И это все уже в однопетлевом приближении! Пионерами данного направления космологических исследований были А.А.Старобитнский и Я.Б.Зельдович в Москве, А.Гриб, С.Мамаев и В.Мостепаненко в Питере и американские физики Паркер и Фуллинг (*Parker, Fulling*). Но какое отношение все это имеет к скалярному полю? Все дело в том, что нелинейную по кривизне теорию гравитации с помощью конформного преобразования метрики можно свести к теории Эйнштейна с линейным по кривизне лагранжианом плюс эффективное скалярное поле. Если соответствующее действие варьировать по метрике (метод Эйнштейна-Гильберта), то это приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка или, эквивалентно, к уравнениям Эйнштейна с динамическим скалярным полем в качестве источника, уравнения движения которого - второго порядка по производным (о другом варианте мы расскажем ниже). Важно особенностью получающихся уравнений является неустойчивость решений относительно малых возмущений. Алексей Старобитнский блестяще использовал нелинейную гравитацию для построения космологической модели нового типа. В качестве начального состояния он избрал мир де Ситтера. Вследствие упомянутой уже неустойчивости мир де Ситтера распадается, превращаясь, в конечном счете, во вселенную Фридмана. Исторически, это был первый инфляционный сценарий, успешно забытый, но, к счастью, получивший недавно новое развитие. Вот вам еще один пример того, как важно найти неожиданный запоминающийся термин для своего открытия, что может в результате (и в науке есть такие случаи) привести к присуждению Нобелевской премии. Разительное доказательство тому (правда, не связанное с премией) - наименование целого материка, Америки, в честь мореплавателя Америго Веспуччи, который вовсе не был первооткрывателем.

Другой радикальной идеей является отказ от четырехмерности пространства-времени. Первоначально она появилась в работах Калу-

цы (Kaluza) и Д.Кляйна (Klein) в 30-х годах прошлого века и была связана с попытками объединить гравитационное и электромагнитное взаимодействия путем присоединения к нашему четырехмерному пространству пятого компактного измерения в виде кольца (очень маленького радиуса, чтобы не было заметно в ускорительных экспериментах). В общем случае это приводит естественным образом к появлению скалярного поля при редукции пятимерного действия Эйнштейна на четырехмерное пространство-время. Теория Калуцы-Кляйна впоследствии получила развитие в теориях супергравитации ("живущих" с необходимостью в многомерии), а также в теориях струн и суперструн. В этих многомерных теориях возникает вопрос: почему дополнительные размерности, по определению, компактны и малы, а наблюдаемые четыре размерности декомпактизованы? Интересный возможный ответ был предложен в работе Брэдэнбергера и Вафы (Bradenberger, Wafa). Эти авторы обратили внимание на то, что струны не взаимодействуют, то никакой инфляции не происходит, а при их взаимодействии возникает некий эффективный потенциал, приводящий к появлению Λ -члена (или к нечто подобному). Но струны, будучи двумерными объектами (одномерное время плюс одномерное пространство), могут эффективно взаимодействовать лишь в четырехмерном пространстве-времени ($2+2=4$), в многообразиях же большего числа измерений они в состоянии легко обойти друг друга, "не дотрагиваясь".

Оказывается, "выход" в многомерное пространство-время не обязательно требует компактности дополнительных измерений. В последнее время большую популярность приобрела теория Рэндалл-Сундрума (Randall, Sundrum), в которой размер пятого измерения бесконечен. Предполагается, что в пятимерии справедливы уравнения Эйнштейна, а материя (имеются в виду фермионы) сосредоточена в четырехмерной тонкой оболочке. Интерес к этой теории обусловлен, прежде всего, тем, что она позволяет дать хоть какое-то обоснование наблюдаемой иерархии масс элементарных частиц, за что немедленно ухватились теоретики, занимающиеся квантовой теорией поля. Начальная идея представить нашу Вселенную в виде оболочки в пятимерном пространстве принадлежит Валерию Рубакову и Михаилу Шапошникову, опубликовавшим в 80-х годах статью, в которой было показано, что вне оболочки решением уравнений Эйнштейна является вакуум с отрицательной плотностью энергии (отрицательным Λ -членом). Теория Рэндалл-Сундрума отличается от идеи Рубакова и Шапошникова тем, что теперь в пяти-

мерном пространстве имеются уже две оболочки, квантово-механическое взаимодействие которых и дает надежду на объяснение иерархии взаимодействий. Теории, на самом деле, не являются плодом неудержимой фантазии, они должны опираться, по крайней мере, на твердый математический фундамент. В нашем случае - это строгие уравнения сшивки решений уравнений Эйнштейна в пятимерии с оболочкой, которые определяют связь параметров оболочки (*shellparameters*) с параметрами окружающего объема (*bulkparameters*). Поясним на четырехмерном примере, какого рода сшивка необходима в теории Рэндалл-Сундрума. Пусть у нас имеется замкнутая космологическая модель, пространственное сечение которой делится на три части: условно левую и правую и сингулярную оболочку, разделяющие первые две. Пусть "слева" у нас пустое плоское сферически симметричное пространство, радиус которого увеличивается от нуля до максимального, заканчиваясь на оболочке, а "справа его копия, получающаяся отражением, т.е., радиус начинает уменьшаться от максимального до нуля (по уже известной нам терминологии "слева" мы имеем R_+ -область, а справа - R_- -область). При определенной структуре поверхностного тензора энергии-импульса оболочка будет расширяться (инфляция!). Такая модель получила название "двухпузырная вселенная" ("*two-bubbleuniverse*"). Еще более простой пример: возьмем яблоко и отрежем слева и справа по одинаковому куску (конечно же) меньше половины, а затем приложим их друг к другу и склеим для прочности. Слой клея и есть прямой аналог тонкой оболочки. Многомерная теория с бесконечным внешним объемом резко отличается от четырехмерной гравитации, и, в принципе, эти отличия наблюдаемы. Прежде всего, за счет излучения гравитационных волн возможно несохранение энергии-импульса в четырехмерии. Кроме того, меняются свойства известных решений, так, например, коллапс сферически симметричного облака пыли сопровождается излучением и т.д., и т.д. Очевидно, что дополнительные измерения могут проявляться в четырехмерии и в виде "наведенного" скалярного поля.

Мы уже упоминали о гравитационных лагранжианах, являющихся нелинейной функцией скалярной кривизны, а также о том, что варьирование по методу Эйнштейна-Гильберта приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка, решения которых неустойчивы относительно малых возмущений. Но как мы уже знаем, существует альтернатива: метод Палатини, когда варьируются независимо метрический тензор и коэффициенты связности. Известно, что для линейного по кри-

визне лагранжиана оба метода дают абсолютно одинаковые уравнения. Однако, это уже не так в нелинейном случае. Оказывается, в результате варьирования связностей решениями соответствующих уравнений являются не символы Кристоффеля, а так называемая связность Вейля (*H.Weyl*). Варьирование же по метрике приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка с устойчивыми решениями. Конформное преобразование метрики (при неизменной связности) и в этом случае позволяет свести все к уравнениям Эйнштейна и метрической связности плюс скалярное поле. Но теперь такое скалярное поле не является динамическим, а уравнение для него уже не уравнение движения, а, скорее, уравнение связи. Этот подход интересен тем, что позволяет, в принципе, объяснить последние результаты космологических наблюдений, показывающих, что, возможно, наша Вселенная в недавнем прошлом расширялась с ускорением, а не с замедлением, как того требует условие энергодоминантности. Какой из двух методов "правильный покажет будущее, особенно ввиду тенденции современной теоретической физики к объединению всех взаимодействий, будь то теория струн, суперструн или все еще гипотетическая М-теория.

Так будем уповать на будущее, а пока - "за работу, товарищи!".

ЛИТЕРАТУРА

Вместо заключения, вот вам список рекомендуемой литературы. Ее выбор обусловлен двумя принципами: во-первых, литература должна быть доступна на русском языке, а во вторых, я эти книги читал, и они мне понравились. Итак,

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. "Теоретическая физика т. 2, "Теория поля".
- Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. А. Уилер. "Гравитация т. 3.
- Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. "Строение и эволюция Вселенной".
- С. Вайнберг. "Первые три минуты".
- И. С. Шкловский. "Вселенная, жизнь, разум".
- В. А. Рубаков. "Классические калибровочные поля".

- М. В. Сажин. "Современная космология в элементарном изложении".